規律的尋求㈢

黃敏晃
國立臺灣大學數學系

「數學」這個名詞裏帶著「數」這個字，大家顧名思義，都以爲數學的題材一定與數數有關係。但在數學裏，我們並不盡是在數數目，我們也有不數數的時候。今天我們要談的題材，雖然與數數有關，但是數數只是手段，我們要尋求的最終目的，與數目並沒有多大的關聯。

讓我們先講個與數學有關的故事：十八世紀的時候，東普魯士（現代德國的前身）的柯尼斯堡（Königsberg，目前屬於蘇聯的立陶宛，改名Kaliningrad， 現在已增加了許多橋），位於新舊普雷哥河（Pregel River） 的交滙處，河中由沖積土形成了一個島，所以整個市城被河分割成四塊。當地的人爲了交通的方便，就建了七座橋來聯絡，如圖1所示：

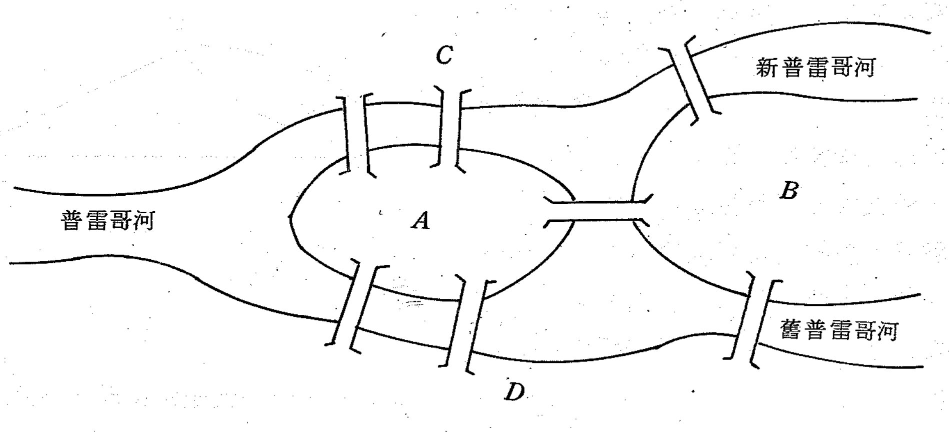

圖1

當時，柯尼斯堡的居民喜歡散步，有些人散步時一定要走遍這七座橋才肯心甘情願的回家。但他們發現，若要過每座橋，則有些橋一定得過兩次以上。於是這些散步狂在聊天的時候，就熱衷地討論下列的難題：

一個散步者要怎樣才能走遍這七座橋，而且每座橋只過一次，最後又回到出發點？當時，沒有人認爲這是個數學問題。因爲，這個問題的答案只有“可能”與“不可能”兩種（是非題），而且好像可以靠實驗來證實。

由於這些散步狂熱烈地討論與實驗（有了這個藉口，更是可以每天散步好幾回了），這個問題慢慢的在歐洲流行起來。當時還年青的瑞士數學家尤拉（Leonhard Euler, 1707～83）先生聽到了這個問題後，判定這是個數學問題。後來他寫了一篇數學論文，專門討論這個問題。他在這篇論文的最開始寫道：

> 幾何是討論物體的大小，形狀與其相互間的相對位置的學問。討論大小與形狀的幾何學，一直是數學家熱心研究的對象。但萊勃尼茲（Gottfried Wilhelm von Leibniz, 1646～1716）提過幾何學的一分支，叫做**位相幾何學**（geometric situs）。這門幾何學的分支只研究物體相互間的相對位置關係，而不去考慮物體的大小與形狀，因此也不涉及量的計算。由於至今未有令人滿意的定義，來具體地刻畫位相幾何學的課題與方法，所以這門分支幾乎沒有被深入探索過。
>
> 近來流傳著一個“柯尼斯堡的七座橋”的問題，它應該是個幾何問題。由於問題不在求物體的大小與形狀，也不能用量的計算來解決，所以我毫不猶豫地把它歸入位相幾何學。我認爲要解答這個問題，只需考慮到點與線的相互位置關係就足夠了。

尤拉論文中所提到的位相幾何學，現在又叫**拓撲學**（topology），而七座橋的問題，則屬於此分支中“一筆畫”的問題。下面，我們所要談的就是一筆畫的問題。

首先，尤拉把圖1上河中的島當作一點 A，河北邊當作一點 C，河南邊當作一點 D，河東邊（即新舊普雷哥河之間）當作一點 B，並把聯絡各地的每座橋當作一條線。如此，圖1就簡化成右列的圖2。

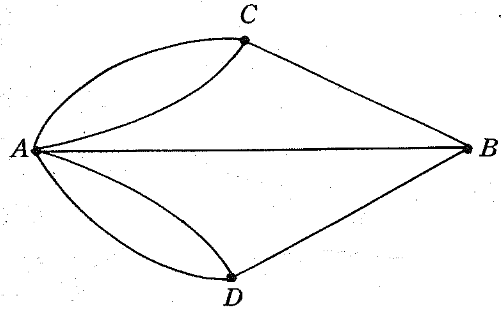

圖2

像這樣由有限點與有限條弧線（弧線也包含直線在內）組成的圖形叫做**網路**（network），一條弧線的端點，與兩條弧線的交點叫做網路頂點（在網路圖中用大圓點表示）。圖3中，我們列了許多網路。

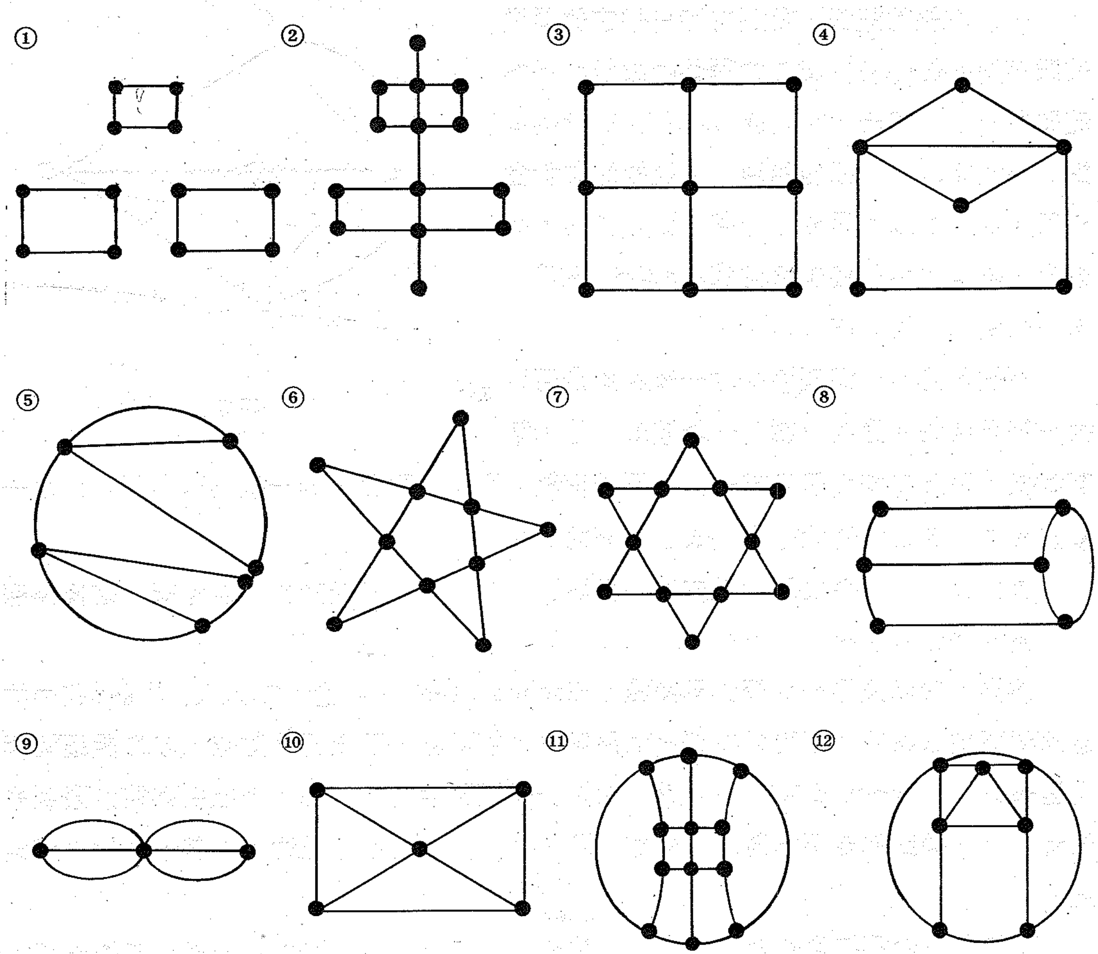

圖 3

由一個網路的某一頂點 A，沿著網路中的弧線走，到達另一頂點 B，而不重覆走任一條弧線時，叫做由 A 點到 B 點的一條**路線**（ path ），A 是此路線的始點，B 是終點。例如，圖 4 所示就是圖 2 的網路中，由 A 點到 B 點的兩條路線（由圖中的粗線與箭頭所示）：

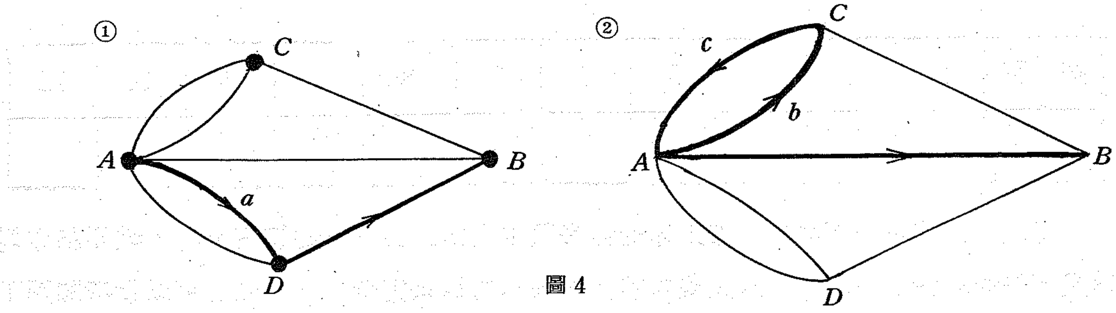

圖 4

一條路線的記法，我們有時只把它的頂點按順序記下來，例如，圖5的網路中由粗黑線與箭頭所顯示的路線，可記成ABD。有時兩頂點間有兩條以上的弧線相連，上述的記法就會有所混淆，所以用另外的記號把弧線標明，譬如說，圖4①中的路線可記成$AaDB$，而圖4②中的路線，則記成$AbCcAB$。

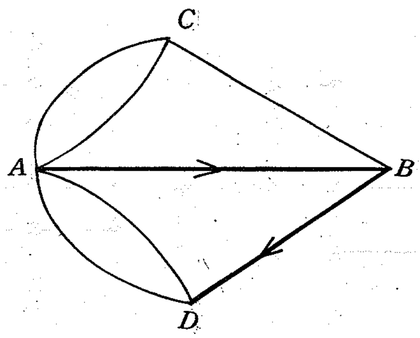

圖5

不難看到，一個網路中的一條路線是可以由一筆畫成的。這裏所謂“一筆畫成”是指筆不離紙，而且每條弧線只畫一次，不准重覆。所以，平面上的一個圖形是否可以由一筆畫成的“一筆畫”的問題就變成了下列的形式：

這個網路（把平面圖形看成爲一個網路）中，是否可設計出一條路線，這條路線用到此網路中的每一條弧線？

這裏，我們還得介紹網路**不連通**（disconnected）的概念。當我們對一個網路中的任意兩個頂點A與B，都可以找到一條路線以A爲始點，而B爲終點時，我們說這個網路是**連通的**（connected）；反過來說，如果一個網路中的某一點，不能由路線連通到另一點時，則此網路就是不連通的。例如，圖3中的①圖是不連通的，而其他的網路都是連通的。

顯然，一個不連通的網路無法由一筆畫成，反過來說，可以由一筆畫成的網路，一定是連通的。

下面，我們請各位讀者實際操作，自己畫畫看，看看圖3中那些網路可以由一筆畫成，那些不能，把實驗的結果，在下表中用打√（表示可以），或打×（表示不可以）的方式表達出來，第①圖當然就不用再試了。

表　1

圖　號	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
√或×											

現在我們核對一下結果，如果你的結果與本文第二表所附的答案不符，就要請你對結果不符的圖號中的網路，再試畫看看。如果你的結果完全相符，你就可以繼續閱圖下

去。

一個圖形（或網路）能不能由一筆畫成的關鍵到底在那裏？當然，此網路中的每條弧線一定得畫到，而且只能畫一遍，這是充分與必要的條件。但是，怎樣畫（或設計線路）才能滿足這個條件？

在數學的研究中，如果所要滿足的條件，不能由我們正在討論的事物直接得到時，我們一定要找補助的事物來幫忙。在我們的問題中，我們的條件直接牽涉到的是弧線。但一個圖形（或網路）中，除了弧線以外，還有什麼？

我們從小學就學到，一個三角形與四邊形的構成要素，是邊與頂點：三角形是由三個邊，三個頂點所構成；四邊形是由四個邊與四個頂點所構成（如圖6）。

圖6

同樣地，一個網路也不只是由一些弧線所構成。兩弧線連接之處，或一弧線的端點，就是頂點。換句話說，頂點也是構成網路的重要部分。由此看來，在這個問題中所要尋找的補助事物應該是頂點。

現在讓我們把注意力集中在網路的頂點。我們在以上各圖的網路中看到許多頂點，這些頂點有沒有不同的地方？還是每個頂點都一模一樣？

如果把一個頂點看成車站，弧線看成不同的公車路線，那許多頂點就有些不同：有些只是一種公車路線（弧線）的站（頂點），有些只是兩種公車路線（弧線）的站（頂點），……。如此，我們可以把頂點分成一線點、二線點、三線點、……等等。下面，讓我們把圖3中各網路的頂點作個統計，列表如表2（各網路中沒有超過六線以上的頂點）。

我們能否從表2中看出什麼結果？即是否能一筆畫成的網路與其各線點的數目之間的關聯性？自然不能，因爲這個統計表太繁雜了，如果我們把能一筆畫成的，與不能一筆畫成的網路，分開列表，也許會清楚些。讓我們試試看。（表3、表4）

表　2

圖　號	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
一線點	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
二線點	8	4	4	0	5	6	2	0	0	0	0
三線點	0	4	0	4	0	0	3	2	4	10	2
四線點	4	0	4	2	5	6	1	0	1	2	5
五線點	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
六線點	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
能否一筆畫成	√	×	√	×	√	√	×	√	×	×	√

表　3

能一筆畫成的網路

圖號	②	④	⑥	⑦	⑨	⑫
一 線 點	2	0	0	0	0	0
二 線 點	8	4	5	6	0	0
三 線 點	0	0	0	0	2	2
四 線 點	4	4	5	6	0	5
五 線 點	0	0	0	0	0	0
六 線 點	0	0	0	0	1	0

，

表　4

不能一筆畫成的網路

圖號	③	⑤	⑧	⑩	⑪
一 線 點	0	0	0	0	0
二 線 點	4	0	2	0	0
三 線 點	4	4	3	4	10
四 線 點	0	2	1	1	2
五 線 點	0	0	0	0	0
六 線 點	0	0	0	0	0

你從上表中看出什麼嗎？我們要的不是兩表共同的，而是要兩表中不同的東西。譬如說：

兩表中的五線點都爲0，

兩表中的一線點與六線點都很少。

這些是兩表中共同的性質，這些性質對我們沒多大的幫助。

那些是兩表中不同的性質呢？很好，有人注意到表 4 中的三線點數目，比表 3 中的三線點數目多很多。算得仔細些，我們看出，表 3 中三線點的數目都不超過 2 ，而表 4 中三線點的數目都超過 2 。

網路中三線點數目的多寡，與此網路能否用一筆畫成，這兩者之間到底有什麼關係呢？讓我們對三線點上做一些分析。

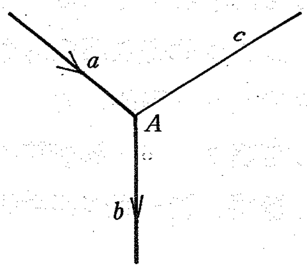

圖 7

一個三線點是三條弧線的交點，如圖 7 所示。如果它是一條路線中的頂點，則有如下的兩種情形：

1. 它是此路線的始點或終點。
2. 它不是此路線的始點或終點，而是中間的頂點。

如果是後者，則以此點為端點的一條弧線，一定不在此路線上。如圖 7 ，譬如說，這條路線是由弧線 a 到 A ，再由 A 沿弧線 b 出去，則弧線 c 就一定不在此路線上。因為 A 不是此路線的始點或終點，所以，此路線不可能沿著弧線 c 先出去，或沿著弧線 c 再進來（進來後，沿那條弧線出去呢？）。

由此看到，如果一個網路可以由一筆畫成，即有一條路線用到此網路中所有的弧線，則此網路中的三線點，一定是此路線的始點或終點。一條路線的始點與終點最多兩個，而圖 2 中的③，⑤，⑧，⑩，⑪各網路中的三線點都超過兩個，難怪不能由一筆畫成。

仿照上面的分析，我們可以看到，如果一個網路可以由一筆畫成（即有一條路線用到此網路的所有弧線），則一線點、五線點、……等奇數線的頂點，也一定是此路線的頂點或終點，而這些數目，合起來不能超過 2 ，而且只能為 2 或 0（始點與終點重合的時候）。這樣我們就得到下列定理：

定理 1 如果一個網路可以由一筆畫成，則此網路中奇數線的頂點數目，合起來只能為 2 或 0 。

其實，以上的分析不只讓我們得到上述的定理，而且告訴我們怎樣一筆畫成一個網路：

1. 如果奇數線的頂點為兩個時，選擇其中一個為始點，另一個為終點。
2. 如果奇數線的頂點數為 0 ，則任選一頂點為始點，但此頂點也一定是終點。

現在，你可以利用這些結果來檢查柯尼斯堡的七橋問題了：圖 2 中的網路能否一筆畫成？由於它的奇數線終點有 4 個，所以它不能一筆畫成。像這樣不能由一筆畫成的網

路，最少要用多少筆才能畫成呢？你能自己想想看嗎？筆者給一些提示如下：

① 儘量用奇數線的頂點做爲始點與終點。

② 每條路線（卽每一筆）只能用去兩個奇數頂點（一個爲此路線的始點，另一個爲終點）。

照這樣的畫法，每一筆（卽每一條路線）剛好會用去0個或2個奇數頂點。但是，如果一個網路中的奇數頂點的數目不爲偶數，怎麼辦？很有趣的一件事是，我們不用擔心，因爲我們有下列的定理。

定理 2　在一個網路中，奇數頂點的數目和一定是偶數。

證明　設一個網路中的 i 線頂點有 n_i 個，其奇數頂點的和爲N，則

$$N = n_1 + n_3 + n_5 + n_7 + \cdots\cdots \qquad (1)$$

因爲一個網路的頂點是有限的，所以上式是個有限和。每一條弧線有兩個端點，如果這個網路有L條弧線，則共有2L個端點。但這裏有許重覆，譬如說，2線點算了2次，3線點算了3次，等等。所以

$$2L = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \cdots\cdots \qquad (2)$$

(2)式減去(1)式得

$$2L - N = 2n_2 + 2n_3 + 4n_4 + 4n_5 + \cdots\cdots$$

由於此式等號右邊爲偶數，等號左邊也應該是偶數，因此N也是偶數，證畢。

現在，你可以放心了。下面，請你自己試試看，圖8中的三個網路，各要幾筆才能畫成。

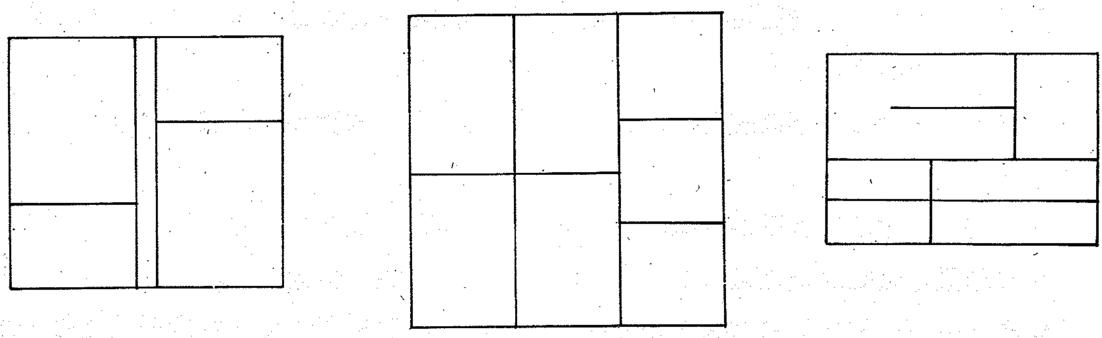

圖 8

最後，我們提到這部分的數學教材，在日常生活中的應用：如果把一個都市的街道看成爲網路，則郵差先生送信時所走的路線，與公車的路線，都是路線。這些路線應該如何設計，才能連通市內各點，並涵蓋此都市的每一條街道？顯然，我們在本文中提到的數學結果，在這裏是可以加以應用的。

⊙ 詞語淺釋 ⊙

寒　流

「寒流」在氣象學上叫作「寒潮」，也就是冷氣團及冷高氣壓。

我國位於亞洲大陸東邊，北方與極地的冷氣團毗隣，時序入冬以後，冷氣團經常駐留西伯利亞及蒙古一帶。

特別是蒙古西北方的唐努烏梁海盆地，因地形的關係，冷空氣易於聚合。每當冷氣團移到這個地區時，因輻射冷却及垂直收縮，常形成強大的高氣壓，一旦潰流至低緯度地區，氣溫便急遽下降。

在臺灣，寒潮的定義是－冷鋒通過臺灣北部以後，因大陸冷氣團南下，帶來冷空氣，使臺北的日最低溫連續下降兩天，達攝氏四度以上者。

寒潮尚有等級之分：

- 氣溫下降四至五點九度之間的，稱中寒潮。
- 下降六至七點九度之間的，稱強寒潮。
- 下降八度以上的，稱極強寒潮。

通常寒潮暴發，最冷的時候，是在第二天到第三天。

寒潮來襲，週期大抵是三天。不過若遇阻塞高壓，也可能達一星期之久。

編　輯　室
