

高一學生的向量概念發展

江淑美

臺北市立中正高中

一、前言

向量在“現代”課程非常重要，在以往的教材，向量這單元是編排在高二，但七十三學年開始推廣的課程，是將平面向量安排在高一下學期。爲了解高一學生是否已具備能接受向量的成熟度，並檢驗學生在學習向量概念的過程中，可能發生困難的地方，筆者在上學期末對中正高中 954 名一年級學生進行測驗。

二、研究方法

1. 檢驗工具

選用的試題是英國 CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) 研究小組所設計的題目，直接譯成中文。

註：CSMS 小組用此分考卷測英國 14 歲羣與 15 歲羣的中學生。

2. 檢驗方式：筆測

三、試題分析

1. 試題分類

第一類：包括 1、2、3 題，是單純的加、減，與乘的運算，把向量看成序對。

第二類：包括 4、5、12 題，把向量看成代表位置及移動的 n 維序對。

第三類：包括 6、7、8、9、10 題，這部分強調自由向量的基本概念（即方向與大小），以及其在幾何上的應用。

第四類：包括 11 題，用有向線段代表一向量。

2. 試題分析

第 1 個問題：序對的背景問題，利用一欄的數目字來表達製造一收音機所需的各種零件的資料，包括加、減、乘以及運算的解釋。對於運算的解釋比數字的操作還要重要。本題是介紹向量的序對表示法的背景問題。由測驗結果顯示出，受試者皆能了解向量的序對表示法。受試者答對的百分比由 91.5%~98.8%，只有第⑦小題，僅 84.8% 的受試者答對，原因是單純計算錯誤，或沒有以向量形式表示。

第 2 個問題：單純的向量加、減與乘的運算。由受試者答對比例來看，90.8%~99.2%，此種運算高一生都能了解，即使向量中有負數，或 $4\begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \end{pmatrix}$ 等式兩邊都有未知數，一樣答得很好。

第 3 個問題：重點在一向量用一組基底向量來表示。雖然受試者無基底向量的概念，還是可以做得很好，答對百分比為 98.2%~95.3%，受試者可以了解向量組合的意義，在解方程上也沒問題。

第 4 個問題：以島嶼的地圖作基礎，大部分的项目包括找出移動以及把一連串的移動用相加的向量來驗算。

在(1)中，C點移動至D點，可以用向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 表示，問為什麼要-1表示？大部分受試者答案用“向南”“向下”表示出來，都可接受負整數所代表的意義。在一連串點的移動中，由D至E，由E至F均有98.3%的受試者答對，可是由F到H，只有96.2%答對，說明極少部分的受試者對向量中的0的意義或用法不純熟。有少部分的受試者在第2題中的 $③ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ $④ \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$ ，沒能答對，可是在第4題的③④⑤中均能答對，這說明：給予一個具體的模式，對於負整數的接受會有所幫助。

第5個問題：利用向量配合圖形所做的平移（位移），大約只有70%左右的受試者可做到①~④項，且A''的觀念可接受。由大部分受試者答案顯示出都是用向量的加法來解決問題，極少受試者用數格子的方式找出答案，向量加法的觀念比較抽象，對大

部分的受試者沒有問題，在⑥⑦中要求平移無法在圖中找出的線段DE，結果90%的受試者可以答對，表示他們對抽象的轉換可以處理得很好。

第6個問題：介紹 $\vec{a}$ 向量的觀念，來表示 $\vec{a}$ ， $-\vec{a}$ ， $2\vec{a}$ 以及要求受試者把簡單 $\vec{a}$ 的相關向量畫在圖上。

試題	① $-\vec{a}$	② $2\vec{a}$	③ $\frac{1}{2}\vec{a}$	④ $-\vec{a}$	⑤ $\vec{a}$	⑥ $\frac{5}{2}\vec{a}$
答對率	76.3%	72.9%	65.3%	70.9%	73.3%	56.1%
答對題數	6		25		24	
通過率	42.8%		66.5%		76.3%	
					80.1%	

由百分比可看出：因為大小所產生的錯誤比因方向而產生的錯誤要多。

答對①②的比例只有64.4%~78.0%，原因是①②僅作簡單的介紹，受試者對於向量與大小，方向的密切關係還不能引起深刻的聯想。少部分受試者在圖中標示 $\vec{a}$ 的相關向量時，把不相關的向量也用 $\vec{a}$ 的相關向量標示出，更可說明：少數受試者到目前為止，對於向量與大小，方向的相關概念尚不十分了解。

第7個問題：要求受試者對於相關的 $\vec{c}$ 向量畫出 $2\vec{c}$ 及 $-\vec{c}$ 。答對的比例有87.5%~91.2%之多。

第8個問題：介紹向量加法的三角形法則，以及說明加法具有交換性。由 $\vec{e}+\vec{d}$ 及 $\vec{d}+\vec{e}$ 的圖中，發現一明顯的錯誤，部分受試者畫出的圖形是所要求的逆向量，表示對始點，終點的概念不十分深刻，僅有極少部分的受試者感覺到交換性這種概念存在，而用“交換性”作答，大部分只覺得 $\vec{e}+\vec{d}$ 與 $\vec{d}+\vec{e}$ 圖形相同。

第9個問題：這問題是對向量三角形的法則做更深一層的探究，要求在三角形中找出 $\vec{a}+\vec{b}$ 與 $\vec{a}-\vec{b}$ 。結果發現 $\vec{a}+\vec{b}$ 要比 $\vec{a}-\vec{b}$ 的形式容易，我們可用 $\vec{b}+\vec{a}$ 來檢驗 $\vec{a}+\vec{b}$ ，對這批受試者而言非常容易，但 $-\vec{b}+\vec{a}$ 來檢驗 $\vec{a}-\vec{b}$ ，對受試者而言，似乎沒有幫助。學生在此項目裏答對① $\vec{a}+\vec{b}$ (70%) ② $\vec{a}-\vec{b}$ (60.6%) ③ $\vec{f}+\vec{g}$ (82%) ④ $\vec{f}-\vec{g}$ (53.5%)。

第10個問題：包含向量等式的運用以及一連串向量的形成。在(1)中： $\vec{x}$ 以 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 表示之， $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 有84.5%答對，可是 $\vec{y}$ 以 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 表示只有71.7%同學答對，其實 $\vec{x}$ 與 $\vec{y}$ 是相等向量，造成受試者差異的原因是，在給予的圖中，可直接看出 $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ ，但 $\vec{y}$ 向量的組合向量並未標示出，要由同學自己觀察比較得到。由

此知：要把相等的向量標示出來，比較簡單，可是把某一向量看成是其他許多向量的總和的觀念，較為困難。

第 11 個問題：所用的圖形與第 10 題相同，但用有向線段 $\overrightarrow{AB}$ 來代表一向量。答對 ①②③④ 小題有 75.7%~68.2%。

可是答對 ⑤ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG}$ 以單一向量表示？僅有 55.2% 答對，在圖中 $\overrightarrow{AE}$ 與 $\overrightarrow{HG}$ 沒有直接連接。受試者需看出 $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ ，才可得到答案 $\overrightarrow{AF}$ ，或是看出 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GC}$ ，可得到答案 $\overrightarrow{HC}$ 。但一有趣的現象是答案為 $\overrightarrow{AF}$ (46.3%) 比 $\overrightarrow{HC}$ (8.9%) 的比例大很多，原因是由圖形中，能夠感受到 $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ ($\because EFGH$ 為一正方形) 比 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GC}$ 容易得多。

在 ⑥⑦ 中答對的有 57.1%~66.9%，跟 ①②③④ 比較，百分比較低，主要是在圖形中找不到 $\overrightarrow{SJ}$ 或這些點，須憑空想像，但與 ⑤ 比較則百分比較高，因為欲解 $\overrightarrow{SJ} + \underline{\hspace{1cm}} = \overrightarrow{SZ}$ 與 $\overrightarrow{LS} + \underline{\hspace{1cm}} + \overrightarrow{TP} = \overrightarrow{LP}$ ，不必看圖形，由向量等式的本身可猜出（看出，解出），可是受試者在解 ⑥ 時，即使有圖形幫忙，因無連接點，所以答對的比例仍然偏低。

第 12 個問題：以阿倫鼻子上的一隻蒼蠅移動為情況，要求受試者回答，再經過某些移動以後，蒼蠅所停留的位置。這是一個三維空間的問題，由受試者的答對率 ① 87.3% ② 77.5% ③ 70.4% 中看出：我們不容易把空間向量所代表的點在平面上表示出，受試者對三維空間位移的運算較困難。

四、向量概念的層次

英國 CSMS 研究小組，根據英國學生的答對率，問題的數學結構及試題相關性的統計檢驗的結果，將這些試題分成如下七個不同的了解層次。

(一) 不代表移動或位置的 n 維序對的基本問題

(a) 在一個故事範疇裏，利用 n 維序對，來儲存資料，特別是 n 維序對的加法以及對 n 維序對加法的解釋。

(b) 令 $\vec{x}$ 向量是個 n 維序對，把 $a\vec{x}$ 解釋成 a 個 $\vec{x}$ 的觀念。

(二) n 維序對包括基本移動的更深一層的問題

(a) 在一個故事的範疇裏，用以儲存資料的 n 維序對的乘法形成以及解釋。

(b) 包括 n 維序對乘法方程式的解法。

(c) 把向量移動的過程寫下，對於使用負整數需要的解釋。

(d) 以 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 描述移動 (a, b 為正整數)。

(三) 帶有向量的基本幾何問題

(a) 利用 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 與 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示出 n 維向量。

(b) 在 a, b 中有一負整數情況下，以 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 表示出移動。

(c) 以 $\vec{a}$ 向量的大小與方向來表示 $\frac{1}{2}\vec{a}$, $2\vec{a}$ 或 $-\vec{a}$ ，這類簡單乘法運算的描述。

(d) 給予向量的始點與終點，對於簡單向量加法三角形，如何加以完成。(先給出一類似的例子)

(e) 使用一已知的圖表，如何把一連串的向量，用一條路線把它表示出。(把一路線用一連串其他向量表示出來)

(四) 基本的抽象移動

(a) 把一已知的 n 維向量，用 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表達出或利用其他的基底向量把 n 維向量表達出來。

(b) $\begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}$ 形式的移動。

(c) 畫出簡單轉換的結果。

(d) 找出二度轉換的向量。

(e) 在沒有圖形的情況下，利用逆向量的轉換，要求找出結果。

(f) 在無圖形的情況下，使用一已知向量取代一連串的向量。

(g) 在沒有“阻礙”的情況下，如何把相等向量標示出來。

(五) 更深一層的抽象移動

(a) 如何把圖上三個連續的移動以一 n 維序對表示出，以及對這類連續移動的加法(包括負整數)。

(b) 對雙重轉換向量的討論。

(c) 對已知向量選擇一些向量作乘法的描述。

- (d) 在有強烈的“阻礙”下，把相等向量標示出來。
- (e) 在沒有圖形以及給予結果的狀況下，如何把一些「迷失」的路徑向量找出。
- (f) 找出三度空間移動的逆向量。（沒有圖形）
- (六) 解釋，檢驗以及交換性
 - (a) 在一已知圖形中，對於三個向量移動總和的解釋。
 - (b) 找出路徑以及利用向量等式來檢驗。
 - (c) 向量加法交換性的解釋。
 - (d) 利用充分以及必要條件解釋向量等式。
- (七) 向量等式的全盤運用
 - (a) 以自由向量或路徑向量的概念來運用於向量的等式。（用於較困難的項目）
 - (b) 對於包含如 $-\vec{a}$ 的一連串向量加法的運用。

這種層次性的區分，包括兩個重要的觀念，抽象性和複雜性。從第五層次以上的學生，可以處理越來越複雜的問題，而不需要具體的例子來幫助他們解決問題。

事實上，抽象性與複雜性，這兩觀念是有密切關係的，越是複雜的問題，越是需要抽象的觀念來解決。

五、高一學生對向量概念了解的層次分佈

層次	答對率（檢定標準）	高一學生
0		
1	88-92(3/4)	0
2	75-82(5/7)	0
3	66-72(9/12)	0
4	51-61(7/9)	6.0
5	34-48(9/12)	32.6
6	22-28(4/5)	41.8
7	5-19(3/4)	19.6

註：第1層次的檢定標準 $\frac{3}{4}$ ，指試題有四題，答對三題以上的學生，我們說他已有向量第1層次的概念。

六、錯誤分析

(一) 自由向量中相等向量轉換的錯誤

(a) 在第11題的⑤中：將 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG}$ 以單一向量表示？

我們所預期的答案為 $\overrightarrow{AF}$ 或 $\overrightarrow{HC}$ ，受試者需由圖中看出 $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ 或 $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{GC}$ ，才可得到正確答案，有9.1%的受試者將答案寫為 $\overrightarrow{AG}$ ，受試者直接取前向量 $\overrightarrow{AE}$ 的始點，後向量 $\overrightarrow{HG}$ 的終點，作為結果，忽略了 $\overrightarrow{AE}$ 與 $\overrightarrow{HG}$ 並未有連接點，必須經過向量的轉換平移才可得到答案。

(二) 向量有關概念（大小，方向，逆向量，等式的運算）尚未建立

(a) 在第6題的①中：問代表什麼？

24.1%的受試者誤答為“向量”，問題所預期的答案是 $\frac{1}{2}\vec{a}$ ，說明受試者在題目的敘述中，無法感受到向量“大小”的概念。

在第6題的②中：不是 $\vec{a}$ ，這向量與 $\vec{a}$ 沒有關係，為什麼？

7.6%的答案為空白，表示這部分學生到目前為止，對向量“方向”的感受上，尚嫌不足。

由結果顯示：答錯者在“大小”的錯誤比“方向”的錯誤比例要高，這結果與第6題的“在圖中標示出 $\vec{a}$ 向量與其相關向量”的結果一致。

(b) 在第8題中，受試者均能在圖中正確的畫出 $\vec{e} + \vec{d}$ 的結果，但部分受試者在 $\vec{d} + \vec{e}$ ，則畫成所需答案的逆向量。因而在①中，無法正確告訴我們“ $\vec{e} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{e}$ ”。

。有些受試者圖形畫對，但敘述方式如：方向相同，長度一樣，空白的，均不能滿足我們所預期的答案“ $\vec{e} + \vec{d} = \vec{d} + \vec{e}$ ”，“大小相同，方向一致”，“向量具有交換性”。

(c) 在第9題的④中，要求受試者“以 $\vec{f}$ 與 $\vec{g}$ 向量表達 $\vec{z}$ ”，發現典型錯誤的答案為 $\vec{f} + \vec{g}$ ，佔20%，表示受試者對連續向量的運算及逆向量的概念尚未完全建立。

(d) 在第10題的⑥中：求 $\vec{z}$ （以 $\vec{a}$ ， $\vec{c}$ 和 $\vec{d}$ 表示）？

問題的答案應為 $-\vec{a} + \vec{d} + \vec{c}$ ，典型的錯誤有二種：7.1%為 $\vec{z} = \vec{a} + \vec{d} + \vec{c}$ ，24.7%為 $\vec{z} = -\vec{a} + \vec{d} - \vec{c}$ ，原因是對連續向量加法的始點，終點，方向以及逆向量的相關性，尚未能體會出，可是此一問題的解決必須結合始點，終點，逆向量的觀念，所以造成答對者比例偏低。

(三) 透過操作解題不習慣

(a) 在第 10 題的②中：求 $\vec{y}$ 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示 ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 不能都用)？

38.6% 受試者均留下空白未能作答，只有 4.3% 受試者以正確答案 $2\vec{b}$ 作答，答案結果必須透過實際操作，用簡單作圖工具去測量，可是受試者均沒有想到此一方法，或無從想起，說明：可能學生對透過操作解題較不習慣。

(四) 用文字表達數學情境的能力較差

(a) 在第 4 題的⑨中：你如何校對海路的向量是對？抑不對？

受試者所寫的答案裏頭，有空白的、數格子的、利用坐標系正負觀念來判斷、把向量相加，答案不一而足，但是並不表示學生對此問題無法作答，基本上是學生無法以一種確切的表達方式來描述問題所期望的答案。意味著學生在學習數學的過程中，對於用文字來表達實際問題能力的培養，應該再加強，使其在描述問題的過程中，能夠確切的抓住要點。

(b) 在第 5 題的③中：你如何求得此向量？

答對者比例降為 67.9%，部分受試者①②均答對，可是③的描述却不恰當，再次說明用文字敘述數學情境的能力較弱。

(五) 受舊經驗的影響而誤答

(a) 在第 10 題的④中：那一個向量（或那一些）是跟 $\vec{x}$ 相等？

受試者答案中，有寫 $\vec{y}$, $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $2\vec{b}$ ，這些均為合理的答案，在錯誤的答案中，把 $\vec{d}$ 也填入者佔 11.9%，原因是問題中的圖形為一正方形，使受試者受到幾何圖形的影響“正方形每邊均相等”而誤答，而未能考慮到方向問題。

(六) 粗心錯誤

(a) 在第 1 題的⑦中：試求一向量以表示製造三台標準及二台高級收音機，總共所需零件？

$$\text{答案應為 } 3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 20 \\ 20 \\ 7 \end{pmatrix}, \text{ 結果發現, } 3.3\% \text{ 的同學答案為 } \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix},$$

錯誤的原因是計算過程為

$$3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 13 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ 明顯可看出, 後一項係數 } 2 \text{ 沒有考}$$

慮到，錯在粗心。

沒有用向量形式，而答案以零件總和 56 表示者佔 2%，表示學生對於問題本身的敘述，不能把握重點。試求一向量以表示……，而誤以為問題所求為總共所需零件？

(b) 在第 5 題的①中：求 B'' 點的坐標？

典型的錯誤有二種，5.5% 的答案為 $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，造成此種錯誤的原因是，問題要求受

試者從 B' 經 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 移動至 B'' ，可是受試者直接由 B 點經 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 移動，得到結果 B'' 的坐標為 $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 。

5.4% 的答案為 $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，原因是受試者雖由 B' 開始移動，但是却以 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 的方式移動。

另一現象如①錯的，②而大部分隨之而錯，但①有 73.8% 答對，②有 79.6% 答對，原因是②問題敘述中“把 $\triangle ABC$ 移至 $\triangle A''B''C''$ ”，清楚把始點 $A、B、C$ ，終點 $A''、B''、C''$ 重新敘述過，諸如①中發生錯誤的情況，略為下降，答對比例因之升高。

七、討論與建議

(一) 受試者在所有 70 個項目中，答對率都在 80.1% 以上，說明這年齡的受試者有足夠的能力能夠處理試卷上大部分的問題。

(二) 對於一般的受試者，正確基本的向量觀念或問題，是很恰當的。把向量看成是 n 維序對是介紹向量觀念最容易的方法，利用一些序對來貯存或表示一些資料，是很重要的方法，這類練習可運用在更多不同情況下數字的變化或延伸。

(三) 把資料做個整理，或者做個統籌的解釋，也可以用“問題式”的方式讓學生去思考，由本次受試者答對項目的比例來看，均有能力作此問題。

(四) 對於 n 維序對的使用來表示移動和位置，似乎是很合理，而且有優點。當箭頭符號被使用後，對於表達某些事物的一致性，順序的需求，使受試者在某些狀況下，感到有接受負向量的需要，說明適時提供一個具體的情境，是良好的。

(五) 受試者對自由向量的基本概念有足夠的能力了解，對於自由向量的問題也可加

以介紹，對於“平行”以及“相反”的觀念必須再加強，比較深的自由向量問題，一連串的向量加法的三角形法則，是極為需要的，對於使用如： $\overrightarrow{AB}$ 來表達向量觀念，對受試者而言是簡單的，可是對向量等式的運算，始點、終點的介紹需加強。

這次試驗的結果，說明：高一程度的受試者有能力處理向量問題，在高一數學課程裏加上更多，更深一層自由向量的問題是很恰當的。

參考資料

Hart. K M (ed) : Children's Understanding of Mathematics : 11-16
 , John Murray.

附錄一 高一學生的向量概念發展 試題

1. 如果要製造一台標準收音機，需三個活塞，二個電晶體，四個電池，一個開關，這

可以用向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示，如果要做一台高級收音機，所需零件用向量可表為 $\begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。

(1) 製造一台高級收音機，需那些零件？_____ ①

(2) 試以向量表示法表示出製造一台標準收音機及一台高級收音機，所需的零件？

_____ ②

(3) 給一向量 $\begin{pmatrix} 0 \\ 21 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix}$ ，可以造幾台高級收音機？_____ ③

(4) $3 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 12 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，我們可利用這向量，製造什麼？_____ ④

(5) 解出 $2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{⑤} \end{pmatrix}$ ，利用這向量，可製造什麼？_____ ⑥

(6) 試求一向量以表示製造三台標準及二台高級收音機，總共所需零件？⑦

2. 計算：

(1) $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{①} \underline{\hspace{2cm}}$

(2) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \text{②} \underline{\hspace{2cm}}$

(3) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \text{③} \underline{\hspace{2cm}}$

(4) $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \text{④} \underline{\hspace{2cm}}$

(5) $2 \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \text{⑤} \underline{\hspace{2cm}}$

(6) $4 \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 8 \end{pmatrix}$ 求 $a = \text{⑥} \underline{\hspace{2cm}}$
 $b = \text{⑦} \underline{\hspace{2cm}}$

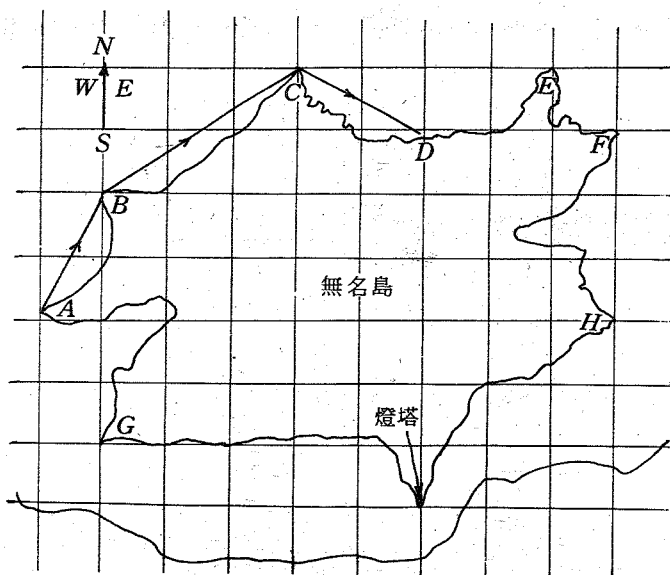
3. 把下面向量用單一向量表示出？ $6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{①} \underline{\hspace{2cm}}$

(1) 向量 $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，仿此 $\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \text{②} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{③} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

(2) 利用 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 兩向量，表示 $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \end{pmatrix} = \text{④} \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(3) 向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ ，仿此 $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \text{⑤} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \text{⑥} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ 。

4.



如圖：

從A點移動到B點，可描述成向東移1單位，向北移2單位，或以向量 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

表示。從B點移動到C點，可描述成向東移3單位，向北移2單位，或以向量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ 表示。

(1) 從 C 點移動至 D 點，可以用向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ 表示，問為什麼要用 -1 表示？①

(2) 請用向量把下列移動表達出來：

(1)從 D 到 E ：②，(2)從 E 到 F ：③，(3)從 F 到 H ：④。

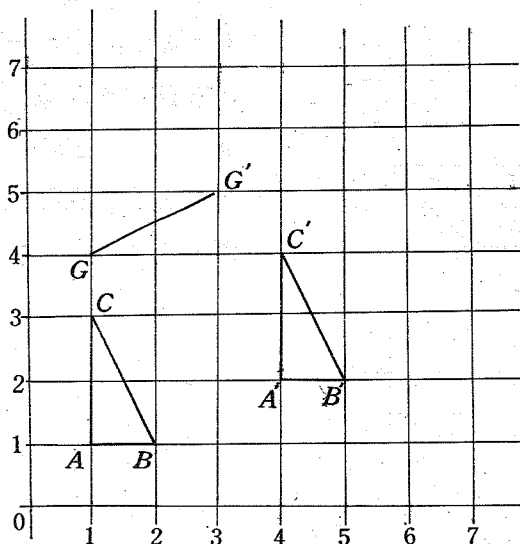
將這三個向量加在一起，結果是⑤，這向量表示什麼？⑥。

(3) 橫跨島上的途徑 G 到 H ，應如何表示？⑦。

(4) 請用向量表示經由海路從 G 經燈塔移動至 H 點？⑧。

(5) 你如何校對海路的向量是對？抑不對？⑨。

5.



如圖：

將 G 點移動至 G' ，可用向量 $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示。

將 $\triangle ABC$ 移動到 $\triangle A'B'C'$ ，可用向

量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示。核對一下將 A 移動至

A' ， B 至 B' ， C 至 C' ，也都可用向

量 $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ 表示，將 $\triangle A'B'C'$ 移動 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

後得 $\triangle A''B''C''$ ，試在圖中畫出。

(1) 求 B'' 點的坐標？①。

(2) 那一個向量可以把 $\triangle ABC$ 移至 $\triangle A''B''C''$ ？②，你怎樣求得此向量的？

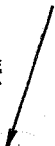
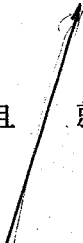
③。

(3) 平移向量 $\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}$ ，再平移 $\begin{pmatrix} -9 \\ -8 \end{pmatrix}$ ，結果如何？④。

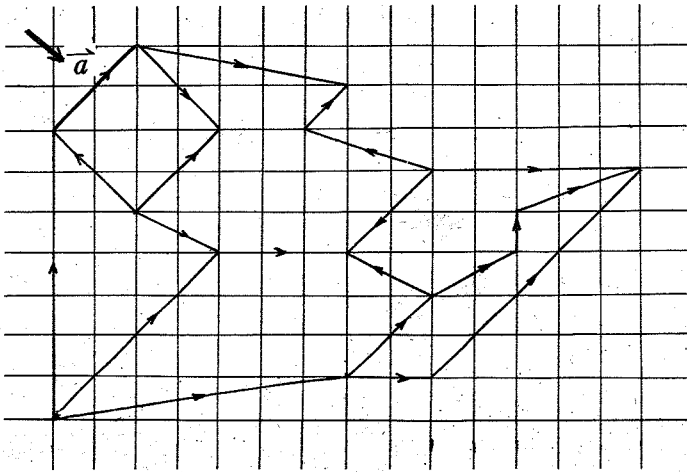
用向量表示⑤。

(4) 把線段 DE 平移 $\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ ，那麼 $D(3,3)$ ， $E(4,7)$ ，平移到什麼地方？

D 移動至⑥， E 移動至⑦。

6. 假如  $\vec{a}$ ，那麼  就是 $-\vec{a}$ ，且  就是 $2\vec{a}$ ，問  代表什麼？①。

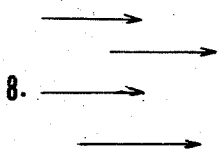
 不是 $\vec{a}$ ，這向量與 $\vec{a}$ 沒有關係，為什麼？②。



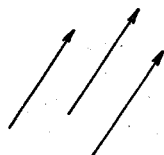
在左圖中，已知一向量 $\vec{a}$ ，試將圖中每一可用 $\vec{a}$ 來表示的向量，例如 $\vec{a}$ ， $-\vec{a}$ ， $2\vec{a}$ ……等，標出（標在答案欄的圖中）。

7. 這些都是向量 $\vec{c}$ ，

- (1) 在方格中畫出向量 $2\vec{c}$ ，①，在方格中畫出向量 $-\vec{c}$ ②。（答案欄內）
- (2) 向量 $2\vec{c}$ 的方向與原來 $\vec{c}$ 的方向有何關係？③。
- (3) 向量 $-\vec{c}$ 的方向與原來 $\vec{c}$ 的方向有何關係？④。
- (4) 向量 $-\vec{c}$ 與原來的 $\vec{c}$ 大小有何關係？⑤。



8. 這些都是向量 $\vec{d}$ ，



都是向量 $\vec{e}$ ，把 $\vec{d}$ 向量跟 $\vec{e}$ 向

量相加，爲了要使它們相加，我們選取首尾相連的 $\vec{d}$ ， $\vec{e}$ 向量，
，連接 $\vec{d}$ 向量始點， $\vec{e}$ 向量的終點，即得一單一向量 $\vec{d} + \vec{e}$ ，
 $\vec{d}$ 的始點與 $\vec{e}$ 的終點告訴我們 $\vec{d} + \vec{e}$ 向量的方向。

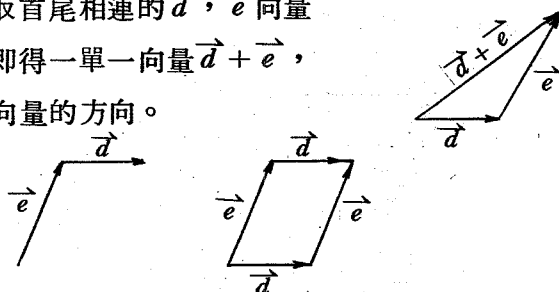
(1) 把 $\vec{e} + \vec{d}$ 畫出（不要忘記箭頭）

(2) ①把 $\vec{e} + \vec{d}$ 畫出

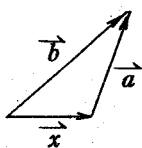
②把 $\vec{d} + \vec{e}$ 畫出

比較(2)中兩圖形，告訴你什麼？

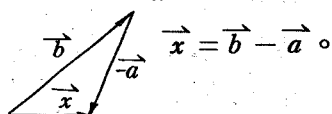
①_____。



9. 這圖形裏， $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b}$ ，若要知道 $\vec{x}$ 等於什麼，我們可把 $\vec{a}$ 的方向倒

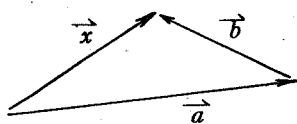


轉過來，然後得

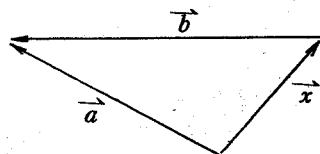


$$\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}。$$

(1) 下圖中，以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 表示 $\vec{x}$ ，

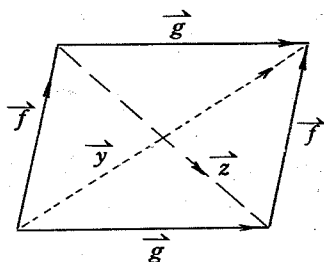


$$\vec{x} = \text{①}。$$



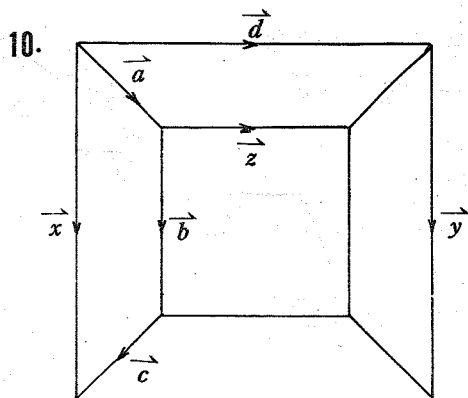
$$\vec{x} = \text{②}。$$

(2) 試求 $\vec{y}$ 與 $\vec{z}$ （以 $\vec{f}$ 與 $\vec{g}$ 表示）（ $\vec{y}$ 是虛點向量， $\vec{z}$ 用短線表示）



$$\vec{y} = \text{③}。$$

$$\vec{z} = \text{④}。$$



(1) 試求 $\vec{x}$ 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示, $\vec{x} = \underline{\text{①}}$
將跟 $\vec{a}$ 相等的向量標上 “ $\vec{a}$ ”, 與 $\vec{b}$ 相等的向量標上 “ $\vec{b}$ ”, 與 $\vec{c}$ 相等的向量標上 “ $\vec{c}$ ”。

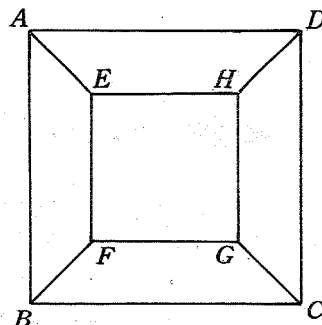
(2) 求 $\vec{y}$ 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示, $\vec{y} = \underline{\text{②}}$
($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 都要用)

(3) 求 $\vec{y}$ 以 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 表示, $\vec{y} = \underline{\text{③}}$
($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 不能都用)

(4) 那一個向量 (或那一些) 是跟 $\vec{x}$ 相等? ④, 為什麼? ⑤。

(5) 求 $\vec{z}$ (以 $\vec{a}$, $\vec{c}$ 和 $\vec{d}$ 表示), $\vec{z} = \underline{\text{⑥}}$ 。

11. A 點有一蜘蛛, B 點有一隻蒼蠅, 蜘蛛沿著 $\vec{AE}$, $\vec{EF}$ 和 $\vec{FB}$ 到達 B 點, 在向量上我們可以把這條路徑描述成 $\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FB}$, 可用 $\downarrow$ 表示出, 所以向量 $\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FB} = \vec{AB}$ 。



(1) 那一個向量可用來表示從 B 點到 A 點, 這條路徑?

①。

(2) 把 $\vec{AG}$ 表示成三個向量組合, $\vec{AG} = \underline{\text{②}}$ 。

(3) 找出一個等於 $\vec{HD} + \vec{DC} + \vec{CG}$ 這條路徑的向量, ③。

(4) 在圖中找出跟 $\vec{AB}$ 一樣的向量? ④, 將 $\vec{AE} + \vec{HG}$ 以單一向量表示? ⑤

(5) 把下列空格填出適當的向量? ① $\vec{SJ} + \underline{\text{⑥}} = \vec{SZ}$ ② $\vec{LS} + \underline{\text{⑦}} + \vec{TP} = \vec{LP}$

12. 有一隻蒼蠅停在阿倫的鼻子上, 用向量表示的位置是 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 阿倫用手趕了它一下

, 這隻蒼蠅作以下的移動: 平移 $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, 然後 $\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, 然後 $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 。

(1) 這隻蒼蠅, 這趟旅程後停在何處? ①。

(2) 阿倫又趕它, 結果停在向量是 $\begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$ 的桌角上, 如果它想要停在向量位置 $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

的蛋糕上, 它必須怎樣移動? ②。

(3) 在蛋糕上的蒼蠅想要回到原來的桌角上，必須怎樣移動？_____③_____。

附錄二 高一學生的向量概念發展 答案卷格式及答對率

1. ① 832 87.2%

② $\begin{pmatrix} 921 \\ 96.5\% \end{pmatrix}$ ③ 943 98.8% ④ 873 91.5% ⑤ $\begin{pmatrix} 936 \\ 98.1\% \end{pmatrix}$

⑥ 907 95.1% ⑦ 805 84.5%

2. ① 919 96.3% ② 892 93.5% ③ 866 90.8% ④ 881 92.3% ⑤ 946 99.2%

⑥ 931 97.6% ⑦ 938 98.3%

3. ① 909 95.3% ② 948 99.4% ③ 937 98.2% ④ 920 96.4% ⑤ 944 98.9%

⑥ 934 97.9%

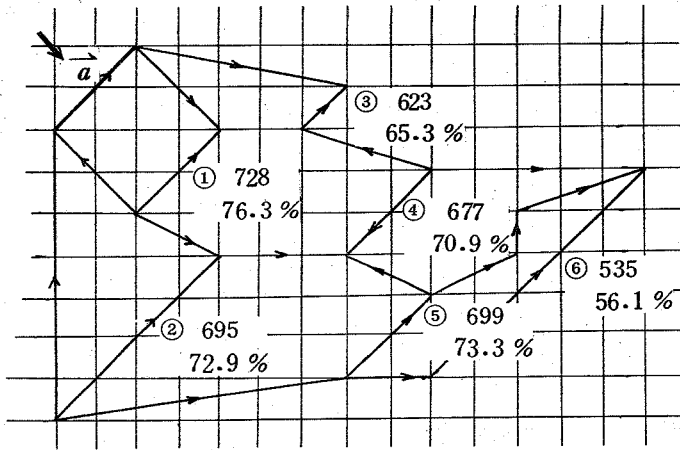
4. ① 764 80.1% ② 938 98.3% ③ 938 98.3% ④ 918 96.2% ⑤ 896 93.9%

⑥ 833 87.3% ⑦ 842 88.3% ⑧ 720 75.8% ⑨ 586 68.1%

5. ① 704 73.8% ② 759 79.6% ③ 648 67.9% ④ 808 84.7% ⑤ 875 91.7%

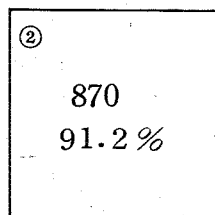
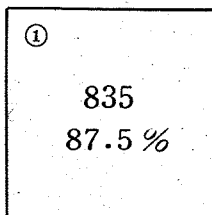
⑥ 866 90.8% ⑦ 862 90.4%

6. ① 610 64.4% ② 744 78.0%



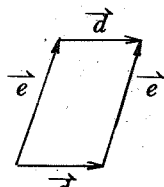
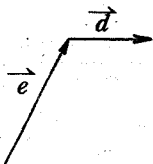
答對總數	⑥	408	⑤	226	④	97
		<u>42.76 %</u>		<u>23.7 %</u>		<u>10.2 %</u>
	③	36	②	17	①	38
		<u>3.8 %</u>		<u>1.8 %</u>		<u>3.98 %</u>

7.



③	771	④	929	⑤	789
	<u>80.8 %</u>		<u>97.4 %</u>		<u>82.7 %</u>

8.



①	534
	<u>56.0 %</u>

9.

①	$\vec{x} = \frac{668}{69.6 \%}$	②	$\vec{x} = \frac{578}{60.6 \%}$	③	$\vec{y} = \frac{782}{82.0 \%}$	④	$\vec{z} = \frac{510}{53.5 \%}$
---	---------------------------------	---	---------------------------------	---	---------------------------------	---	---------------------------------

10. ① $\vec{x} = \frac{806}{84.5\%}$ ② $\vec{y} = \frac{684}{71.7\%}$ ③ $\vec{y} = \frac{41}{4.3\%}$ ④ $\frac{521}{54.6\%}$
- ⑤ $\frac{578}{60.6\%}$ ⑥ $\vec{z} = \frac{406}{41.5\%}$
11. ① $\frac{722}{75.7\%}$ ② $\frac{722}{75.7\%}$ ③ $\frac{705}{73.8\%}$ ④ $\frac{651}{68.2\%}$
- ⑤ $\frac{527}{55.2\%}$ ⑥ $\frac{545}{57.1\%}$ ⑦ $\frac{638}{66.9\%}$
12. ① $\frac{833}{87.3\%}$ ② $\frac{739}{77.5\%}$ ③ $\frac{672}{70.4\%}$

現在從頭到尾把考卷看一次，檢查一下答案，試著把剛剛不會的問題做好。

◎ 詞語淺釋 ◎

亂 流

亂流在氣象學上是指大氣當中局部性的不穩定運動。又包括渦流及氣流的垂直運動。航空時碰到亂流便產生顛簸。重則因為相當高度的劇烈升降，足以導致失事的後果。

亂流可以分：

- 壞天氣的亂流

天氣惡劣時，鋒面帶、積雨雲、颱風環流及高層的氣旋等，都可能發生亂流。

- 晴空亂流

在非常高的空中，即使天氣晴朗，氣流若發生磨擦的現象，也可能發生亂流。

- 氣流受地形影響產生擾動，造成亂流。有很多發生在地面的山谷間。

今日氣象專家仍無法正確預測亂流的神出鬼沒。飛機起飛前，氣象專家會對駕駛員口頭講解航線上可能隱藏亂流的情況，至於晴空亂流，就不可預知了。

編輯室