高中數學學習成就優異學生
——輔導活動與評量分析

指導教授：林福來　國立臺灣師範大學數學系
曹亮吉　國立臺灣大學數學系
執　　筆：阮貞德　本計畫專任助理

壹、輔導計畫簡介

這個輔導計畫，是從10月中旬正式展開，全名定爲「七十三學年度高中數學學習成就優異學生輔導實驗計畫」。

在9月23日甄試的400名學生中，原預定錄取30　名學生，但考慮若僅以一次測驗就武斷地評定學生數學能力的高低，實在有失公平，所以在教授的權衡之下決定加倍錄取，共62名（而在第一次上課時，就有不少旁聽的同學前來，持續有恆，堅持迄今，實在令人喜悅，所以實際上課人數一直維持在75人左右），全部學生分成六組，由六位教授輔導，每逢週六下午2：30～5：30　聚在臺大數學系裏，聆聽、習作、思考數學的多彩風貌。預定到本學期末，教授們再綜合測驗上課表現及口試等成績，評定30名學生爲正式的人選。

課程原則上是以加速學習的方式來進行，教材爲根據教育部七十二年七月公佈的課程標準，教育部高級中學課程改進計畫實驗小組所編印的基礎數學四册、統合數學二册、理科數學二册。預計這一學期裏上完高一課程，下一學期上完高二課程及統合數學，到了下一年度的上學期將學完微積分及線性代數課程，也就是在三學期裏加速完成高中三年的數學課程。

星期六的時間安排是：

2：30 ～ 3：30 分組	⇨	3：30 ～ 4：30 演講	⇨	4：30 ～ 5：30 分組

整學期的進度表包括課本進度及演講題目，列於附錄一給大家參考。

關於演講部分、講題及內容是配合課程進度而給定的，提供學生更深層及更廣面的數學知識，例如：11 月 10 日課程單元是多項式，配合的演講講題是「輾轉相除法」，介紹方法的歷史背景，由畢達哥拉斯學派的共度理論、衍生輾轉互度法原理談起，揭示了這一時期畢氏學派的燦爛歷史與學理研究上遭遇的難題，帶來的掙扎與突破。學生由演講中除了領略方法的運算，也面對了數學史的史觀層面有比較廣濶的認識。又如：11 月 24日課程單元是 n 次方程式，配合的演講講題是三次和四次方程式的公式解法，由學生熟悉的二次方程式的解法開始談起，再進一步介紹三次和四次方程式的公式解，使學生在方程式論方面有更進一步的知識，這樣的安排是希望演講在課程上有相輔相成的效益。

於實際參與旁聽觀察的課堂經驗裏，我們發現到學生的學習脚步異常快速，他們常常可以在彼此談數學、說數學、做數學中很自然地在深度及廣度上有所進步，以下便是上課的一段實況。

貳、輔導實況

一、日期：73 年 10 月 27 日

組別：第 3 組

課程單元：基礎數學第一冊

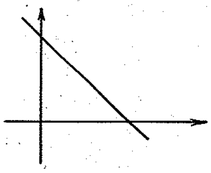
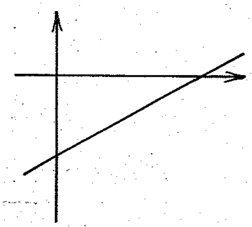
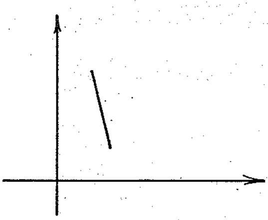
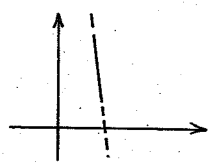
§3-1　直線坐標系　　§3-2　直線的斜率與方程式

§3-3　線型函數　　§3-4　二元一次不等式與線性規劃

預備知識：學生先預習完 §3-1，§3-2，§3-3，§3-4

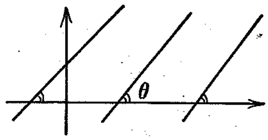
教學策略：學生預習→老師進行檢驗與增強重要概念

1. 教學活動

提出問題	學生活動	老師活動
活動1. 關於直線的斜率與方程式		
1. 直觀判斷，下面圖形的斜率？ 	學生：-1	
2. 再估計一下，下面圖形的斜率爲何？ 	學生甲：$+1$ 學生乙：$\frac{1}{2}$ 學生丙：$\frac{2}{3}$	T：爲什麼猜測是$\frac{2}{3}$
	學生丙： 因爲由圖形，可估計直線通過$(0,-2)$，$(3,0)$故可求出方程式是$2x-3y=0$，所以斜率是$\frac{2}{3}$	T：方程式對嗎？看一看圖形有沒有通過原點？請同學再修正
	學生丁：修正：$2x+3y=0$	T：再考慮一下傾斜方向及是否通過原點？
	學生戊：修正：$2x+3y=2$	T：x 軸與 y 軸的截距符合嗎？
	學生己：$y=\frac{2}{3}x-2$	T：答案正確！但表示法可以稍加修改成$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 的形態，如此，可以很容易的看出截距。
3. 下圖中直線的斜率爲何？ 	學生乙：-4	T：我們把線延長來看 
	學生丙：-7 學生己：負很多	T：只有這麼多嗎？ T：對，負很多。因爲我們直觀斜度，若只取中段來看，往往會估計誤差，一定要延長來看才會發現直線一下子上升的很快，超出了我們的估計。

4. 由斜率的定義，我們可以知道斜率＝tan θ 平行線之間，何以斜率會相等？

學生庚：（畫圖）



由圖形可以清楚的看出平行線間的同位角相等，故斜率＝tan θ 都會一樣。

T：正確

活動 2. 關於課本習題

1. 討論課本P.117 例題3，大家都已經預習過了，知道所提的問題及解法，除了課本所用的方法外，自己有沒有其他的想法或作法？

學生丙：

我們可以由長度的觀點來作：

若 $\overline{AB}=\overline{BC}+\overline{CA}$ 或

$\overline{BC}=\overline{CA}+\overline{AB}$ 或

$\overline{CA}=\overline{AB}+\overline{BC}$ 即得證了。

$\because A(a,b+c)$，$B(b,c+a)$，$C(c,a+b)$

可算出 $\overline{AB}=\sqrt{2}\,|a-b|$

$\overline{BC}=\sqrt{2}\,|b-c|$

$\overline{CA}=\sqrt{2}\,|c-a|$

再考慮 a,b,c 大小的各種情形（共六種）分別說明即可。

T：但要討論 a,b,c 大小變動的情況很煩複，這裏其實可以以一個步驟就說清楚：

$\because a,b,c$ 是直線上三相異點，a,b,c 必然有一點居中

故 $|a-b|$，$|b-c|$，$|c-a|$ 一定有一式爲其他二式之和。

2. 討論課本 P. 129 習題 3-2

① 第3題，題目中提到求重心、垂心及外心的坐標，我們對此引申一下：有沒有人知道，這三個心構成什麼特別關係？

學生庚：尤拉線

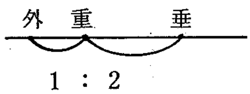
T：對了

② 若外心坐標 (a,b)，垂心 (c,d)，則重心坐標爲何？

學生庚：

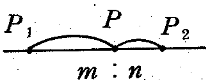
尤拉線的性質是：

外心到重心距離：重心到垂心距離＝1：2



所以根據分點公式：重心坐標是 $\left(\frac{2}{3}a+\frac{1}{3}c,\ \frac{2}{3}b+\frac{1}{3}d\right)$

T：所謂分點公式對一般的 $m:n$ 又如何？

③ 即 

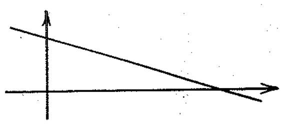
已知 P_1，P_2 坐標，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=m:n$，求$P$坐標。

學生庚：
根據公式：
$$P=\frac{nP_1+mP_2}{m+n}$$

T：公式非背才會記得嗎？要有些幾何感覺就不必用背的，你看看圖可知P比較靠近P_2所以$m>n$，如果P更靠近P_2，則n慢慢會消失
$$P=\frac{nP_1+mP_2}{m+n}$$
，P就與P_2幾乎重合，而公式的表達意義也就在此。

活動 3. 關於二元一次不等式

1. ① 不等式畫圖，如何判斷那一邊是所求的部分？



學生：代點進去驗算是否滿足題意。

T：通常代入那一個特殊點？

學生：(0,0)

T：很好

② 萬一通過 (0,0) 又如何？

學生：再找異於 (0,0)的另一點來代。

T：也可以由 x 的關係式來判斷左右方，或由 y 的關係式來判斷上下方。

2. $ax+by=c$在平面坐標上畫出來是一直線，大家都知道 $ax+by+cz=d$ 在空間坐標中畫出來是一平面，為什麼？

學生乙：因為三點決定一平面

T：可否再具體、實際一點？

學生辛：（國一旁聽學生）
由截距來看，設$d\neq 0$，
$(\frac{d}{a},0,0)$ $(0,\frac{d}{b},0)$
$(0,0,\frac{d}{c})$ 是不共線三點，所以決定出一平面來。

T：很好，這是由平面上的直線式推演到空間上的平面式的簡捷方法，不錯！另一觀點也可以這樣來看：

① $ax+by=c$ 式中有二個變數，我們選定其中一個變動時，另一個會隨之固定所以自由度＝1，圖形是一直線。

② $ax+by+cz=d$ 式中有 3 個變數，我們任意選定 2 個變動時，第 3 個會隨之固定，所以自由度＝2，圖形是一平面。

活動 4

3：30～4：30 聽完演講後，在第二次分組時間裏，請同學於 3 分鐘裏將上一小時的演講，做個歸納性的重點報告。

本次取材是 12 月 22 日的活動現場錄音記錄，演講內容“實數”列於附錄二。

T：依照慣例，我們請同學將剛才的演講在 3 分鐘裏作一個報告，我希望自願的上臺來！

學生A：今天演講就先介紹符號，第一部分是 e 的數學的啓示，再講 e 的定義 $(1+\frac{1}{n})^n$ 然後覺得這個不太好用，為了算出 e 所以找了另一個數列 $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$，這個數列是 t_n 數列，它的極限值可以代表 e 。然後就是 e 的應用，算蜘蛛網那些都可以算到 e 。

再來介紹 §2，π，π 的話先講 π 怎麼求然後好像用面積，π 牽涉到圓面積和圓周長，他這地方用圓面積來求，就是用內接多邊形來求，然後算圓面積，然後就算出一個公式來，後來又導出 $A_{2n}=\sqrt{\frac{n^2-n\sqrt{n^2-4A_n^2}}{2}}$ 用這個公式就可以只需知 A_n 就可求出 A_{2n} 及 A_{4n} …一直算上去，然後算出就可愈接近 π 。

還有另外一個公式是 $\pi=2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\cdots$ 開很多根號不好用，π 還有另外兩種型式，反正可以表示很多種。

然後就從 e 和 π 就可以算出實數的特性，實數的特性就是極限值啦！和極限值很有關係，那些都是上限、下限，還有一個是在中間，等等。就是這些。

T：講的馬馬虎虎，沒有把握重點所在，你只是重覆說老師講過什麼，而沒有掌握重點，重點所在就是老師為什麼要講 e、要講 π，說它的目的是什麼？

我們再找一位來補充，第二次講應該說的更好。

學生B：教授今天講 e 和 π 啊，這 e 和 π 二個都有個特點，我講一下，就是：它們都是無理數我們以前學過，無理數有好幾種，一個是開不盡的分數，一個是非循環無限小數。

這演講裏面有幾道底下畫線的地方，我想應該是蠻重

要的，這些是極限逼近的觀念，像：遞增有上界的數列一定有極限值，我想這地方是一個重點。

因爲以前我啊想過一個比喩：這逼近到底是什麼意思呢？極限值好像是如來佛的手掌心，那個數列是什麼呢？是孫悟空，我一直在想，這個比喩啊，我想這比喩很妙，孫悟空一個跟斗能翻十萬八千里，再怎麼翻都穿不過它，愈來愈靠近，那個五指山都看到了愈來愈靠近，就是穿不過，那我想極限的意義就是這樣，這是實數的一個特性，很重要。

今天，因爲他講的題目是實數，不是 e 和 π，拿這二個來當例子，應該是在講這個，e 和 π 剛剛都講了，e 有一個上界是3，那 π 剛剛有幾個公式，在講義第3頁裏那個公式：$\pi=2\cdot\frac{2\cdot4}{1\cdot3}\cdot\frac{4\cdot4}{3\cdot5}\cdots\cdot\frac{2m\cdot2m}{(2m-1)(2m+1)}$

可以這麼看成：$\pi=2\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{2\cdot4}{3\cdot3}\cdot\frac{4\cdot6}{5\cdot5}\cdot\cdots\cdots\cdot$

$\frac{2m\cdot(2m+2)}{(2m+1)(2m+1)}\cdots\cdots$，由此可知 $\pi<4$，4是 π 的一個上界，所以如來佛的掌心擋在那兒，這孫悟空再怎麼翻都翻不過它，而且數列一直都在遞增，它是可以一直往那邊逼，可是就不能超過它，這是實數的一個特性，我今天聽了是覺得今天是拿這個特性來貫穿實數的性質。

2. 教學活動分析：

我們一起來看看這一組教學過程中的一些情形：讀者很直接可以感受到教法很有啓發性與挑戰性，尤其強調對概念有“感覺”及隨時進行“估計”的想法，而避免囿於形式數學，也就是讓學生能開放心，放鬆腦來自由地感受數學的內涵，不受許多的數學符號、定義、定理縛手礙脚的拘束，而掌握數學精神與方法。這樣的學習，若融入平時的求學態度中，是絕對有益的。

另外，值得一談的是關於三分鐘整理報告的訓練，在學生聽完1小時內容豐富且頗具難度的演講後，要歸納重點的確不容易，一開始他們上臺的表現不太理想，往往紛雜冗長。三分鐘到時只順著演講者的話重述了一些皮毛，而抓不到要旨。這種訓練由自己上臺的經驗再觀察別人的表現及接受教授的指導，會有進步，事實也是如此，幾次的學習及改正下學生多半能抓住重點！

關於上述，黃文雄教授曾說過一些很中肯的話，在此節錄分享大家可使這個觀念有更深及具體的結論：「我常問同學：『你對已學過的數學，能否用幾句話道破？』我想一個人讀過一本數學書或修過一門數學課程，應有一種融會貫通的領悟，把整本書數十萬文字凝縮成幾句言語放在肚子裏，這幾句言語是前人經驗與智慧的結晶，一旦需要將這幾句話重新吐出來，便可長可短、可粗可細。對前輩用兩三句話，對同輩用數十句話，對初入門者又可化爲數十萬文字來解釋，一個學生學習時若抱持這種態度，自會脫胎換骨，去除許多煩惱」。

二、日期：73 年 12 月 15 日

組別：第 4 組

課程單元：12 月 1 日測驗題目討論第 6 題

題目：如果 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+x+1$ $(n\geqslant 3)$ 被 x^2-2x+1 整除，其商爲 $g(x)$

(1) 將 a，b 各寫成爲 n 的函數

(2) 把多項式 $g(x)$ 寫出來

(3) 求 $g(1)$ 的值

(4) 儘你的能力討論 $g(x)=0$ 的根

1. 教學活動：

Y 教授：第六題，你們回家有沒有好好再算一算？（有人搖頭，有人點頭）我們先找一個人到黑板作，好（指著一女生），請妳寫。

學生：

$$
\begin{array}{llll}
a+b+\cdots\cdots+1 & +\ 1 & & \underline{|\,1} \\
\quad a+(a+b)+\cdots+(a+b) & +\ (a+b+1) & & \\
\hline
a+(a+b)+(a+b)+\cdots+(a+b+1) & + & (a+b+2)=0 & \\
\quad a+(2a+b)+\cdots+(n-2)a+(n-3)b & & & \underline{|\,1} \\
\hline
a+(2a+b)+(3a+2b)+\cdots+ & (n-1)a+(n-2)b+1=0 & &
\end{array}
$$

Y 教授：在這兒我先說一件事，我希望你們注意箭頭所指的地方，把 $(a+b)$ 塡上去，不要……就帶過去。另外，如果把次數寫在係數的頂上對照，也比較淸楚是算到那一項。於是

$$
\begin{array}{llllll}
n-1 & n-2 & n-3\cdots\cdots\cdots\cdots & 1 & 0 & \\
\hline
a+ & (a+b) & +(a+b)+\cdots\cdots\cdots+ & (a+b) & +(a+b+1) & \underline{|1} \\
 & a & +[a+1\cdot(a+b)]+\cdots+ & [a+(n-3)(a+b)] & +[a+(n-2)(a+b)] & \\
\hline
\multicolumn{6}{l}{a+[a+1\cdot(a+b)]+[a+2\cdot(a+b)]+\cdots+[a+(n-2)(a+b)]+\underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{\underline{[a+(n-1)(a+b)+1]}}=na+(n-1)b+1}
\end{array}
$$

由另一觀點，我們會發現在第二次除以 $x-1$ 的綜合除法中，係數都是在加上 $(a+b)$, $a+1\cdot(a+b)$，$a+2\cdot(a+b)$，$a+3\cdot(a+b)$……所以可以推想到最後一項的結果是 $a+(n-1)(a+b)+1$，嗯？奇怪（伸手習慣性的摸摸自己的鬍子），怎麼和她的結果不一樣？希望不是我錯，不然不好意思，再檢驗一下，我果然是對的。

Y教授：對於這事，我也要提一下，初學的人一定要小心謹愼脚踏實地一步一步的算，我最生氣人家算錯了，因爲你有很多辦法，可使自己不作錯，在考試中如果是計算錯誤，是眞要命的。好，再找一位接下去作（指著另一位女生）。

學生：
$$
\begin{cases}
a+b+2=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\
na+(n-1)b+1=0 \quad \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

$$②-①\times(n-1) \qquad a=-2n-3$$

$$\therefore\ b=1+2n$$

Y教授：等一下，計算好像有錯，如果在計算中要用到心算，要作到自己程度的範圍裏，不要一下子步驟就跳得很快，不該錯的地方作錯了，是不可以原諒的。好，再修正一下。

學生：
$$
\begin{cases}
a+b+2=0 \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\
na+(n-1)b+1=0 \quad \cdots\cdots ②
\end{cases}
$$

$$①\times n \qquad na+nb+2n=0 \cdots\cdots ③$$

$$③-② \qquad b+2n-1=0 \qquad \therefore b=1-2n$$

$$代入① \qquad a+(1-2n)+1=0 \qquad \therefore a=2n-3$$

Y教授：這不就對了！整個求解的過程，我們也可由另一方法來看：第一次作綜合除法時，得到 $a+b+2=0 \Rightarrow a+b=-2$，在第二次作綜合除法時就可以代入變成：

$$
\begin{array}{lllllll}
n-1 & n-2 & n-3 & n-4 & & 1 & 0 \\
\hline
a & -2 & -2 & -2 & & -2 & -1 \quad \underline{|1} \\
 & +a & +(a-2) & +(a-4) & \cdots\cdots & +[a-(n-3)\cdot 2] & +(a-2n+4) \\
\hline
a & +(a-2) & +(a-4) & +(a-6) & & +(a-2n+4) & +\underline{a-2n+3} \\
 & & & & & & \quad \| \\
 & & & & & & \quad 0
\end{array}
$$

$$\therefore a=2n-3$$

於是 $g(x)=(2n-3)x^{n-2}+(2n-5)x^{n-3}+(2n-7)x^{n-4}+\cdots+5x^2+3x+1$ 就明顯可得！第(3)要求 $g(1)=(2n-3)+(2n-5)+\cdots+5+3+1=(n-1)^2$ 馬上就是結果。

Y教授：最後討論(4)是儘自己能力，能說多少就說多少！$\because n\geqslant 3$，所以我們代 n 從 3 代入看看：

$n=3 \quad g(x)=3x+1$

$n=4 \quad g(x)=5x^2+3x+1$

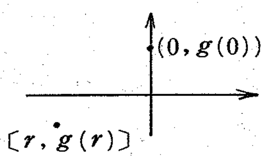
$n=5 \quad g(x)=7x^3+5x^2+3x+1$

可以知：(1)無正根，這是很明顯的，或許你會覺得沒什麼，不過也是一種討論，很重要的。

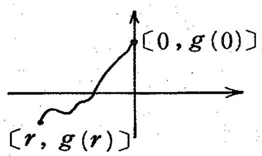
(2)若 n 爲奇數，一定有實根，爲什麼呢？我找一位男生說說看：

學生：因爲如果有虛根，一定是成對的，所以奇數次裏一定含有至少一實根。

Y教授：不好，不好！這是那兒學的？（學生答：課本第一册）眞的？（摸摸他的鬍子表示不相信）我覺得你講的或許沒錯，但我寧可由另一觀點來看，學 $g(x)=7x^3+5x^2+3x+1$ 爲例，$x=0$ 代入得 $g(0)>0$，若 x 代某個負數 r，負的夠大，則 $g(r)<0$ 是可能的，所以在坐標上標示出來：



由於連續必然



一定會與 x 軸有交點，如此可知有實根存在。

Y教授：那麼實根會在那裏呢？$\because g(0)=1>0$，$g(-1)<0$，顯然會在 $[-1,0]$ 中，能夠討論這些就不錯了，而且這些討論全在你們學過的程度範圍內，應該不是難事才對。總之，要記得你有很多方法可以推廣，而且不使自己錯誤，這件事一定要掌握好。

2. 教學活動分析：

事物的美醜或天候的冷暖感覺，因人而異各有不同的評價，所以聰明或不聰明及資優或非資優之間的憑斷是很難下定論的。小時了了，大未必佳的案例在今常有，所以這個輔導計畫的過程在培養學生讀書，作學問的態度中，除了啓發他們的特殊能力外，尤其強調踏實的習慣要先紮下深厚的根基，再循序漸進的茁長，而不冒然充塞模倣學習及走捷徑的技巧性解題方法。

在第4組的教學活動中，教授的態度明顯地要求學生，在解題過程中隨時檢驗自己的計算或想法，有沒有出錯，這是一個眞心求學的人平常就應該對自己的嚴謹態度。如此，除了特殊能力能夠啓發得以發揮外，一般能力也時時磨鍊，不使偏失。

而提供正確的環境刺激，是教師需要負責與努力的！

叁、期中測驗問題的設計目的與分析

12月1日下午2：30～5：30 舉行期中測驗，試題是由六位教授聯合命製的，我們根據這份考題的設計及學生表現，再配合相關學理作了一些分析。

首先把題目內容，抄錄如下：

（高中數學學習成就優異學生測驗試題）

1. 設數列$\langle a_n \rangle$的$a_1=3$，而$n \geqslant 2$時$a_n=3-\dfrac{2}{a_{n-1}}$

   ⑴ 找出a_n的公式，並證明之。

   ⑵ 設l爲a_n的極限值（即$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l$），則$n$多大時$|l-a_n|$會小於$4^{\frac{1}{100}}$？

2. 將過拋物線$y=ax^2+bx+c$上任一點(x_0, y_0)的直線方程式$y=m(x-x_0)+y_0$與拋物線的方程式聯立，找出重根發生時所對應的m值，就得過(x_0, y_0)的切線方程式。

   ⑴ 用這種方法求m值。

   ⑵ 若$a>0$，從圖形可知，切線恆在拋物線的下方，試用數學方法證明之。

3. 作圖表示下列聯立不等式的共解區域：

(1) $\begin{cases} x+y \geqslant 1 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y-x-2 \leqslant 0 \\ y \leqslant -\frac{1}{2}x^2+2x+2 \end{cases}$

(2) 讓 x, y 在上述區域中變動，分別求

$f(x,y)=y+2x+1$， $g(x,y)=y-2x+1$， $h(x,y)=y^2-x^2+2x-1$

的極大值與極小值。

4. (1) 已知 $p(x)=x^2-3x+4$， $q(x)=x^3-5$ 試求有理係數多項式 $f(x)$， $g(x)$ 使得 $f(x)\,p(x)+g(x)\,q(x)=1$。

(2) 設 $\alpha=\sqrt[3]{25}-3\sqrt[3]{5}+4$ 試求一個無理數 β，使得 $\alpha\beta$ 為有理數。

(3) 如果(2)中的 α 改成 $\alpha=\sqrt[5]{8}-2\sqrt[5]{2}+3$ 則如何求 β？更一般如何推廣？只要敍述你的意見不必計算。

5. (1) 在學習二次多項式時，你曾經將二次式施以各種代數變形，以解決各類的問題，請以 $5x^2-6x+1$ 為例，施以各種變形寫出變形的名稱，並說明變形後可以解決那一類的問題？

(2) 將二次式改為三次，請作答。

6. 如果 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+x+1\ (n\geqslant 3)$ 被 x^2-2x+1 整除，其商為 $g(x)$。

(1) 將 a, b 各寫成為 n 的函數。

(2) 把多項式 $g(x)$ 寫出來。

(3) 求 $g(1)$ 的值。

(4) 儘你的能力討論 $g(x)=0$ 的根。

數學能力的表現有很多重要的因子，向來的文獻有很多不同的因子分析，一般而言，近年來對這方面的研究方式，大致上是相同的，亦即：觀測者，首先對受測者作一系列綜合代數，幾何邏輯……等方面的測驗，再從彼此的相關性及統計方法上，作數學能力的因子分析。蘇俄有位數學教育家 V. A. Krutetskii [2] 花費十餘年時間研究學童數學能力的本質與結構，頗有創見，也率先在資優學童個案研究上有深入的觀測，我們根據他的學理，對這次的期中測驗作一些分析。

首先將 Krutetskii 的研究理論中的九種數學能力因子，說明如下，並盡可能舉本

次期中測驗的題目爲例，相互配合：

1. 形式化數學題材的能力：把具體的數據關係及空間形體適度的抽象，化爲數學形式並能以此種數學形式的結構來進行運算。

例：測驗中第1題(1)，找出 a_n 公式：學生必須由題意中 $a_n=3-\dfrac{2}{a_{n-1}}$ 列舉出 $a_1=3$，$a_2=2\dfrac{1}{3}$，$a_3=2\dfrac{1}{7}$，$a_4=2\dfrac{1}{15}$ ……由構成的數列中，找尋 a_n 的一般式來，這個表現就是形式化數學題材的能力。

2. 一般化及特殊化數學題材的能力，可以從題目中看出那些內容是重要的敍述，那些則是不必要的敍述；或者能從表面上不同類型的題目上，發現它們之間的相關性來。

例①：第4題(2)：$\alpha=\sqrt[3]{25}-3\sqrt[3]{5}+4$ 是原題中 $p(x)=x^2-3x+4$ 中，當 $x=\sqrt[3]{5}$ 的特例，只要觀察到這層關係而會將 $x=\sqrt[3]{5}$ 代入所求得的 $f(x)p(x)+g(x)q(x)=1$ 之中，由於 $q(\sqrt[3]{5})=0$ 所以可知 $f(\sqrt[3]{5})$ 即爲我們所求的一個 β，這就是特殊化數學題材能力的例子。

②：第4題(3)：由上面的計算過程中，$q(\sqrt[3]{5})=0$ 是解題的關鍵之一，由此感受在第(3)題 $\alpha=\sqrt[5]{8}-2\sqrt[5]{2}+3$ 是否可以推想設定 $p(x)=x^3-2x+3$ 及 $q(x)=x^5-2$？再重覆(1)(2)的過程來解題，然後對一般 α 的情形在於找出關鍵性的 $q(x)$ 使 $q(\alpha)=0$ 及設定多項式 $p(x)$。這一題由學生的敍述之解題過程上，我們可以明瞭他們的一般化數學能力。

③：第5題(2)：二次式的變形是要求學生綜合在初、高中學習以來的課程中所熟知的各項題材，例如有：方程式求解、不等式求解、配方求極大極小、平移求近似值……等。對於三次式，則是學生所不熟悉的題材，但他是否能根據二次式列出的變形推演到三次式來，這個表現即是一般化數學題材的能力。

3. 數字或文字符號的演算能力：包括數字或文字的加、減、乘、除、開方、對數、指數、三角運算……等。

例①：第2題(1)：題目已提示要聯立 $\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ y=m(x-x_0)+y_0 \end{cases}$ 再配合 $y_0=ax_0^2+bx_0+c$ 的條件求解 m，可利用代入消去法或加減消去法來作，其中的解題過程就是文字符號的演算。

②：第1題(2)：在前面(1)中已先找出了 $a_n=2+\dfrac{1}{2^n-1}$ ，進而可以推斷

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=l=2$ ，那麼 $|l-a_n|<\dfrac{1}{4^{100}}$ 解 n ，就可以由 $|2-(2+\dfrac{1}{2^n-1})$ $<\dfrac{1}{4^{100}}$ 這個不等式中找出來了，這是數字演算能力的例子。

③：第4題(1)：已知 $p(x)=x^2-3x+4$ ， $q(x)=x^3-5$ ，要求 $f(x)(x^2-3x+4)+g(x)(x^3-5)=1$ 的 $f(x)$ 及 $g(x)$ 是課本P. 219多項式的輾轉相除法中的題材，屬於文字演算能力的例子。

4. 漸進有序的邏輯思考能力：屬於有系統的公理化思考方法。這個情形通常表現在邏輯、證明、演繹及推論等方面的數學問題中。

例：第1題(1)在列出 $a_1=3$ ， $a_2=2\dfrac{1}{3}$ ， $a_3=2\dfrac{1}{7}$ ， $a_4=2\dfrac{1}{15}$ ……的數列中找出 a_n 的一般式 $a_n=2+\dfrac{1}{2^n-1}$ 以後，如何證明這個推論是對的？會不會知道要使用數學歸納法？證明的過程正確與否？由這個題目表現出來的就是漸進有序的邏輯思考能力。

5. 縮短及簡捷的推斷思考能力：在解題的思考過程及一系列種種的運算中，能夠明確的縮短過程，而尋求出“簡捷”、“漂亮”的解法。

例：（參閱Krutetskii [2], P. 146）：讓學生由： $15^2=$_____ $25^2=$_____ $35^2=$_____ $45^2=$_____ $55^2=$_____ $65^2=$_____ $75^2=$_____ $85^2=$_____ $95^2=$_____ 的一系列計算裏，找出簡捷的算法，根據他們在那一步中就找出來了，可以比較學生的簡捷推斷思考能力，並觀察他如何找出這個方法的思考過程。

6. 逆向思考能力：將求 $\sin^2 A+\cos^2 A$ 的值視為正向思考，那麼將1改寫為 $1=\sin^2 A+\cos^2 A$ 就是逆向思考。換句話說，習慣上接受的敘述視為正向思考，那麼考慮其逆敘述就是逆向思考。

例：第4題(3)對一般的 α ，如何設定原題中的 $p(x)$, $q(x)$ 及關鍵性 $q(\alpha)=0$ 的掌握，而逆向來設計題目的過程就是逆向思考能力。

7. 彈性思考能力：思考方法自由而靈活，解問題可以從一種方法的思考方式，迅速調整變換成另一種方法，而不受限於固定的思考模式及規則的約束，以尋求出多種解

法中最簡易、最經濟的作法來。這是創造性能力的重要特質之一。

例：第6題(1)：平時作多項式的除法時次數是固定的，而本題 $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+x+1$（$n\geqslant 3$）的次數 n 卻是不定數，學生必須藉助平時的數學記憶，靈活的運用在本題中，是從 $n=3$，$n=4$，$n=5$，$n=6$……代入的情況找出 a，b，n 的關係，或者直接經由綜合除法（或長除法）找出 a，b，n 的關係，或者嘗試自己熟知的其他方法來解題？其作題中的表現就是彈性思考的能力。

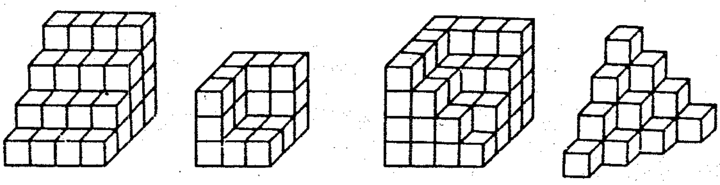
8. 數學記憶能力：對於已學過的課程、運算的記憶、及解過題目後對其一般性邏輯思考方式，以及數學形式上，特殊化種種留存在腦筋裏，能記住的東西。一般來說，數學能力好的人記憶內容有意義，數學能力不好的人記憶瑣碎較無意義。

例：第5題(1)：二次式 $5x^2-6x+1$ 的變形有 $(5x-1)(x-1)$，$5(x-\frac{3}{5})^2-\frac{4}{5}$，$5(x-1)^2+4(x-1)$，$x(5x-6)+1$……等，各運用在解方程式、不等式；求極大、極小；平移求近似值、及適於電腦計算……等方面，都需由學生初、高中以來學習過的題材加以歸納，其中所倚藉的能力是數學記憶。

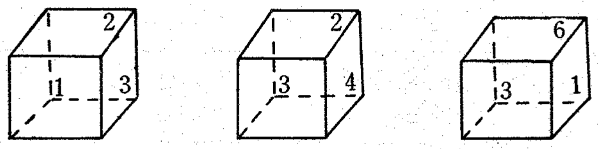
（另外，在比較高層次的變形裏可代入 $x=\frac{x'}{\sqrt{5}}$ 將原式正規化為 $x'^2-\frac{6}{\sqrt{5}}x'+1$，因為學生經驗中沒有學習過，所以沒列入評分）。

9. 空間概念：包括二維平面及三維空間上的幾何概念：學生在解幾何問題的過程中，不藉助實際的模型，而能在腦中存在一個可運思，“看的見”的架構模型，其移動、旋轉全靠心智的活動。我們由其思慮的難易程度可瞭解其空間概念能力的強弱。

例①：（參閱Krutetskii[2]，P.171）：計算下列方塊的個數。

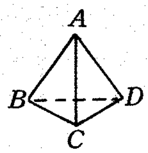


②：（參閱Krutetskii [2]，P.172）：正方體的六面分別編號為1，2，3，4，5，6試根據下列三圖的提示，將編號完成（(2)(3)兩圖，是由(1)圖旋轉後得到的）。



(1)　(2)　(3)

③：（73年9月23日甄選時的問題）：正四面體$ABCD$



內部有二點P, Q，試證明：$\angle PAQ < 60°$。

解決這個問題，要能想像P, Q點在四面體內部的位置，$\angle PAQ$ 由小往大張、合的情形，如何與已知確定的條件作比較？在腦中循思過程是屬於空間概念。

另外，林福來教授（參閱[1]）提出的數學能力因子——流暢思考，我們將其編列爲10。

10. 流暢思考：對問題的探求，思路流利能有多種方法；對事件的看法有多方面、多角度的觀測，且能做合理的應用及評鑑，這也是創造性能力的重要特質之一。

例：第2題(2)：聯立了$\begin{cases} y = m(x - x_0) + y_0 \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}$ 再配合$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$的條件求出$m = 2ax_0 + b$，現在爲了比較切線$y = m(x - x_0) + y_0$與拋物線$y = ax^2 + bx + c$的高低，在坐標上比較左、右方是由x軸的坐標來判斷，比較上、下方則由y軸坐標來看，所以我們只要比較$m(x - x_0) + y_0$與$ax^2 + bx + c$的大小即可。由計算$(ax^2 + bx + c) - [(2ax_0 + b)(x - x_0) + y_0] = a(x - x_0)^2$。我們已知$a > 0$，$\therefore a(x - x_0)^2 \geqslant 0$得證切線恆在拋物線的下方。

處理這個問題，是由幾何圖形轉換爲代數方法的運算及討論，需要比較廣的角度來觀測，此即流暢思考的能力。

由以上的說明，對數學能力因子有個瞭解後，我們將學生學完高中第一册基礎數學的評量題目，解題時涉及的數學能力歸納成一個表：

題　次	題　目　類　型	數學能力因子
1	(1)代數 (2)代數	1，4 3
2	(1)代數 (2)代數，幾何	3，8，2 10
3	(1)坐標幾何 (2)代數，坐標幾何	2 8，10
4	(1)代數 (2)代數 (3)代數，邏輯	3 1，2 6，2
5	(1)代數 (2)代數	8 2
6	(1)代數 (2)代數 (3)代數 (4)代數	7，3 3 3 10

以上這十種數學能力裏，還可以將它們分為學校數學能力及創造性能力，除了彈性思考能力與流暢思考能力外，都可說是屬於由學校的學習中可以發展的數學能力。根據測驗的內容分析顯示它兼顧了學習成就與創造力的檢驗。例如：第 4 題，在評量過程中，學生可以「做中學」，從解題、思考的程序中觸類旁通，而有新的嘗試達到一面考試，一面也帶動學習的脚步往前邁進。老師們再經由其敘述的內容與想法，可觀察出學生的學習狀況。

這次參加期中測試的學生共 75 人，我們由每個人每題作答的情形，分析各人的能力因子，列出一表於附錄三。

我們抽取二位同學為例，說明如下：

學生 總分	1	2	3	4	6	7	8	10
1-1 (93)	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
1-1′(59)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{2}$

① 1-1 代表第 1 組第 1 位學生，1-1′ 代表第 1 組第 1 位旁聽的學生，本次考試 1-1 同學得 93 分（滿分是 120 分），1-1′ 同學則得 59 分。

② 各項數學能力下標示的分數是什麼意義？

此分數表示出每個同學在每項相關的題目作答中，作對題目的個數與全部所作題目的個數，二者之間的相對關係。像：第 1 項能力裏，1-1 同學相關於此能力的 2 個部分全部作了，且作對了 1.5 部分，而 1-1′ 同學也 2 部分全作，而作對了 1 部分。在第 2 項能力相關的問題中，1-1 同學 5 部分全部作了，且作對了 3 部分，而 1-1′ 同學只作了 3 部分而作對了 1.5 部分，其餘各項能力的情況，可依此類推。

③ 分母的差異：

理想中若每個同學每個問題全部都作答的話，則分母都應該相等，但由於題組間的影響或時間控制的關係，有的同學在某些部分留下空白。這沒做的意義很難確定，有可能是會，但沒有作到，所以我們在分析時不併入分母而造成分母的差異。

根據列於附錄三的總表，我們可以得到一些想法：

一、各項數學能力的表現差異如何？

由於分子代表作對的個數，而分母代表作題總數，所以各項能力的 $\dfrac{\text{全體分子的總和}}{\text{全體分母的總和}}$ 可以概略的代表出各項能力的表現程度高低，我們得到：

比值 \ 數學能力	1	2	3	4	6	7	8	10
$\dfrac{\text{全體分子總和}}{\text{全體分母總和}}$	$\dfrac{71}{131}=0.542$	$\dfrac{134.5}{279}=0.482$	$\dfrac{191.5}{321}=0.596$	$\dfrac{36.5}{67}=0.545$	$\dfrac{15.5}{41}=0.378$	$\dfrac{30}{60}=0.500$	$\dfrac{136.5}{199}=0.686$	$\dfrac{44.5}{161}=0.276$

可以發現：

$$0.686 > 0.596 > 0.545 > 0.542 > 0.5 > 0.482 > 0.378 > 0.276$$

即：數學記憶能力＞數學演算能力＞邏輯思考能力＞形式化數學能力＞彈性思考＞一般化、特殊化能力＞反向思考能力＞流暢思考能力。（此處“＞”表示“優於”）

由此顯示學生對已學過的概念在記憶及演算上較強，而反向思考及流暢思考方面則弱。

由於分母、分子不大，可信度不是明確的可確定，再綜合多次的測驗分析的資料，統計出來較大樣本的分子與分母的情況下，正確度及參考性必然更高。

二、個人資料的顯示：

可由所示的分數裏看出：

① 分母大分子也大的顯示學生在此項能力表現優良。

② 分母大、分子小的顯示學生在此項能力表現不怎麼好，但嘗試作題的勇氣則強。

③ 分母小（分子一定也小）的顯示學生在此項能力的表現上不易判別。

（但由於考試時間 3 小時，作六個問題是相當充裕的，所以留空白者大致可視爲不會做）。

三、能夠依分數的高低，就評定數學能力的強弱嗎？

我們比較分數同爲 75 分的 2-3，2-6 兩位學生，在第 3 項數學演算能力上，2-3 比 2-6 強很多，而在第一項形式化數學能力，第 2 項一般化、特殊化能力及第 10 項流暢性思考方面，2-6 又優於 2-3。所以推測 2-3 同學在基本數學能力上較強，而 2-6 同學在創造性能力上較強。

再比較分數同爲 68 分的 4-10，5-7 兩位學生，4-10 在第 2 項一般化、特殊化能力及第 6 項反向思考能力上優於 5-7，而 5-7 在第 4 項邏輯性思考及第 10 項流暢思考能力上優於 4-10，所以推測 4-10 同學數學能力偏向代數，5-7 同學數學能力偏向幾何。

由此顯示分數相同的人，能力偏向可能不同，只根據分數高低來判斷數學能力好壞及潛力強弱，不是絕對公平的。

四、上課反應與成績表現：

1-2，2-7 同學上課參與感很好，常常能與老師一問一答，屬於反應快速的型態，3-7 同學上課中靜默，沒有特殊表現。我們比較測驗的分數個別是 72，56，70，再比較各項能力上，2-7 同學在第 3 項演算能力上明顯的不夠好，而 3-7 同學則相當好，可知 3-7 比 2-7 細心、熟慮的多。這是說課堂上的反應與成績的表現並非正相關。

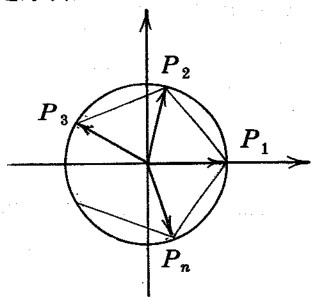
五、數學能力均優學生的個案：

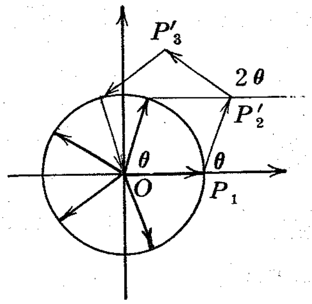
數學能力很強的，例如：1-1，2-1，2-2，3-1 同學他們的表現如下表所示：

學生＼總分	1	2	3	4	6	7	8	10
1-1	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
2-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$
2-2	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
3-1	$\frac{2}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$

這四位同學各項能力的表現都很優異、均衡，觀察上課的表現：常能提出獨特的想法，尤其對老師所提示的問題能做迅速敏捷的反應，或完整的補充別的同學所敍述的想法：舉實例來說，討論問題：設O爲正n邊形$P_1P_2\cdots P_n$的對稱中心，試證：$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}=0$。

經由短暫的循思及討論，2-1同學提出他的想法：把正n邊形在單位圓上畫出，對稱中心可說就是原點。





再將$\overrightarrow{OP_1}$，$\overrightarrow{OP_2}$，$\overrightarrow{OP_3}\cdots\cdots\overrightarrow{OP_n}$這些向量移出來，使相繼的向量首尾相合，則會形成另一個正n邊形，其中終點P_n與起點O會重合是以得知，其和向量$\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+\cdots+\overrightarrow{OP_n}=\overrightarrow{0}$。明顯可知2-1同學的空間概念能力很強，但其他能力也都均衡。

肆、綜合討論

一、引申前面一節的第四觀點，1-2，2-7是屬於快速型的，而3-7屬於深思熟慮型，

美國伊利諾大學的Mcknight（參閱林福來[1]，P.13）曾將資優學生分成三種類

型：①快速型（quick）；②深思熟慮型（thorough）；③聰敏型（bright）。由綜合上課的反應、表現及測驗中的思考、敍述，可將各人的類型區分出來，作爲分班因才施教的取向依據，這是評量小組要建立的記錄。

二、本次測驗男生平均55.75分，女生平均40.41分，性別差異顯著，又建中學生的平均是73，可能與其所安排的合班上課有關。

三、第一次入學測驗與本次期中測驗的成績，相關係數是0.53，不很高，一般來說若由一、二次測驗的結果，來決定資優與否，除了特優或極差的容易鑑定出來外，大部分是不易評鑑準確，所以入學時加倍錄取人數，經由學習資料等再淘汰的理由就在於此；例如：2-1′是旁聽生入學測驗71分，沒有達到錄取的最低標準84分，自願前來旁聽此次期中測驗80分，卻達到高分之列！

四、Krutetskii 將數學資優學生類型分成：解析型、幾何型、調和偏解析型及調和偏幾何型四類，由於評量只有一份考題，而且並沒有針對這種需要來設計題目，要將學生歸出類型並不容易，但大致可以感覺出來像：4-10，3-6 是調和偏解析型的，而5-7，3-7是調和偏幾何型的。

五、目前還進行的有：①關於解題的錯誤模式（error model）；②自然思考方法；③利用廻歸分析各項能力的關係等，都是我們希望討論與研究的項目。

參考資料

[1] 林福來（1982），On programs for the mathematically gifted. Univ. of Cambridge.

[2] V. A. Krutetskii（1955），The psychology of mathematical abilities in schoolchildren. Univ. of Chicago.

附錄一 輔導進度表

日　期	課　程　單　元	演　　講		演講者
10月20日（星期六）	I. 3-1　平面坐標系 3-2　直線的斜率與方程式	質　數　問　題	（加廣）	朱建正

10 月 27 日	3-3 線型函數 3-4 二元一次聯立不等式與線性規畫	數學歸納法	(加深)	繆龍驥
11 月 3 日	4-1 二次函數及其圖形 4-2 二次函數的最大値和最小値	同　餘	(加廣)	黃漢水
11 月 10 日	4-3 二次不等式 5-1 多項式 5-2 多項式的運算	輾轉相除法	(加深 加廣)	楊維哲
11 月 17 日	5-3 餘式定理 5-4 最高公因式與最低公倍式	牛頓綜合除法及有理根	(加廣)	李白飛
11 月 24 日	5-5 多項函數 5-6 n 次方程式 5-7 找根	三次和四次方程式的解法	(加廣)	黃漢水
12 月 1 日	II. 1-1 指數 1-2 指數函數及其圖形 1-3 對數及其運算	(測驗)		
12 月 8 日	1-4 對數函數及其圖形 1-5 對數表 (附) 計算尺原理	對數表、對數坐標紙及計算尺	(加廣)	楊維哲
12 月 15 日	2-1 銳角的三角函數 2-2 簡易測量和三角函數値表 2-3 基本恆等式	e 的數學	(加廣)	曹亮吉
12 月 22 日	2-4 廣義角的三角函數 2-5 正弦定理與餘弦定理	實　數	(加廣)	曹亮吉
12 月 29 日	2-6 三角測量 3-1 弧度 3-2 三角函數及其圖形	實　數	(加廣)	曹亮吉
1 月 5 日	3-3 和角公式 3-4 倍角、半角公式 3-5 和與積互化公式	數值解方程式	(加深)	朱建正
1 月 12 日	3-6 正餘弦函數的疊合 3-7 棣美弗定理	三角學發展史	(加廣)	謝南瑞
1 月 19 日	4-1 向量 4-2 向量的加法與減法 4-3 向量的係數積	向量幾何	(加廣)	賴東昇
1 月 26 日	4-4 向量的內積 4-5 直線	(測驗)		
2月3,4日	口　試			

附錄二　實　　數

何謂實數？實數除了常見的整數、有理數（分數）外，還有無理數。無理數比較不常見，所以顯得陌生；要了解實數，當然就得對其中的無理數加以瞭解。

§1　e 的數學啓示

上次我們說過數列＜ s_n ＞，$s_n=(1+\frac{1}{n})^n$，隨著 n 而增大，但卻不能超過某個界限 m，譬如 $m=3$，因此從幾何的觀點來說 s_n 是有極限的，而此極限就是 e。

一般而言，遞增有上界的數列一定有極限值，這是實數的一個特性，如果只限於有理數，則一個遞增有上界的數列不一定要有有理數做爲極限值，譬如上述的 s_n 就是一個例子。

數列＜ s_n ＞以實數 e 爲極限值，反過來 e 的性質也可以從數列 s_n 的變化反映出來，譬如爲求得 e 的頭幾位小數，我們可以計算 s_n 的值。

上次我們又說過 e 可以用下面的無窮級數來表示：

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots\cdots$$

其實這等於說，如果令

$$t_n=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}$$

則數列＜ t_n ＞也是以 e 的極限值：$\lim\limits_{n\to\infty} t_n=e$

如果不管 e 與 t_n 的關係只看＜ t_n ＞這個數列，則因它是遞增有上界的（上界仍然可以取做 3 ），所以根據實數的特性，它要有極限值（這個極限值剛好是數列 s_n 的極限值 e ）。

我們也說過：怎樣利用數列＜ t_n ＞求出 $e=2.718281828459045235 36\cdots\cdots$ 這是 e 的無窮小數表示法，它告訴我們 e 的大小；其實無窮小數表示法也可以看成是一個遞增有上界，數列＜ u_n ＞的極限值：令

$$u_1=2.7,\quad u_2=2.71,\quad u_3=2.718,\ \cdots\cdots u_n=e \text{ 的 } n \text{ 位小數}$$

除了無窮數列、無窮級數、無窮小數，外要了解 e，我們還從利息、人口、衰變、正

規分佈曲線、懸垂線等，與 e 有關的現象下手。

§2 π

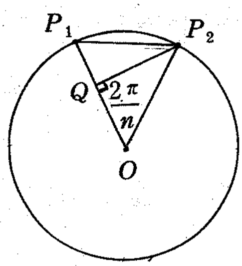
下面，我們也想從種種的觀點來了解另一個實數，它就是圓周率 π。

從幾何觀點來說，π 就是半徑爲 1 的圓（稱爲單位圓）的面積，或其圓周長之半。

令 A_n = 單位圓內接正 n 邊形的面積

顯然，A_n 隨著 n 而增大，而且 $A_n < 4$（= 單位圓外切正四邊形面積），所以 $\langle A_n \rangle$ 是個遞增有上界的數列，而其極限值爲 π，因此，要了解 π 可以從 A_n 著手，譬如說計算 A_n 之值可求得 π 的小數表示。

如圖，設 P_1P_2 爲單位圓內接正 n 邊形的一邊 $P_2Q \perp P_1O$。



則 $\quad A_n = n \cdot \frac{1}{2} \cdot P_2Q \cdot P_1O = \frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}$

因此

$$\frac{A_{2n}}{A_n} = \frac{\frac{2n}{2} \sin \frac{2\pi}{2n}}{\frac{n}{2} \sin \frac{2\pi}{n}} = \frac{\frac{2n}{2} \sin \frac{2\pi}{2n}}{\frac{2n}{2} \sin \frac{2\pi}{2n} \cos \frac{2\pi}{2n}} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}}$$

用半角公式可得

$$\cos \frac{\pi}{n} = \sqrt{\frac{1+\cos \frac{2\pi}{n}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\sin^2 \frac{2\pi}{n}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-\frac{4A_n^2}{n^2}}}{2}}$$

因此

$$\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{4A_n^2}{n^2}}}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{4A_n^2}{n^2}}}}{\frac{2}{n}A_n} = \frac{\sqrt{n^2-n\sqrt{n^2-4A_n^2}}}{\sqrt{2}\,A_n}$$

由此可得

$$A_{2n}=\frac{A_n}{\cos\frac{\pi}{n}}=\sqrt{\frac{n^2-n\sqrt{n^2-4A_n^2}}{2}}$$

由此遞迴公式可知，只要 A_n 值已知，A_{2n} 值就可求得，再代入公式又得 A_{4n} ……，以這些作爲 π 的近似值，如此就可得愈來愈準確的 π 值。

習題： * 由 $A_4=2$ 出發，利用遞迴公式算到 A_{256}（用計算器）

* 求以 A_n 表 A_{n+1} 的遞迴公式
* 設 S_n 表單位圓內接正 n 邊形的一邊長，求以 S_n 表 S_{2n} 的遞迴公式。說明如何用這樣的公式求 π 的小數表示。

我們再來看 π 的另一種表示法：

令 $$B_1=A_4 \qquad B_m=\frac{A_{2^{m+1}}}{A_{2^m}} \quad (m\geqslant 2)$$

則 $$C_m=B_1B_2\cdots B_m=A_4\cdot\frac{A_8}{A_4}\cdot\frac{A_{16}}{A_8}\cdots\frac{A_{2^{m+1}}}{A_{2^m}}=A_{2^{m+1}}$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}C_m=\lim_{m\to\infty}A_{2^{m+1}}=\pi$$

亦即 π 也可以由無窮乘積來表示：

$$\pi=B_1B_2\cdots B_m\cdots \quad 而\ B_m=\frac{A_{2^{m+1}}}{A_{2^m}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2^m}}$$

因此 $$\pi=2\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\pi}{16}}\cdot\cdots\cdot$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}\cdots\cdots$$（一再使用半角公式）

π 雖然可以用這樣的無窮乘積表示，但是若用它來計算 π 值，卻也相當不方便，其實 π 也可以用其他比較簡潔的的無窮乘積來表示，譬如（需要用微積分證明）：

$$\pi=2\cdot\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\cdots\cdot\frac{2m\cdot 2m}{(2m-1)(2m+1)}\cdots\cdots$$

習題：＊如果你好奇，而且有時間，請用上式用計算器計算到$m=100$試試。

除了無窮數列、無窮乘積外，π也可以用無窮級數來表示。

譬如 $$\pi=4\left[1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots\cdots\right]$$

$$\pi=4\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{1}{239}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{4}{5^3}-\frac{1}{239^3}\right)+\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5^5}-\frac{1}{239^5}\right)-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5^7}-\frac{1}{239^7}\right)+\cdots\cdots\right]$$

§3 實數的特性

無論我們用的是那一類無窮的方法來處理實數，我們遇到的是極限的問題。爲此我們舉出實數的一個特性：遞增有上界的數列一定有極限值。我們說過，把一級數的n項和當作一數列的第n項，則級數有時候也可以看成是一遞增有上界的數列，因此有一定的極限值。此外，無窮小數的表示法也可以看成是一遞增有上界的數列，而其極限值就是該無窮小數。

當然，許多數列、級數之有極限值，不一定直接可用實數的這一特性來處理。如何間接用這一特性來處理，成爲進一步了解這些無窮方法與實數關連的關鍵。

以 $\pi=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4}{2n-1}+\cdots\cdots$ 爲例，它的n項和

$S_n=4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{3}{7}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{4}{2n-1}$ 所成的數列$\langle S_n\rangle$顯然不是遞增的。

所以不能直接說它有極限值，但是我們注意到

$$S_2<S_4<S_6<\cdots\cdots<S_{2m}<\cdots\cdots<S_{2m-1}<\cdots\cdots<S_5<S_3<S_1$$

所以$<S_{2m}>$這個數列是遞增有上界（譬如S_1）的，所以有極限值S；而$<S_{2m-1}>$，這是遞減有下界（譬如S_2）的數列，所以一樣會有極限值S'。而我們有如下的關係：

$$S_{2m} < S \qquad S' < S_{2m-1}$$

但是$S_{2m-1} - S_{2m} = \dfrac{4}{4m-1}$ 會隨著m增大而趨近於 0，亦即 S_{2m} 與 S_{2m-1} 兩者愈靠愈近，而S與S' 總是夾在其間，所以非相等不可。因此$< S_n >$，亦即級數

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1}\frac{4}{2n-1} + \cdots\cdots$$

會有極限值（而此極限值可以證明就是π）。

從上面的說明，我們可以歸納出如下的結果：

定理：如果$a_n \geqslant 0$，而且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，則$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} a_n + \cdots$ 有極限值。

如§2 中的最後一個例子就是。

此外，$1 - \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{5^3} - \dfrac{1}{7^3} + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2n-1)^3} + \cdots\cdots$也是一個例子。

習題：＊用計算器將上式算到$n = 15$，然後將所得的值乘以 32 後開 3 次方。由此結果猜猜看原來級數的極限值是什麼？

§4 代數數多項式方程式的根

在課本第一册第五章，我們知道一個多項式方程式的實根，可以一再用勘根法而求得其近似值。其實這種方法也是利用§3 的原理來求極限值的：我們用勘根的辦法確定實根r介於a_1, b_1之間：$a_1 < r < b_1$；然後再用勘根法，把範圍縮小找到a_2, b_2滿足：$a_1 \leqslant a_2 < r < b_2 \leqslant b_1$，依此類推

得 $$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots\cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots\cdots < r < \cdots\cdots < b_n \leqslant \cdots\cdots \leqslant b_3 \leqslant b_2 \leqslant b_1$$

因為$< a_n >$是遞增有上界的，$< b_n >$是遞減有下界的，所以各有極限值，因此只要$b_n - a_n$隨n增大而趨近於 0，那麼這兩個極限值因其夾在a_n與b_n之間，所以必須相等，而其值就是所要的實根r，課本中的所謂二分逼近法，就是

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) = \cdots\cdots = \frac{1}{2^m}(b_1 - a_1)$$

因此
$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$$

滿足有理係數多項式方程式的複數稱爲代數數。這一類的數非常多，常見的如 $\sqrt{d}$，$\sqrt[n]{d}$；更一般的由整數經加減乘除開方後所得的數也都是，這一類代數數我們稱爲根號數。

習題： ＊ $1+\sqrt[3]{4+\sqrt{\frac{2}{5}}}$ 要滿足怎樣的有理係數多項式？

當然，代數數還不只這些，譬如 $x^5-x+1=0$ 的根，就不是這一類的代數數。

習題： ＊證明 $x^5-x+1=0$ 只有一個實根，並求此根到小數第一位。

§5　超越數

不是代數數的實數統稱爲超越數，像 π，e 都是，也就是說它們都不會是一個有理係數多項式的根。通常，要證明一個數爲超越數是很困難的，像 π，e 就是。所以我們在這裏也只能多舉幾個例，而無法做進一步的說明。

例1　設 a_m 都是介在0與9之間的整數，則 $\frac{a_1}{10^{1!}}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\cdots\cdots+\frac{a_m}{10^{m!}}+\cdots\cdots$ 是個超越數。

例2　設 a 爲一代數數，而 $a\neq 0,1$，b 爲代數數而不爲有理數，則 a^b 必爲超越數。

例3　在上例中 $a=2$，$b=\sqrt{2}$，則 $2^{\sqrt{2}}$ 爲超越數。

例4　$\log_{10}3$ 爲超越數。

證明　設 $b=\log_{10}3$，則 $10^b=3$。

根據例2，若 b 不是超越數，則 b 必爲有理數，設 $b=\frac{n}{m}$，則 $10^n=3^m$，但根據分解因數唯一定理，這是不可能的，所以 $b=\log_{10}3$ 爲超越數。

習題： ＊證明若 c 爲正整數，但不是10的正整數次方，則 $\log_{10}c$ 爲超越數。

§6　實數的整體觀

從上面的討論中，我們大致已經可以看出來實數全體是怎麼個樣子。

就幾何觀點而言，實數可以和一直線上的點一一對應起來。

就包含觀點而言，我們有如下的關係。

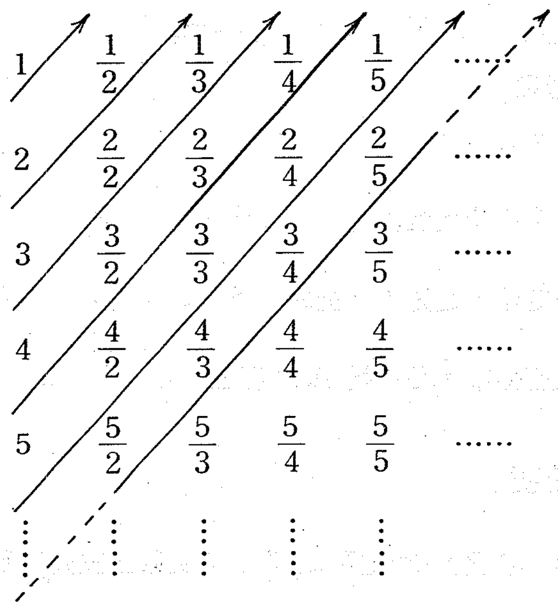
實數 < 超越數
　　　(實)代數數——根號數——有理數——整數

註：代數數也可以是複數，譬如 i 。

就表達的觀點而言，我們可以用無窮數列、無窮級數、無窮乘積、無窮小數來表示一個實數，而且從統一的外觀來說，任一個實數都有一個無窮小數的表示法。

就處理的觀點而言，我們不要忘了實數的特性：遞增(或減)有上(或下)界的數列，必有極限值。

現在，我們由個數的觀點來看實數，實數的個數是無限多，但是無窮元素的集合，亦可以分出大小。例如 $A=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$， $B=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$，$A$與$B$那一個集合個數多？這有兩個答案，有人說因爲$B\subset A$ ，所以A的個數多；也有人說A與B之間有一對一的關係，所以一樣多。這二種說法都對，祇看你如何規定，在集合論中規定：集合C與集合D的個數相等，是說C與D的元素可以一一對應。在此觀點下，正偶數與正整數的個數一樣多，而C的個數比D多，就是說C中有子集合C'與D個數相等，但C與D的個數不相等。那麼實數與有理數的個數又如何呢？我們說“實數的個數比有理數多”。首先，我們說有理數與整數一樣多(也與代數數一樣多)。也就是說有理數可排列，亦即可說那一個有理數是第一個，那一個有理數是第二個……，對正有理數一般用下述排法：



按著箭頭所指的方向，重覆出現的不再排，則可將正有理數完全排列起來。現在我們證明“實數比有理數多”，若實數可排列，則0與1之間的實數亦可排列，將其排列如下：

$$\begin{array}{llllll} x_1 = 0. & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots\cdots \\ x_2 = 0. & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots\cdots \\ x_3 = 0. & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots\cdots \\ x_4 = 0. & a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \cdots\cdots \\ \vdots & & \vdots & & & \end{array}$$

今造一實數 $x=0.\ b_1 b_2 b_3 \cdots$，使得 $b_n \neq a_{nn}$ 對所有 n 都成立，則 $x \neq x_n$ 。所以知實數可排列的假設是錯的，故實數比有理數多。再問實數比有理數多多少呢？由測度（ measure ）的觀點來看，如果把 $[0,1]$ 上的有理數排起來，記成 $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$，將第 n 個有理數用長度 $\frac{1}{2^{m+n}}$ 的線段蓋住，則全部有理數被長度小於等於 $\frac{1}{2^m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}$ 的線段蓋住，再令 $m\to\infty$ 則可知有理數的測度為 0 ，另一方面 $[0,1]$ 的測度為 1 ，所以可知有理數在實數中是少之又少。

這個結果的主要意義是說：實數（也就是說超越數）的個數要比代數數（它和有理數一樣多）多得太多。如果對實數的了解僅止於代數數，那麼看到的只是全豹的一斑。

附錄三

學生 總分	1	2	3	4	6	7	8	10
1-1 (93)	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
1-2 (72)	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{2.5}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$
1-3 (81)	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$
1-4 (75)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{4.5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2}{3}$
1-5 (80)	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0.5}{3}$

學生 總分	1	2	3	4	6	7	8	10
1-6 (42)	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{2}$
1-7 (18)	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{2}$
1-8 (40)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0.5}{2}$
1-9 (31)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{2}$
1-10 (12)	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{3}$
1-11 (57)	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{1}$
1-1′ (59)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{2}$
1-2′ (36)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$
1-3′ (36)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{2}$
1-4′ (31)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1.5}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0.5}{2}$
2-1 (89)	$\frac{1}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$
2-2 (102)	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
2-3 (75)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1.5}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{3}$
2-4 (51)	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{3.5}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0.5}{1}$
2-5 (21)	$\frac{0}{2}$	$\frac{0.5}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$
2-6 (75)	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0.5}{2}$
2-7 (56)	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$
2-8 (43)	$\frac{0}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
2-9 (63)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1.5}{4}$	$\frac{3.5}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
2-10 (60)	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{1}$
2-1′ (80)	$\frac{2}{2}$	$\frac{2.5}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2.5}{3}$
2-2′ (43)	$\frac{0}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2.5}{4}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{1}$
2-3′ (35)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
3-1 (100)	$\frac{2}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{3}$

學生 總分	1	2	3	4	6	7	8	10
3-2 (59)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$
3-3 (76)	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{2}{2}$
3-4 (67)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2.5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
3-5 (22)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{1}{3}$
3-6 (71)	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4.5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0.5}{3}$
3-7 (70)	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1.5}{3}$
3-8 (51)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{2}$
3-9 (48)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{2}$
3-10 (42)	$\frac{0}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{3}$
3-1′ (48)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
3-2′ (46)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
3-3′ (22)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0.5}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
3-4′ (21)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{1}$
3-5′ (10)	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{3}$
4-1 (81)	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1.5}{2}$
4-2 (49)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{2}$
4-3 (85)	$\frac{2}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1}{2}$
4-4 (31)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$
4-5 (16)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$
4-6 (41)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2.5}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{1}$
4-7 (83)	$\frac{2}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{5.5}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$
4-8 (34)	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{1}$
4-9 (28)	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
4-10 (68)	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{3}$

學生 總分	1	2	3	4	6	7	8	10
4-1′ (35)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1.5}{5}$	$\frac{1.5}{5}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$
5-1 (82)	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$
5-2 (35)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0.5}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{1}$
5-3 (17)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
5-4 (53)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$
5-5 (44)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2.5}{6}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{3}$
5-6 (52)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2.5}{3}$	$\frac{1}{2}$
5-7 (68)	$\frac{2}{2}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{4.5}{5}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$
5-8 (43)	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{2}$
5-9 (25)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1.5}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{2}$
5-1′ (45)	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{0.5}{1}$
5-2′ (37)	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{2.5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0.5}{1}$	$\frac{0.5}{2}$	$\frac{0}{2}$
5-3′ (29)	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$
6-1 (34)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$
6-2 (55)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2.5}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{2}$
6-3 (33)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1.5}{3}$	$\frac{0.5}{3}$
6-4 (66)	$\frac{2}{2}$	$\frac{2.5}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{2}$
6-5 (73)	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{3}$
6-6 (46)	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{4.5}{6}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{0.5}{3}$	$\frac{0}{2}$
6-7 (89)	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{2}$
6-8 (37)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{1}$
6-9 (23)	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{1.5}{2}$	$\frac{0}{3}$