規律的尋求(二)

黃敏晃

國立臺灣大學數學系

上次所談都是紅白磚塊數目的規律，這次我們換換胃口，只研究清一色的圖案中的規律。先由下列簡單的例子討論。

例 1 圖 1 是由許多小的正三角形堆砌出來的圖案，你知道怎樣堆嗎？如果你手頭沒有小的正三角形圖板，你會畫嗎？

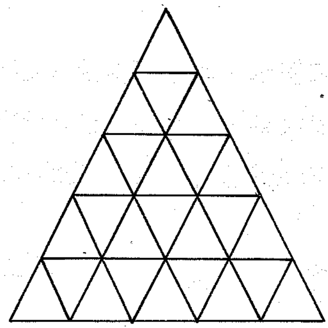


圖 1

如果你用小的正三角形圖板來堆砌，那麼，堆砌的步驟是如下的：每次都得要求有兩個小正三角形的兩邊對齊，圖案才能堆得好。（如圖 2）

如果你是用畫的，則要先畫個 60° 的角，在此角的兩邊上選定固定的長度（譬如說 1 cm），打上點後作聯線，聯線上也按上述的長度打上點，再作聯線，如下圖 3 所示：

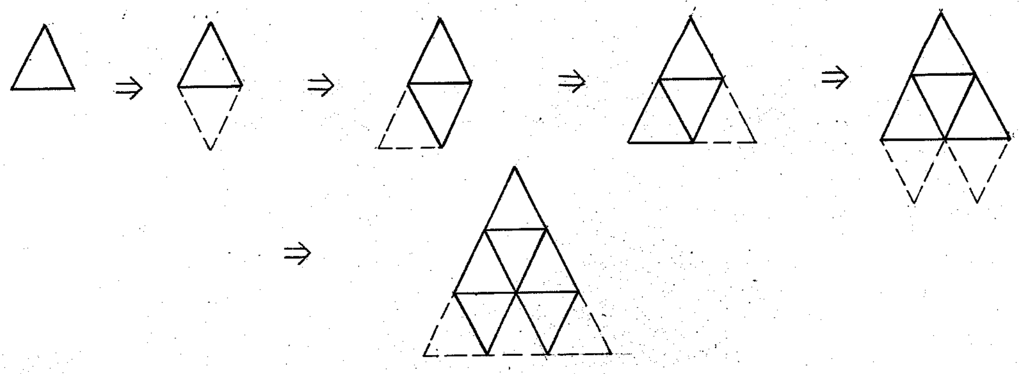


圖 2

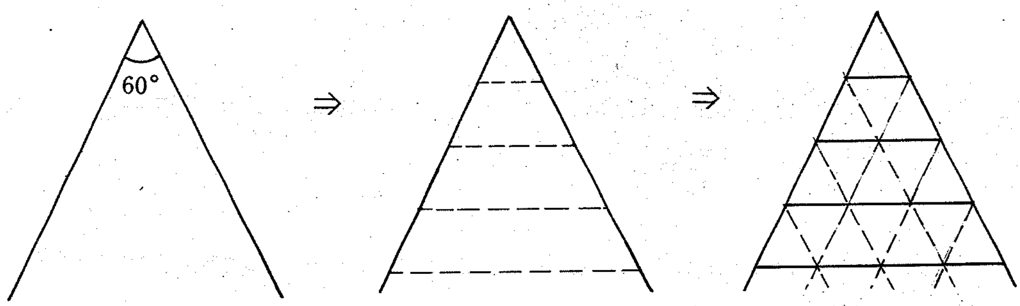


圖 3

我們的問題不是怎樣畫這個圖案，而是要算這個圖案中的三角形的個數。每一層有幾個？合起來又有幾個？我們要找到一些規律，使我們不用去實地堆砌、或畫出來，並不用一個個點算，就知道 100 層的圖案中，每一層的小三角形的個數，以及全部的三角形的個數。你能找出規律嗎？

首先我們把每一層的三角形數目記錄下來，放在一個表內，如下：

層數	三角形個數	
1	1	$1=2\times1-1$
2	3	$3=2\times2-1$
3	5	$5=2\times3-1$
4	7	$7=2\times4-1$
5 ⋮	9 ⋮	$9=2\times5-1$

列出來的各層的三角形數目都是 $2\times$(層數)-1 的型態，但是否在很多層時也這樣呢？如果在每一層的右邊加一個同大小的三角形，如圖 4 所示，就可以湊成由兩個三角形拼成的菱形，各層的菱形數目分別是 1，2，3，4，……，所以上述的規律是正確的。

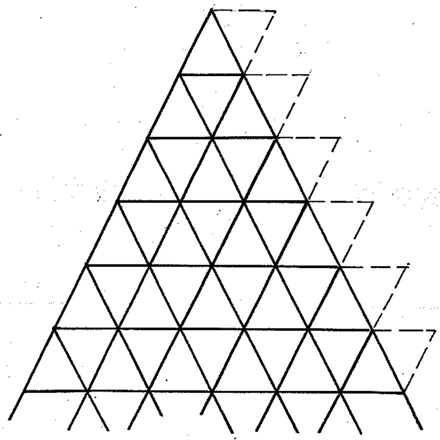


圖 4

由上述規律知道，當層數爲 100 時，該層的三角形個數爲 $2\times 100-1=199$。

那麼，由第 1 層到第 100 層，共有多少個小的正三角形呢？其數目 S 可以由下式表達。

$$S=1+3+5+\cdots\cdots+195+197+199$$

但 S 是多少，應該怎樣算？有同學提議把上面 S 中的各項倒寫，兩式相加如下：

$$\begin{array}{rl} S= & 1+3+5+\cdots\cdots+195+197+199 \\ +)\ S'= & 199+197+195+\cdots\cdots+5+3+1 \\ \hline 2S'= & \underbrace{200\times 200\times 200+\cdots\cdots+200+200+200}_{\text{共 100 項}} \end{array}$$

所以 $2S'=200\times 100$，或 $S=10000$。由上述的規律計算，利用一些計算技巧，就可以把三角形的數目算出來，而不用實際去動手堆砌或畫，以及點算了。

例 2　圖 5 是由 3 行 3 列共 9 個正方形湊成的正方形。小正方形的數目沒什麼好算，所以我們改變成計算各種大小的正方形的數目。你會算嗎？

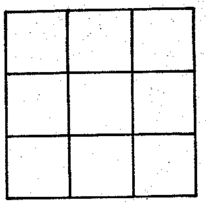


圖 5

首先注意到，上面圖案中的正方形，有下列三類大小，我們也許可以暫時稱之爲小的，中的和大的正方形。

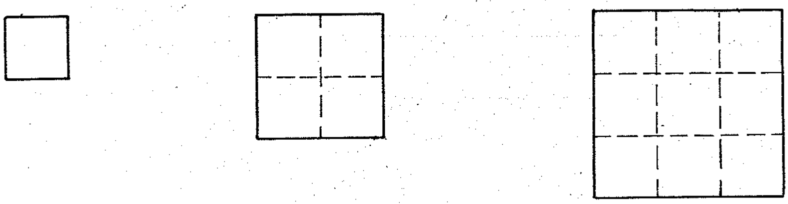


圖 6

當我們看中的正方形時，要忽視其中的線（如圖 6 中的虛線所示），而只看其外框，所以只要外框構成一個正方形就可以了。

現在讓我們來計算正方形的數目。小的正方形有 9 個，大的正方形只有 1 個，沒問題，大家都一目瞭然。中的正方形呢？好，有人說有 4 個，其他人呢？是 4 個嗎？請這位同學上臺指出來那 4 個。

由於用手指出來使別人看不淸楚，而且到底有沒有重覆算不很確定，所以我們要想出方法，淸楚的表達出來。數學裏要求，不但要自己淸楚，還要讓別人也淸楚。要想把正方形的數目淸楚地表達出來，最好是在圖形上做記號，如何做？又該做在那裏？

注意到每個正方形都有四個頂點，以其位置分爲左上、左下、右上與右下，而且某大小的正方形的其中一個頂點固定時，這個正方形就固定了。我們可以利用這個事實，固定其左上頂點來表達。例如，在右圖中打○的頂點，表示用斜線畫出的中正方形（圖 7）。

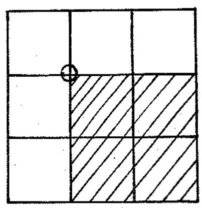


圖 7

這樣，圖 5 中的中正方形，就可以用圖 8 的 4 個小圓圈表示出來。每一個小圓圈代表那一個正方形，你知道嗎？這樣的表達方法是不是比用手指出來要淸楚得多呢？

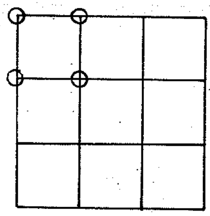
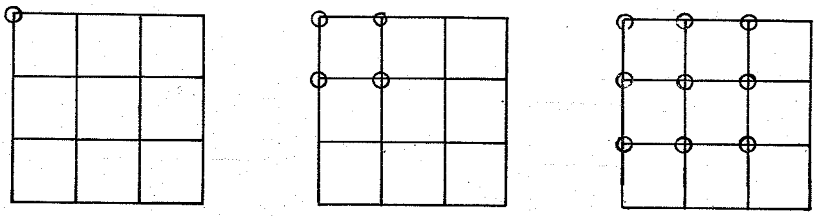


圖 8

利用上述的表達法，我們可以把圖 5 中各類正方形的數目分別表達在下面（圖 9）。



大正方形有 1 個　　中正方形有 4 個　　小正方形有 9 個

圖 9

所以，共有 1＋4＋9＝14 個正方形。

題目雖然已經做出來了，但我們想檢討一下分類的方法。在圖 5 中，我們把正方形分成大、中、小三類是不錯的，但是如果我們把圖形加大，變成 5 行 5 列共 25 個小正方形湊成的大正方形時，我們怎樣分類呢？有人說用最大、次大、中、次小、最小來分，這樣是不是可以？大家如果同意，我們當然可以這樣分類，但是如果要你們算的是 10 行 10 列的圖形，那又該如何分類？

由此可見，上述的分類方式不是最好的。最好的分類方式是用其邊長，分成邊長爲 1 個單位的、2 個單位的……等。如此，不管你把圖形變成多少行多少列，分類的方式都可以"以不變應萬變"，"處變不驚"了。好，下面請各位把 5 行 5 列小正方形組成的大正方形（如圖 10）中的各類正方形的數目，用圖形表達出來，再計算。

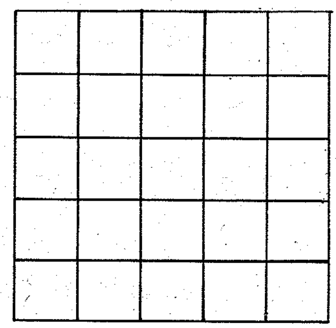
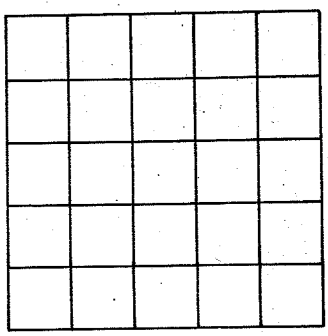


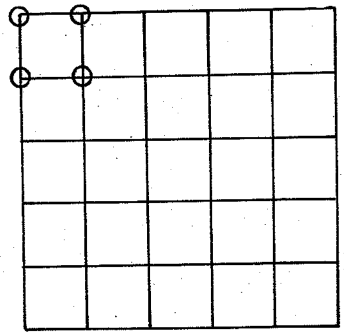
圖 10

怎樣分類？分成邊長爲 5，4，3，2，1 等五類正方形。怎樣表達？用小圓圈，記號做

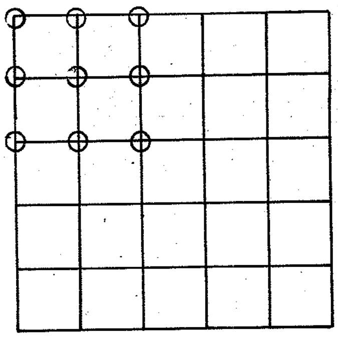
在那裏？左上角。放在同一個圖內嗎？不是，應該每類一個圖。表達出來的情形如圖11。



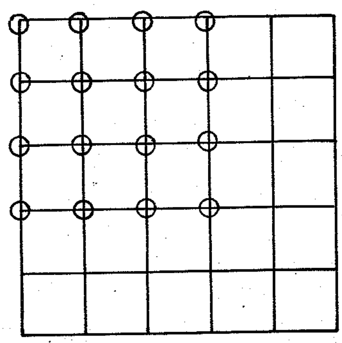
邊長5的正方形有1個



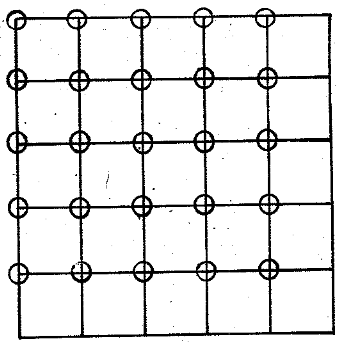
邊長4的正方形有4個



邊長3的正方形有9個



邊長2的正方形有16個



邊長1的正方形有25個

圖11

$1+4+9+16+25=55$，所以，圖10中的正方形個數為55。

如果我們想要計算的圖形是由20行20列個小正方形組成的大正方形，怎麼算？好，算法大家都知道，但覺得畫圖太煩，是不是？那就想想看，在我們上述圖形的計算中，有沒有規律可循？如果循這個規律計算，還需不需要畫圖？

很好，有人指出我們最後的計算式中的各項，都是平方數，而且都由1的平方一直加到列數的平方。這個規律對不對，我們是否可以從圖形中得到印證？

由於最大的正方形，邊長等於列數，也等於行數，所以只有 1 個；而邊長爲(列數)－1 的正方形，其左上角的位置，最下只能到第 2 列，最右能到第 2 行，所以有 4 個；……；如此往下推，就得到下列的計算式：設行數與列數都爲 n，則此大正方形中的正方形數目爲

$$S=1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2$$

這個 S 是多少呢？我們可以利用上次講過，而沒加以證明的等式來求和，得到

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

讓我們驗證一下，$n=3$ 時，S' 是不是 14 ？ $n=5$ 時，S 是不是 55 ？

$$\frac{3(3+1)(2\times3+1)}{6}=\frac{3\times4\times7}{6}=14$$

$$\frac{5(5+1)(2\times5+1)}{6}=\frac{5\times6\times11}{6}=55$$

如果 n 爲 20 ，那麼 S' 是多少呢？由下列計算知道

$$\frac{20(20+1)(2\times20+1)}{6}=\frac{20\times21\times41}{6}=2870$$

正方形的個數爲 2870 個。這樣，我們不用畫圖，就能計算出其個數了。

例 3　現在我們把圖形改成由 6 列 10 行共 60 個小正方形組成的大長方形，如圖 12 所示。要計算這個圖形中，共有幾個正方形，怎樣計算？

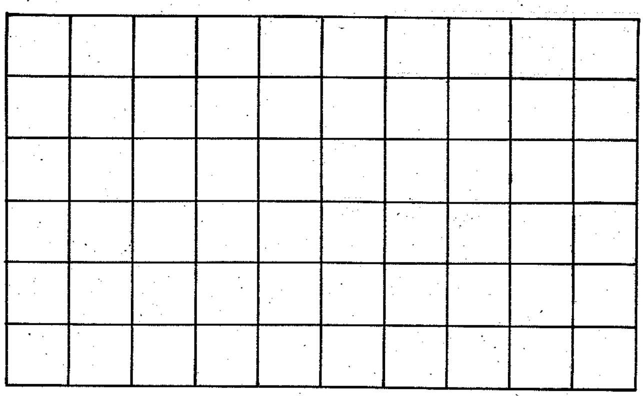


圖 12

由於這個圖形很大，雖然我們會分類，並把各類正方形用圖表達出來，然後再計算，但畫起圖來太煩太多。不如先把這個圖中的行數、列數都減少，做一個比較簡單的例子，再看看是否可找出計算的規律。下面，我們改做3列5行的情形（如圖13）。

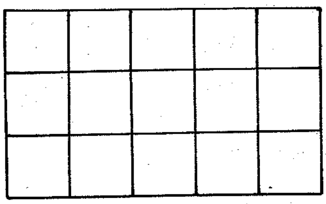
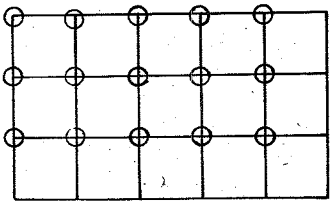


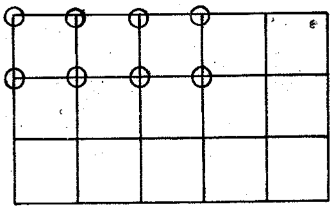
圖 13

這個圖形有幾類正方形？最大的正方形邊長爲多少？因爲只有3列，所以最大的正方形邊長爲3。有三類正方形：邊長爲3、爲2、爲1。

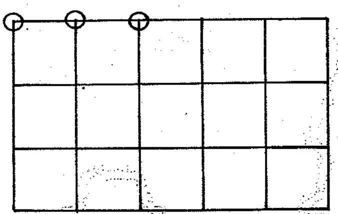
仿照上例的方式，把每類正方形的數目用一個圖表達，每一個正方形由它的左上角的小圓圈表示。我們得到下列的3個圖（圖14）。



邊長爲1的正方形數目爲
$5\times3=15$ 個



邊長爲2的正方形數目爲
$4\times2=(5-1)\times(3-1)$
$=8$ 個



邊長爲3的正方形數目爲
$3\times1=(5-2)\times(3-2)$
$=3$ 個

圖 14

所以，正方形的數目可以由下列式子計算出來：

$$5\times3+(5-1)(3-1)+(5-2)(3-2)$$
$$=15+8+3=26$$

這個計算式中有什麼規律？而這些規律是否又可以從圖上得到印證？

不難看到，這個算式中的第一項是邊長爲1的正方形數目，爲行數乘上列數；第二

項是邊長爲2的正方形數目，爲行數－1乘上列數－1；如此往下推，一直到行數或列數中的一個變成1爲止。

由此得到了一般的規律如下：如果行數爲n，而列數爲m，而$m \leqslant n$，則正方形的數目爲：

$$S = n \times m + (n-1)(m-1) + (n-2)(m-2) + \cdots\cdots + (n-m+1) \times 1$$

所以，當$n = 10$，$m = 6$時

$$\begin{aligned} S &= 10 \times 6 + (10-1)(6-1) + (10-2)(6-2) + (10-3)(6-3) \\ &\quad + (10-4)(6-4) + (10-5)(6-5) \\ &= 60 + 45 + 32 + 21 + 12 + 5 \\ &= 175 \end{aligned}$$

注意到，這裏得到的計算式，可以涵蓋例2中的計算式，即這裏如果是行數與列數一樣時，式子就變成例2中的計算式了。

例4　現在我們把一個長方形的圖中，挖一個洞，變成圖15的樣子。這個圖形中有多少正方形？怎樣計算？

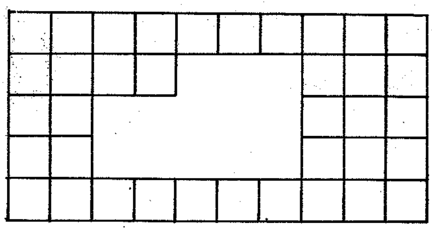
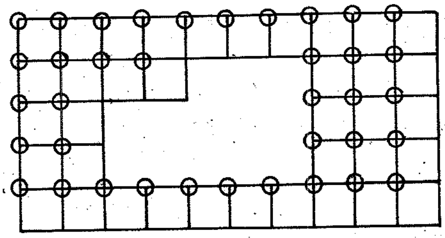


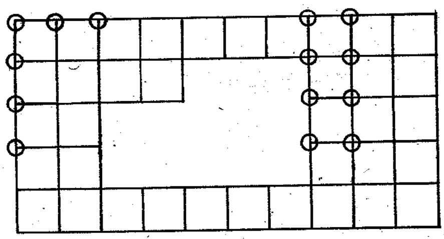
圖15

這樣的問題很難有明確的計算規律。這時，我們就應該回到最原始的方式上考慮：先分類、次表達，然後計算。

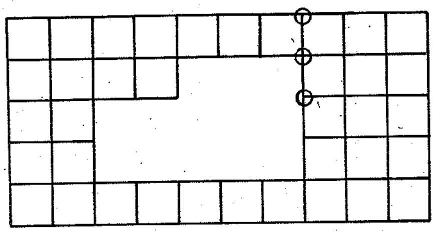
在這個圖形中，最大的正方形邊長是多少？爲3，所以有三類正方形。表達計算如下（圖16）。



邊長爲 1 的有 37 個



邊長爲 2 的有 14 個



邊長爲 3 的有 3 個

圖 16

所以，正方形的數目是 $37+14+3=54$ 個。

由這個例子，我們可以看到，越是規律性不明確的問題，越要用到原始的笨方法。可見原始的笨方法威力較大，也就是說，可用來解決的問題也較多。所以，我們學數學，不能只學巧妙的方法，比較原始的方法應該優先學到手，然後才去學比較巧妙的方法。

下面，我希望大家回到最開始的圖 1，利用我們剛才在幾個例子中學到的方法，計算圖 1 中有多少正三角形？注意到，我們要的是計算的規律，不只是計算的結果。

在這個問題中，另外需要注意的是，不能只算正立的三角形，還得計算倒立的三角形，如圖 17 所示：可以用小圓圈代表正立的三角形，而小正方框表示倒立的三角形。

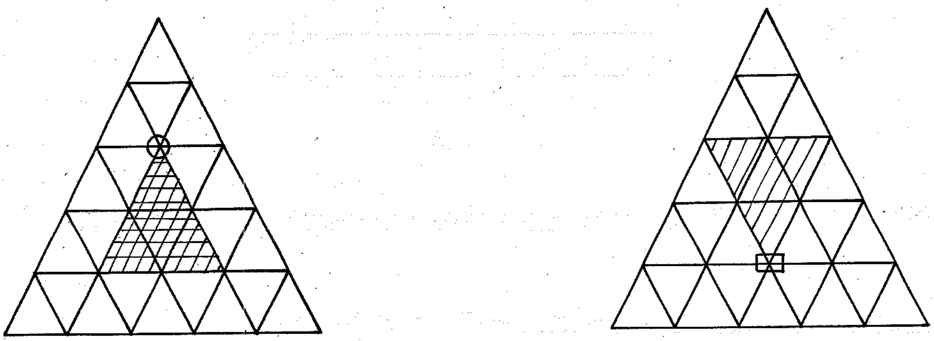


圖 17

下面還有一些圖形，要你們計算其中各有多少個正三角形(圖 18)？

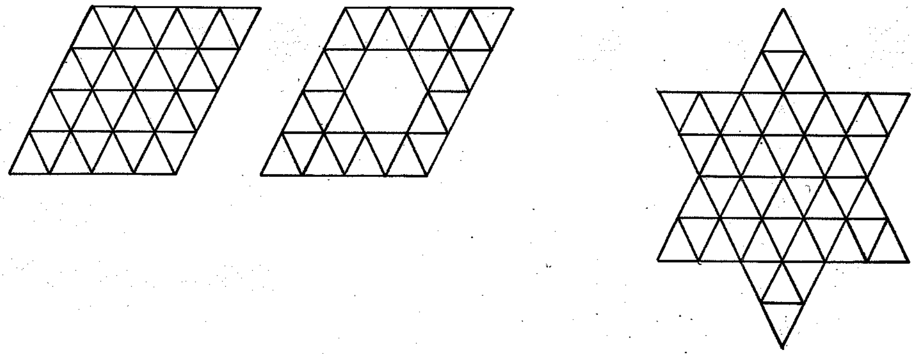


圖 18

⊙ 詞語淺釋 ⊙

碘—131

碘 - 131 是種具放射性的元素，131爲其原子量。不具放射性的碘，原子量爲127。

放射性碘過去常被用來作爲膽道攝影、肝臟或腎臟掃描時的標記物質。目前放射性碘只用在甲狀腺的檢查和治療上。

放射性碘的半衰期爲八天，在衰退過程會放出貝他和伽傌兩種射線。作爲檢查用途時，醫師是利用其放出的伽傌射線，但最近此項用途也漸減少，而以另一種「鎝 - 99m」取代。

放射性碘在人體甲狀腺內，會放出貝他射線，而將周圍的多餘甲狀腺細胞或癌細胞殺死。不過，醫師在使用此種物質治療疾病時，仍相當審愼。

編 輯 室