# 規 律 的 尋 求 (一)

黃敏晃

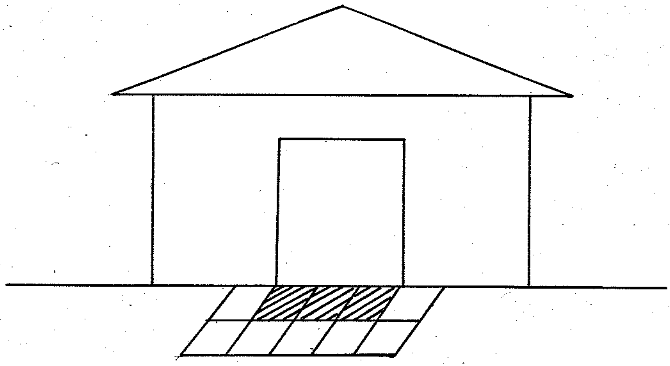
國立臺灣大學數學系

數學所追求的目標之一，與其他自然科學一樣，是想在千變萬化的事物中，找出一些規律，使我們能探討事物變化的一些模式，進而預測將來的變化。當然，各門學科所研究的素材不同，研究的方式與方向就很不一樣了。例如：

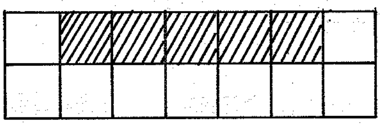
1. 化學討論的素材是物質的化學變化的現象（如鐵在空氣中會氧化而生銹），所以研究的方向是：在那些條件下，那些物質會起什麼化學變化，並且探討爲什麼會這樣變化的原因。
2. 物理討論的素材是物品的物理變化的現象（如水的結冰），所以研究的方向是：在那些條件下，那些物質會起些怎樣的物理變化，並且追究其原因。
3. 數學討論的素材是數量與圖形，研究那些數量與圖形，在什麼條件下，會產生怎樣的關係。

由此看來，各學科所討論的對象（即素材）也許不同，但追求的目標則是一致的，即變化的規律。下面，我們先以簡單的例子來說明，在數學中我們如何尋找規律。

**例 1** 某泥水匠在一所房子的門口鋪設地磚時，習慣先鋪一列紅磚，然後在外面圍以白磚，如下圖所示（圖中帶斜線者表示紅磚）

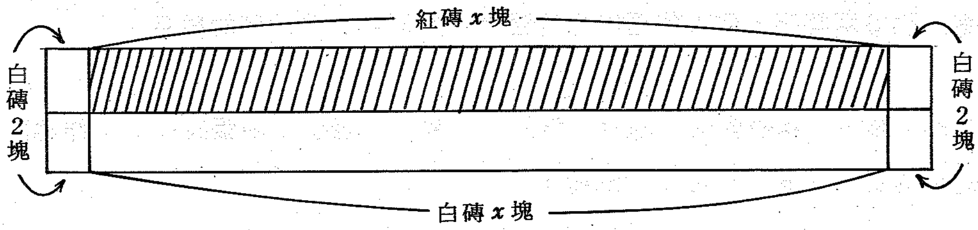


在上圖中，紅磚3塊，白磚7塊，共10塊。如果地磚較窄，或舖地磚的地方增長，則使用的磚塊就會增加，但此泥水匠舖地磚的習慣保持一定，則他舖出來的地磚圖案，總是一致的。下圖是他所舖的另一處地磚的圖案，用了五塊紅的9塊白的共14塊地磚。



如果紅磚的數目任意增加，我們如何算出白磚數目，與總共用去的磚塊數目呢？譬如說，假設他用了200塊紅磚，那麼他要用多少白磚？共用多少磚塊？

如果數目不是很大時，每個人都會把圖畫出來加以點算。但200太大，畫圖很費事。即使要畫圖，也只能畫如下的示意圖：



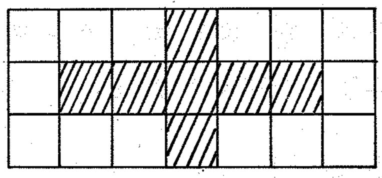

由上面的示意圖可以看出，只要他在上列舖了 $x$ 塊紅磚，則在下列也要用 $x$ 塊白磚，另外邊上還得加上4塊白磚。所以，如果他用了 $x$ 塊紅磚，$y$ 塊白磚，則 $x$ 與 $y$ 這兩個數量之間，就有下列的關係（註1）：

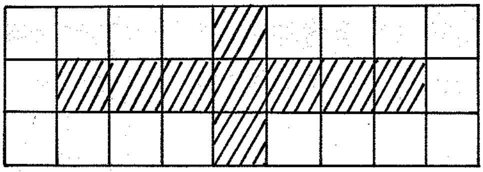
$$y = x + 4$$

由這個關係式，我們並不用把具體的圖畫出來，就可以算出：當 $x = 200$時，$y = 204$，共用了 $x + y = 200 + 204 = 404$ 塊地磚。

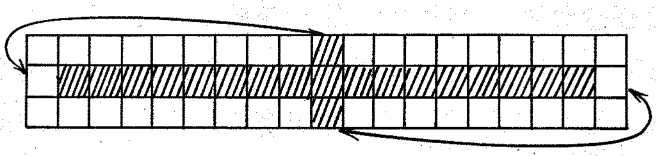
**例2** 這裡舉另一泥水匠所舖設的地磚圖案作為討論的對象，他舖設的地磚圖案都帶著紅十字，如下：

註1 這是和平國中一年級數學資優班的補充教材。由於現行國一上學期數學教材，還未用 $x$、$y$ 等代表數量列式，所以在課堂裏列出關係式時，都用△、□等符號代替。





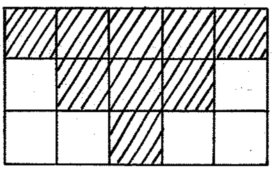
這種圖案的規律是怎樣的呢？由下圖的分析不難看到：設用了 $x$ 塊紅磚，$y$ 塊白磚，則 $x$ 與 $y$ 的關係是 $y=2x$，共用了 $x+y=x+2x=3x$ 塊地磚。



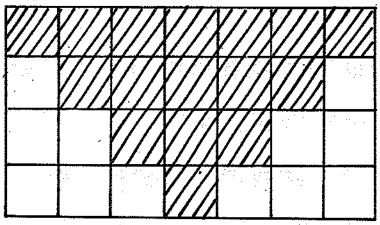
現在假定你自己是一個有固定習慣的泥水匠，只用紅、白磚塊，設計一個長方形的地磚圖案。請畫兩個圖，使人能看出你的習慣。然後再計算地磚的數目。

**例 3**　在和平國中一年級資優班學生的作品中，筆者當場選了兩張設計圖，作爲計算磚塊數目規律的實例。其中一份設計圖如下：

(1)

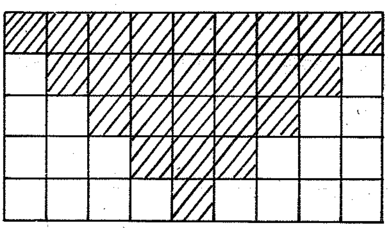


(2)

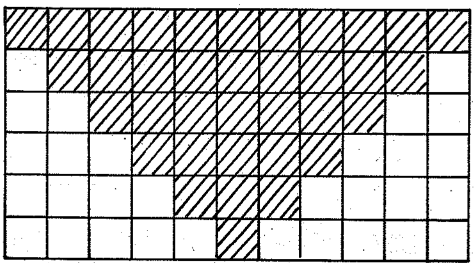


由於設計圖案的同學找不出計算磚塊的規律，所以改由全班一起討論。爲了便於尋

(3)



(4)



把列數 $x$ 當作新的自變數，則紅白磚塊的數目與總磚塊數，都可以表達成 $x$ 的單純式子

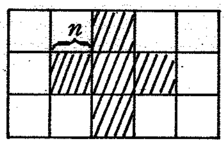
紅磚＝（列數）$^2$ ＝ $x^2$

白磚＝（列數）（列數－1）＝ $x^2-x$

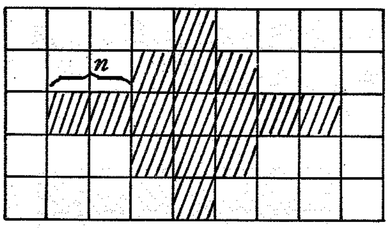
總數＝ $2x^2-x$

由這個規律，若我們知道了一圖案的列數，則紅磚數、白磚數，及地磚總數，都立刻可以算出。

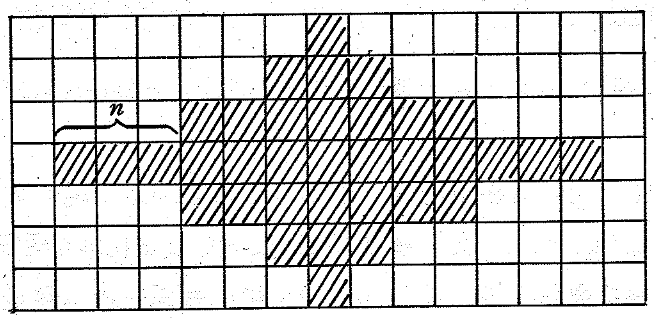
(1)



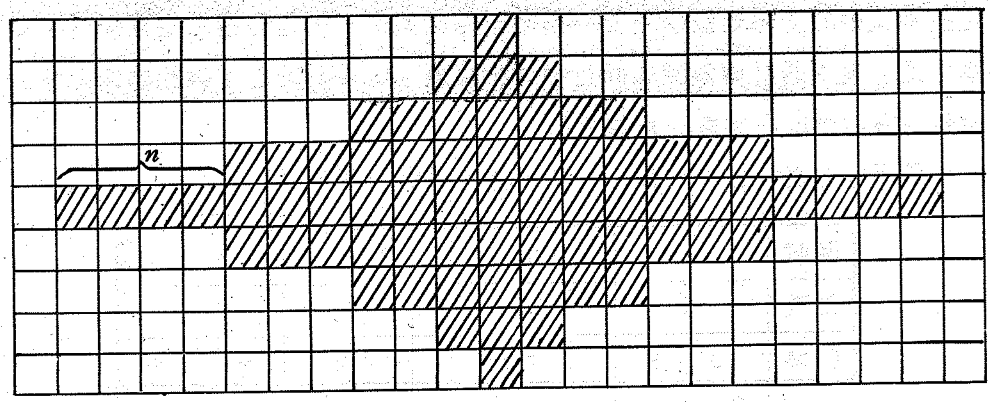
(2)



(3)



(4)

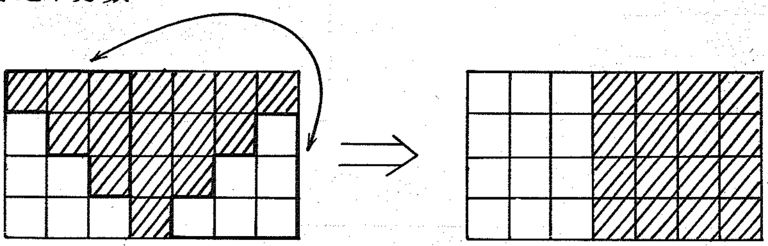


找規律，同學在黑板上加畫了上列兩圖：

他們點算了這四圖中紅、白磚塊的數目，並將這些數目列表如下：

| 圖號 | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| 紅磚 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| 白磚 | 6 | 12 | 20 | 30 |

有位同學指出，在這些圖中，把紅白磚適當的互換後，紅磚剛好可以湊成正方形，如下圖所示的粗線匡住的部份互換。由此觀察，我們可以清楚的看出，爲什麼紅磚塊的數目一定會是平方數。



上述的表中所列的計算結果，與上述的觀察，雖然不能直接給出計算的規律，但却是很有趣的結果。

這個圖案的規律並不是很直接單純的。數學裏兩數量間最單純的關係有兩種，一種是差一定，如父子的年齡（如例１）。另一種則爲商一定，如成正比例的兩個數量（如例２）。但這些圖案中的紅白磚塊數目，並沒有上述那樣單純的關係。沒有單純的關係，並不就是沒有關係。問題是要怎樣找出這個比較複雜的關係。

這些圖案中的規律是數學中要換自變數的典型例子。怎樣找出這個新的自變數？筆者叫學生把上表中的紅磚數減去同行中的白磚數，問得到的數；與相應的圖案有什麼關係？得到的答案是紅白磚數的差爲列數。

現在我們把上表中加上列數，就比較容易看出一些關係了

| 圖號 | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| 列數 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 紅磚 | $3^2=9$ | $4^2=16$ | $5^2=25$ | $6^2=36$ |
| 白磚 | $3\times2=6$ | $4\times3=12$ | $5\times4=20$ | $6\times5=30$ |

| 圖號 | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| 紅磚 | 5 | 15 | 35 | 69 |
| 白磚 | 10 | 30 | 70 | 138 |

**例 4**　筆者選出的另一張圖案設計則比較複雜，我叫這位同學在黑板上先畫了上列的 4 個圖案，再叫同學們計算各圖案中的紅白磚數，並把這些結果列在表中，如上。然後觀察、討論，看看是否能找到一些規律。

由上表我們看出，白磚數目是紅磚數目的 2 倍。但爲什麼這個關係，會對以後許多圖案都成立？我們應該找出原因來解釋。因爲在數學裏，我們不能憑著對幾個圖案的觀察，就妄下斷言。

我們嘗試著仿照上面幾個例子，用互換白紅磚塊的方式來解釋，但只能做到下列的樣子：因爲每個圖案中左右、上下都是對稱的，而我們要說明的是白磚數目爲紅磚數目的 2 倍，所以只要把紅磚與右（或左、或上、或下）邊的白磚一樣多就好了。這件事，我們對上述的 4 個圖案都可個別做到（讀者不妨自己做做看），但找不出一致的互換規律。

單純的方法既然無法採用，只好再度採取換自變數的方法。在這個例子裏，我們能控制的自變數是什麼？照一般道理說，列數與行數是最自然的候選者，所以我們把列數與行數做成下表

| 圖號 | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| 列數 | 3 | 5 | 7 | 9 |
| 行數 | 5 | 9 | 15 | 23 |

列數與行數之間又有什麼關係呢？從上表實在看不出來，只好回到圖上去觀察。從圖案(1)至(4)，看出列數與行數的增加情形是如下的：

| 圖號 | (1) | (2) | (3) | (4) |
|---|---|---|---|---|
| 列數 | $1+2\times1$ | $1+2\times2$ | $1+2\times3$ | $1+2\times4$ |
| 行數 | $3+2\times1$ | $3+2(1+2)$ | $3+2(1+2+3)$ | $3+2(1+2+3+4)$ |

由此看出，最好的自變數是圖號，設圖號爲 $n$，則有下列關係

$$\text{列數} = 2n+1$$

$$\text{行數} = 3+2(1+2+\cdots\cdots+n)$$

利用公式 $1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$（註2），可把行數改寫成下列的形式

$$\begin{aligned}\text{行數} &= 3+2(1+2+\cdots\cdots+n)\\ &= 3+2\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n^2+n+3\end{aligned}$$

知道了列數與行數的計算式之後，我們很容易算出總磚塊數如下（紅磚 $x$ 塊，白磚 $y$ 塊）：

$$\begin{aligned}x+y &= (\text{列數})\times(\text{行數})\\ &= (2n+1)(n^2+n+3)\\ &= 2n^3+3n^2+7n+3\end{aligned}$$

我們要證實的關係是白磚數爲紅磚數的2倍，或總磚塊數目是紅磚數的3倍。所以剩下來的只要算出紅磚數目了。

其實，課進行到這裏，大部分的學生已經完全不懂了。因爲這些計算牽涉到式子的運算，而國一的學生，即使是資優班，缺乏這方面的訓練就是不行。但班上還有兩位聽得懂，於是繼續進行下去。

我們觀察出從第一列到最中間一列，紅磚數目的情形如下

$$1,\ 1+2\times1,\ 1+2(1+2),\ 1+2(1+2+3),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$1+2(1+2+3+\cdots\cdots\cdots\cdots+n)$$

因此，紅磚的數目 $x$ 可以寫成下列的式子（在圖號爲 $n$ 的情形）。

$$\begin{aligned}x &= 2\times1+2[1+2\times1]+2[1+2(1+2)]+2[1+2(1+2+3)]\\ &\quad+\cdots\cdots+2[1+2(1+2+\cdots\cdots+\overline{n-1})]+[1+2(1+2+\cdots\cdots+n)]\\ &= 2n+1+4[1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots\cdots+(1+2+3+\cdots\cdots+\overline{n-1})]\\ &\quad+2(1+2+3+\cdots\cdots+n)\end{aligned}$$

---

註2　$1+2+\cdots\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ 要另外教，不然國一的學生不一定知道。

$$=2n+1+2\times\frac{n(n+1)}{2}+4\times\sum_{i=1}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2}$$

$$=2n+1+n(n+1)+2\left(\sum_{i=1}^{n-1}i^2+\sum_{i=1}^{n-1}i\right)$$

$$=n^2+3n+1+2\times\frac{(n-1)n}{2}+2\times\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$=\frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{7}{3}n+1$$

在最後第二個等號中，我們利用了 $n$ 個連續數的平方和的公式

$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

這樣的公式不要說國一的學生，連高一的學生也未聽過，所以這個例子選得很不適當。但筆者是在課堂上由學生設計的圖案中，臨時起意選出，無法在選圖時，作嚴密的考慮，只覺得這個圖案的設計新穎，規律性也很清楚，規律一定也不難找，沒想到是如此複雜，可見圖不可貌相。但既然已經進行到這裏，只好硬著頭皮解釋這個等式是由數學歸納法得到的。當然，到了這裏，連班上原來還聽得懂的兩位同學也聽不懂了。但下面的計算，一些同學又聽懂了。

$$x+y=2n^3+3n^2+7n+3$$

$$x=\frac{2}{3}n^3+n^2+\frac{7}{3}n+1$$

所以 $x+y=3x$

即 $y=2x$

由此得到了白磚數目是紅磚數目的2倍。