一個確實收斂的問題

賴漢卿

國立清華大學數學系

在開始介紹“極限”及“收斂”的概念給學生的時候，數學的嚴謹性往往不容易在學生面前表現出來，因而常將它擱置，而用直觀方式逐漸灌輸，使學生體會其眞義。

高中學生往往在遇到有限的算術級數與幾何級數求和的公式後，轉而就特殊的無窮等比級數來求其和的公式。這在教科書中，以經驗式或機械式的試驗應用這些公式，但往往是缺乏眞正的了解。

一個小試驗，教師允許用計算器，或小型微電腦來研究無窮級數

$$S_1=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$$

其和在第 5，10 及 15 項後分别是 1.9375，1.9980…，及 1.999938…。

在時間允許之下研究此級數之無限多項和的公式，學生應該足夠能發現其極限是 2。那麼教師允許學生再試驗級數

$$S_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$$

問他們這個級數 S_2 估得比 S_1 大或小，進而做一評估的程式，引起討論級數 S_2 往往就導致無限與收斂。

教師在這方面的教學活動有許多形態，現在我們轉到另一個有趣之問題。

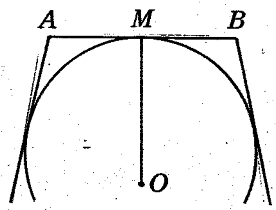
開始以 $x=1.1$， 用計算機算 x 的乘冪，你發現得什麼結果？又若 $x=1.01$ 或 $x=1.001$ 的情形又是如何？不管怎樣，總選一個 $x>1$，是快是慢經電腦總可算得其結果。學生發現如果以大於 1 之數，連續自乘，“即使他們是不同的數”，其積將愈趨於大的數，而至發散。一個有趣的問題，結合幾何學及計算，將很快的看到繼續乘以一個大於 1 之數，但不是自乘，而其結果是收斂的現象。

首先我們用一等邊三角形內接於一圓，以這個圓做爲正方形的內切圓，再作此正方形的外接圓，並令此外接圓做爲下一個正多邊形的內切圓，繼續這種步驟下去，你就發現這些圓的半徑隨著正多邊形之邊數的增加而增加。那麼你可以發現相繼兩圓之半徑一定有某種關係。若設開始外接於三角形之圓半徑爲 1，則正 n 邊形之

內切圓的半徑有多大呢？

不直接解這個問題，也許可讓學生容易地求出圓半徑 R_n 與 R_{n+1} 間之關係。

如圖 O 爲所有圓之圓心，$\overline{AB}$ 爲 $n+1$ 邊形之相鄰兩頂點，M 爲其一邊中點，則 $\overline{OM}$ 是正 n 邊形之外接圓半徑，同時也是



正 $n+1$ 邊形之內切圓半徑。令 R_n 爲正 n 邊形外接圓的半徑（$n\geqslant 3$），則 R_{n+1} 及 R_n 之關係可求之如下。

由圖形我們易得

$$R_n=\overline{OM}\ ,$$

$$R_{n+1}=\overline{OA}=\overline{OB}\ ,$$

$$\angle AOB=\frac{2\pi}{n+1},$$

$$\angle AOM=\frac{\pi}{n+1}\ \text{。}$$

因 $\triangle AOM$ 爲一直角三角形，故

$$\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)=\frac{R_n}{R_{n+1}}\ ,$$

即 $$R_{n+1}=R_n/\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\text{。}$$

首先設正三角形之內切圓半徑爲 R_2，外接圓半徑爲 R_3，則依上述（$n=2$）的結果爲

$$R_3=R_2/\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$R_4=R_3/\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=R_2/\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

....

一般 $$R_n=\frac{R_2}{\prod_{j=3}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{j}\right)}$$

今每一個 $$\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{j}\right)}>1\quad(j\geqslant 3)$$

繼續將 R_2 乘以比 1 大的數所得的無限積，是個有限的數，但該數是多少呢？似乎未有人眞正計算此近似值，此有限值可先計算下面之極限。

$$\alpha=\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{j=3}^{n}\cos\left(\frac{\pi}{j}\right)\right],$$

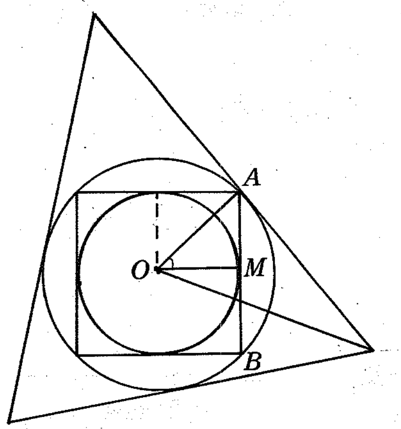
$$\lim_{n\to\infty}R_n=\frac{R_2}{\alpha}\text{。}$$

此數值不妨用電腦程式試求看看。

另外我們還可把上述的題目倒過來看。即：

在一正三角形之內切圓做一個內接正方形，再做正方形內切圓之內接正五邊形，依次繼續做下去…，這個問題可留給學生當做練習的課題，這些圓之半徑亦趨近於一個非 0 之有限值。

如設正 n 邊形之內切圓半徑爲 γ_n，則 γ_{n+1} 與 γ_n 之關係亦如圖可求得：



$\gamma_n = \overline{OA}$,

$\gamma_{n+1} = \overline{OM}$,

$\angle AOM = \dfrac{\pi}{n+1}$,

$\triangle AOM$ 爲直角三角形，

$$\gamma_{n+1} = \gamma_n \cos \frac{\pi}{n+1} \quad (n \geqq 3)$$

$$= \gamma_3 \prod_{j=4}^{n+1} \cos \frac{\pi}{j}$$

$$\beta = \lim_{n \to \infty} \prod_{j=4}^{n} \cos \frac{\pi}{j} ,$$

且 $$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma_3 \beta$$

β 之值可用電腦求其近似值。

⊙ 詞語淺釋 ⊙

核子燃料

核子動力衞星利用核子爲燃料，產生動力。

放射性元素「鈾」、從鈾轉變的「鈽」、可轉變成鈾的「釷」，都因爲能產生連鎖反應，而可做爲核子燃料。通常是將這些元素放在核反應器裏，用中子源撞擊，使元素的原子釋放出超過一個以上的中子，中子再去撞擊別的原子。在這不斷撞擊、釋放的連鎖反應過程中，核會分裂而產生極高的能量。

核子動力衞星便是透過工程設計，有效利用核分裂放出能量，做爲動力。

編 輯 室