管窺電腦在數學教學上的運用及其意義

何景國
私立延平高級中學

電腦的發明無疑地是人類智慧的偉大結晶，它不但提昇了科技的層次，也便利了人類社會處理日常事物，它的運用層面已日漸普及，在可預見的將來，電腦將對整個世界文明巨大的衝擊，它將走入每個家庭，進入各級學校，成爲所有學生的寵物。面對這種不可改變的事實，教育當局乃在七十二年度開始於十二所高中進行電子計算機新編教材之試驗教學，並依據試教結果修訂教材。教育部公佈的高中課程標準亦將電子計算機納入爲一年的選修課程。因此，在未來的歲月中，每一個接受過中等教育的人都可以有“電腦素養”，能夠熟練地使用電腦，更能利用電腦來解決一些紙面作業無法運算、驗證的數學問題。茲就這方面可能發生的種種問題提出兩則來探討，一種是防範數值誤差的程式設計，一種是電腦模擬實驗（Simulation）。

由於電腦本身工作能力是有一定極限的，超過此極限，便不可避免地會產生些微的誤差，累積下來便成了有相當差距的結果，而不能令人滿意。在此，舉個實例來說明：學生在數學上學會了一元二次方程式

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

的解法，他就將嘗試著以公式

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

去寫電腦程式，輸入電腦，並將不同的係數A、B、C鍵入電腦，很快地他就得到了答案。可是，當他嘗試以一些很大的與一些很小的係數鍵入；例如說：以

$$A=2，\qquad B=-1000000，\qquad C=0.0002$$

鍵入時，電腦輸出的答案是：

500000與0

這個答案一定會令他感到十分驚奇，因爲這個答案顯然和他在數學中學到的“根與係數關係”性質不符合，於是該生可能會找數學老師詢問。這時候，數學老師該如何回答，並協助他完成電腦程式的設計呢？事實上，毛病就在於B值與C值相差很大，因而B^2就比$4AC$大得更多。所以在根號內的B^2-4AC自然的非常接近B值了。於是在：

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

中之分子就變成（$-B+B$）了，因而電腦就會把它當成零。在“數值分析”裏，稱這種錯誤爲“Subtractive-Cancellation”，所以把兩個非常接近的數值做相減運算是一大忌，應極力避免這種情形。解決之道，乃是將上式子配方如下：

$$\frac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}=\frac{(-B+\sqrt{B^2-4AC})(-B-\sqrt{B^2-4AC})}{2A(-B-\sqrt{B^2-4AC})}$$

$$=\frac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}$$

然後，以$\dfrac{2C}{-B-\sqrt{B^2-4AC}}$代替$\dfrac{-B+\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$來寫程式。現在附錄這個電腦程式如下：

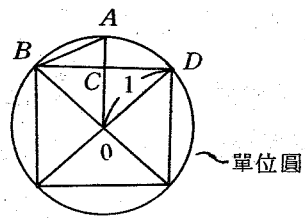
```
  5 INPUT "coeff.A (A<>0)";A,"coefficient B=";B,"coefficient C=";C
 10 PRINT " with condition K=0.00001"
 15 IF A=0 THEN 5
 20 LPRINT "  The  roots  of  quadratic  equation
 40 LPRINT TAB(6);A;
 60 LPRINT "X^2";
 70 IF B=0 THEN 130
 80 IF B<0 THEN 105
 90 LPRINT "+";
100 IF B=1 THEN 120
105 IF B=-1 THEN 115
110 LPRINT B;:GOTO 120
115 LPRINT "-";
120 LPRINT "X";
130 IF C=0 THEN 170
140 IF C<0 THEN 160
150 LPRINT "+";
160 LPRINT "";C;
170 LPRINT "=0"
175 PRINT
190 PRINT TAB(8);"Answer"
200 B1=-B/2/A
210 D1=B1*B1-C/A
220 IF D1<0 THEN 260
225 IF B^2+C^2=0 THEN 300
230 IF ABS(SGN(A*B)*ABS((B+SQR(B*B-4*A*C))/2)-ABS(B))<0.00001 THEN 350
240 IF ABS(SGN(A*B)*ABS((-B+SQR(B*B-4*A*C))/2)+ABS(B))<0.00001 THEN 380
245 IF D1=0 THEN 300
250 IF D1>0 THEN 315
260 Y=SQR(-D1)
265 LPRINT "* Two imaginary roots:"
270 LPRINT "  X1=";B1;" -";Y;"i"
280 LPRINT "  X2=";B1;" +";Y;"i"
290 GOTO 400
300 LPRINT "* Equal roots :"
305 LPRINT "  X1=X2=";B1
310 GOTO 400
315 LPRINT "* Two real roots :"
320 LPRINT "  X1=";B1+SQR(D1)
330 LPRINT "  X2=";B1-SQR(D1)
340 GOTO 400
350 LPRINT "* Two real roots :"
```

```
360 LPRINT "  X1=";C/(A*(B1-SQRD1))
365 LPRINT "  X2=";B1-SQRD1:GOTO 400
367 LPRINT "X2=";B1-SQRD1
370 GOTO 400
380 LPRINT "* Two real roots:"
390 LPRINT "  X1=";2*C/(-B+SQR(B*B-4*A
*C))
395 LPRINT "  X2=";B1+SQR(D1)
400 PRINT :PRINT
410 INPUT " more data ? (Yes=Y,No=N)";
Z$
420 IF Z$="Y" THEN 5
500 END
```

有了這個程式，我們就可以用來解決上面所遇到的困難。請看下面電腦程式執行樣本。

```
RUN
  The  roots  of  quadratic  equation
       1X^2+ 1000000X+ 0.0025=0
* Two real roots :
  X1=-2.5E-09
  X2=-1000000


  The  roots  of  quadratic  equation
       1X^2+ 1E-05X+ 3E-07=0
* Two imaginary roots:
  X1=-5E-06 - 5.476997353E-04i
  X2=-5E-06 + 5.476997353E-04i
```

由此例子可知將來在數學教學方面宜注重數值分析的觀念，及教導學生懂得如何選擇公式，採用較爲穩定的公式。這都是教學內容改變的一些重要課題。下面再舉一個具體例子：如何利用幾何學上的圓內接正多邊形與圓外切正多邊形的周長來逼近求得圓周率π的近似值。首先我們可以在一個單位圓內畫一個內接正四邊形，然後再依計算的次數，倍增邊數，如邊數$n=4$時，其每邊長用S_4表示，則得：（右圖）



$\overline{BD}=S_4$

$\overline{AB}=S_8$

$S_4=\sqrt{2}$

接著，將4邊形之邊數加倍，得一內接正八邊形，且其邊長爲：

$$S_{2\times 4}=S_8=\overline{AB}$$

式中：

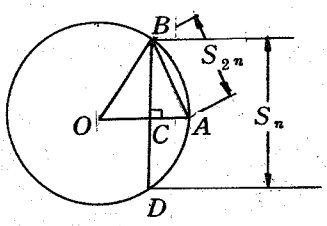
$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

$$\overline{AB}^2=\frac{S_4^2}{4}+\left[1-\sqrt{1-(\frac{S_4^2}{4})}\right]^2$$

$$\overline{AB}^2=2-2\sqrt{1-\frac{S_4^2}{4}}$$

故: $$S_{2\times4}=\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

一般情形，我們可以利用單位圓之內接 n 邊形之邊長 S_n 求得內接 $2n$ 邊形之邊長 S_{2n} 如下：（右圖）



單位圓

在 $Rt\triangle OBC$ 中得：

$$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2+\overline{BC}^2$$

且在 $Rt\triangle BCA$ 中得：

$$\overline{AB}^2=\overline{BC}^2+\overline{CA}^2$$

式中： $OB=1$， $\overline{BC}=\frac{1}{2}S_n$， $\overline{AB}=S_{2n}$

又因為 $$\overline{CA}=\overline{OA}-\overline{OC}=1-\overline{OC}$$

所以得 $$1+\overline{OC}^2+(\frac{S_n}{2})^2$$

或 $$\overline{OC}=\frac{1}{2}\sqrt{4-S_n^2}$$

則 $$S_{2n}^2=(\frac{S_n}{2})^2+(1-\overline{OC})^2$$

或 $$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$$

利用這個公式，我們可以算出各種多邊形的邊長，將邊長再乘以其邊數即得多邊形之周長。當邊數 n 不斷地倍增，則多邊形之周長就越來越趨近於單位圓之圓周或 π。因此種多邊形為內接多邊形，故其周長必小於 π 值，所以下式

$$L_n=\frac{1}{2}nS_n \cdots\cdots\cdots\

圖中以 $\overline{BD}$ 表內接正 n 邊形之邊長 S_n，及 $\overline{EF}$ 表外切正 n 邊形之邊長 T_n。
因 $\overline{OA}$ 平分 $\overline{BD}$ 與 $\overline{EF}$ 及 $\triangle OCB \backsim \triangle OAE$ 所以得：

$$\frac{\overline{OC}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{AE}}$$

在 $Rt\ \triangle OBC$ 中知：

$$\overline{OB}^2=\overline{OC}^2+\overline{CB}^2$$

且知：
$$OB=OA=1,\quad CB=\frac{1}{2}S_n,\quad AE=\frac{1}{2}T_n$$

故
$$\overline{OC}=\frac{S_n}{T_n}$$

則
$$1=\frac{S_n}{T_n}+\left(\frac{S_n}{2}\right)^2$$

或
$$\frac{S_n^2}{T_n^2}=1-\frac{S_n^2}{4}$$
$$=\frac{4-S_n^2}{4}$$

故
$$T_n=\frac{2S_n}{\sqrt{4-S_n^2}}$$

因外接多邊形之周長大於圓周，同理當邊數 n 變得很大時，正外接 n 邊長之周長就趨近單位圓之圓周長，因而我們得到下式

$$U_n=\frac{nS_n}{\sqrt{4-S_n^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (乙)$$

做爲圓周或 π 之上限，亦可用來計算 π 之近似值。所以我可得結論如下：

$$\frac{1}{2}nS_n\leq\pi\leq\frac{1}{2}nT_n$$

或
$$L_n\leq\pi\leq U_n$$

現在某些學生根據(甲)式及(乙)式來寫個十分簡單的電腦程式，（請見下列 BASIC 電腦程式），利用電腦不斷將上述那些多邊形之邊數 n 倍增，以求出越來越精確之圓周率 π。

```
 5 CLEAR :CLS
10 S=SQR(2):N=4
20 N=2*N
30 S=SQR(2-SQR(4-S*S))
40 L=(S*N)/2:U=(S*N)/SQR(4-S*S)
```

```
50 LPRINT "* N=";N;
55 LPRINT TAB(22);"PI =";(L+U)/2
60 LPRINT "( lb.=";L;
70 LPRINT TAB(22);"ub.=";U;" )"
80 GOTO 20
```

程式中N表邊數，LN表π之下限，UN表π之上限。由下圖電腦執行樣本可以看出，開始π之近似值還是與我們所希望的結果相近，尚算是滿意，但是繼續演算時，π之下限增加，甚至超過了π值。到後來竟然得出些奇怪的結果，終於得到一堆「零」！

```
RUN
* N= 8                    PI = 3.187587979
( lb.= 3.061467459        ub.= 3.313708499 )
* N= 16                   PI = 3.152021515
( lb.= 3.121445152        ub.= 3.182597878 )
* N= 32                   PI = 3.144136699
( lb.= 3.136548491        ub.= 3.151724908 )
* N= 64                   PI = 3.142224772
( lb.= 3.140331158        ub.= 3.144118386 )
* N= 128                  PI = 3.141750447
( lb.= 3.141277258        ub.= 3.142223637 )
* N= 256                  PI = 3.141632118
( lb.= 3.141513834        ub.= 3.141750402 )
* N= 512                  PI = 3.141602597
( lb.= 3.141573027        ub.= 3.141632167 )
* N= 1024                 PI = 3.141595335
( lb.= 3.141587942        ub.= 3.141602727 )
* N= 2048                 PI = 3.141594797
( lb.= 3.141592949        ub.= 3.141596645 )
* N= 4096                 PI = 3.14159508
( lb.= 3.141594618        ub.= 3.141595542 )
* N= 8192                 PI = 3.141608084
( lb.= 3.141607969        ub.= 3.1416082 )
* N= 16384                PI = 3.140860263
( lb.= 3.140860234        ub.= 3.140860291 )
* N= 32768                PI = 3.14128754
( lb.= 3.141287533        ub.= 3.141287547 )
* N= 65536                PI = 3.142996149
( lb.= 3.142996147        ub.= 3.142996151 )
* N= 131072               PI = 3.149821337
( lb.= 3.149821337        ub.= 3.149821338 )
* N= 262144               PI = 3.156631769
( lb.= 3.156631769        ub.= 3.156631769 )
* N= 524288               PI = 3.210595196
( lb.= 3.210595196        ub.= 3.210595196 )
* N= 1048576              PI = 0
( lb.= 0                  ub.= 0 )
```

```
* N= 2097152          PI = 0
( lb.= 0              ub.= 0 )
* N= 4194304          PI = 0
( lb.= 0              ub.= 0 )
* N= 8388608          PI = 0
( lb.= 0              ub.= 0 )
* N= 16777216         PI = 0
( lb.= 0              ub.= 0 )
* N= 33554432         PI = 0
```

顯然有重大錯誤發生。這個問題出在何處呢？於是又找數學老師查詢原因。此時，數學老師又須懂得如何去解答了。首先觀察到公式：

$$S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}$$

中，當 n 增大時，S_n 減小，於是 S_n^2 就趨近於 0，而 $\sqrt{4-S_n^2}$ 趨近於 2。所以 $2-\sqrt{4-S_n^2}$ 成爲兩個非常接近的數相減而造成了減性抵消（Snbtractive Cancellation）。這種誤差在計算 S_{2n} 及 T_{2n} 時又不斷地被放大，所以導致了古怪的結果。解決之道，可以利用二項式定理修改電腦程式。這回就可以得出很滿意的結果。

利用二項式定理將 $\sqrt{4-S_n^2}$ 展開如下：

$$(4-S_n^2)^{1/2}=2-d_1-d_2-\cdots\cdots-d_k\cdots\cdots$$

式中：

$$d_1=\frac{S_n^2}{4}$$

$$d_{k+1}=\frac{2k-1}{k+1}\left(\frac{S_n^2}{2^3}\right)d_k$$

因此：

$$2-\sqrt{4-S_n^2}=d_1+d_2+\cdots\cdots+d_k+\cdots\cdots$$

當 $S_n<1$ 時，d_k 隨著 k 之增加而遞減得極快，又每一項都可由其前一項求得，將各項累加後開平方即可得 S_{2n}。這樣可以避免減性抵消的發生，其結果相當穩定。

程式修改如下，用這個程式，圓周率 π 可以求得相當準確的數值。

```
 5 PRINT "  Calculation   of    PI
using regular  polygons"
10 S=SQR(2):N=4
20 N=2*N
30 D=S*S/4
40 T=D:GOSUB 200
50 S=SQR(D)
60 L=(S*N)/2
70 U=(S*N)/(2-D)
80 LPRINT "N=";N;
85 PRINT
```

```
 90 PRINT " l.b=";L
 92 PRINT " u.b=";U
 95 LPRINT TAB(17);", PI=";(L+U)/2
100 GOTO 20
200 FOR K=1 TO 100
210 T=((2*K-1)/(K+1))*S*S*T/8
220 D=D+T
230 NEXT K
240 RETURN
```

```
RUN
N= 8            , PI= 3.69551813
N= 16           , PI= 3.250036519
N= 32           , PI= 3.167272799
N= 64           , PI= 3.147928517
N= 128          , PI= 3.143171435
N= 256          , PI= 3.141987026
N= 512          , PI= 3.141691227
N= 1024         , PI= 3.141617296
N= 2048         , PI= 3.141598814
N= 4096         , PI= 3.141594194
N= 8192         , PI= 3.141593039
N= 16384        , PI= 3.14159275
N= 32768        , PI= 3.141592678
N= 65536        , PI= 3.141592659
N= 131072       , PI= 3.141592655
N= 262144       , PI= 3.141592654
N= 524288       , PI= 3.141592654
N= 1048576      , PI= 3.141592653
N= 2097152      , PI= 3.141592653
N= 4194304      , PI= 3.141592653
N= 8388608      , PI= 3.141592653
N= 16777216     , PI= 3.141592653
N= 33554432     , PI= 3.141592653
```

由於電腦的問世，一些從前不可能讓學生做的習題，現在則可以輕易付諸實行了。例如我們想以 1000 或 10000 次以上的實驗來求得骰子投擲出現一定的點數值之機率。那必是曠日費時的，若欲由每一位學生親自來做實驗，更是天方夜譚。有了電腦學生則可輕易地利用實驗的隨機結果而得到答案。現在就讓我們一起運用電腦來探究這個問題：我們投擲一個公正的骰子，它最初出現爲 a 點的面（其中 a 爲由 1 至 6 的整數）的次

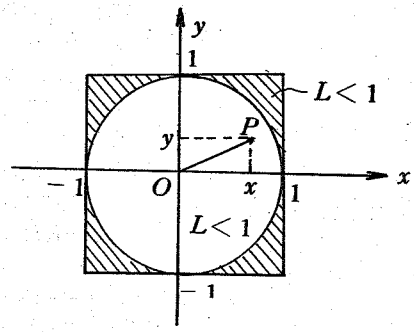
數與投擲總次數之比在$\frac{1}{6}$附近的波動幅度較大，當投擲次數增大，其比值就會趨近一定值，而以$\frac{1}{6}$爲其極限。換言之，觀察次數越多，則相對比值會愈來愈「穩定」，漸趨於某一數值。這個事實，過去我們可能人人未查驗過，因爲要查驗此事必要花費相當長的時間和耐力，而且它需要相當多次的重複實驗。現在一個中學生只要有一部小型電腦就能夠相當滿意的解決這個問題。下列的程式就是做了 1000 次，或 10000 次而得出非常好的估計值。

```
   5 CLEAR :CLS
  10 INPUT "No.of trials N=";K,"Outcome
of dot J=";J
  20 LPRINT "No.of trials:";K
  30 IF J=1 THEN 50
  40 IF J<>1 THEN 53
  50 LPRINT "Outcome of";J;" dot":GOTO
60
  53 LPRINT "Outcome of";J;" dots"
  60 X=0
  70 FOR I=1 TO K
  80 N=INT(6*RND+1)
  90 IF N<>J THEN 110
 100 X=X+1
 110 NEXT I
 120 S=INT(120*X/K+0.5)
 130 Q=120:R=S
 140 IF INT(Q/R)=Q/R THEN 180
 150 P=R
 160 R=Q-INT(Q/R)*R
 170 Q=P:GOTO 140
 180 Q=120/R:S=S/R
 190 LPRINT "P(";J;")=";X/K;
 195 LPRINT TAB(15);"  Or ";
 200 LPRINT TAB(20);"     P(";J;")=";S;
"/";Q
 210 LPRINT
 220 GOTO 5
```

```
RUN
No.of trials: 1000
Outcome of 1 dot
P( 1)= 0.17      Or      P( 1)= 1/ 6
```

```
No.of trials: 1000
Outcome of 2 dots
P( 2)= 0.176      Or      P( 2)= 7/ 40

No.of trials: 1000
Outcome of 3 dots
P( 3)= 0.171      Or      P( 3)= 7/ 40

No.of trials: 1000
Outcome of 4 dots
P( 4)= 0.176      Or      P( 4)= 7/ 40

No.of trials: 1000
Outcome of 5 dots
P( 5)= 0.16       Or      P( 5)= 19/ 120

No.of trials: 1000
Outcome of 6 dots
P( 6)= 0.174      Or      P( 6)= 7/ 40
```

最後我們再應用「蒙地卡羅術」（Monte CARLO），結合電腦來求 π 值之近似值。所謂「蒙地卡羅術」就是利用實驗的隨機結果來解決問題的一種方法。例如我們可以在以2爲邊長的一個正方形中任意選若干多個點，計算落在正方形之內切單位圓內的點之數目，並求其所佔之比率，就可以算得圓周率 π 之近似值了。如果選的點數愈多，其比率就愈趨近眞正之 π 值。（右圖）



設點 $P(x, y)$ 爲正方形內任一點，其坐標 x，y 分別用兩個獨立的亂數表示如下：

$$\begin{cases} x = 2\,(\,\mathrm{RND}(999)/1000 - 0.5\,) \\ y = 2\,(\,\mathrm{RND}(999)/1000 - 0.5\,) \end{cases}$$

隨機地產生 N 個點時，若有 k 個點落在單位圓內，則有 k 個能夠滿足下列條件之（x，y）

$$L = \overline{OP} = \sqrt{x_2 + y_2} < 1$$

則 π 之近似值可以下式來計算

$$\frac{\pi}{4} \doteqdot \frac{K}{N}$$

或

$$\pi \doteqdot 4\frac{K}{N}$$

下面是根據上述原理設計而成的程式，結合電腦進行模擬實驗，並當$N=10000$時，計算得π之近似值爲：3.145

```
 10 PRINT "  Simulation of PI  "
 50 INPUT "no.of trials N=";N,"no.of t
imes  T=";T
 55 PRINT
 60 PRINT "N=";N;" , T=";T
 70 PRINT "   Wait,please ! "
 80 BEEP 1
 85 PRINT :PRINT
100 K=0:H=0:U=0
110 FOR J=1 TO T
115 FOR I=0 TO N
120 X=2*RND-1:Y=2*RND-1
130 R=X*X+Y*Y
140 IF R<1 THEN K=K+1
150 H=H+1
155 P=4*K/H
160 NEXT I
165 U=U+1
170 PRINT " T(";USING"##";U;"):";" PI=
";USING"#.##";P
175 LPRINT "T(";USING"##";U;"):";" PI=
";USING"#.##";P
180 NEXT J
200 INPUT "more data? (Yes=Y,No=N ";Z$
210 IF Z$="Y" THEN 215
213 IF Z$="N" THEN 250
215 PRINT :PRINT :PRINT :GOTO 50
220
250 PRINT
300 END
```

```
  Simulation of PI
N= 1000 , T= 3
T( 1): PI=3.13
T( 2): PI=3.13
T( 3): PI=3.14
```

從上述實例中，我們可發現在未來的中學教育中，電腦勢將引發數學教育的不斷革

新和層次的提昇。過去單向教學的局面將被打破，教師和學生之間的溝通將日益緊密，教師借著電腦的協助必可引導學生進入奧妙的數學殿堂之中，學生經由電腦素養的提昇亦可培養高度的學習興趣，使數學的演算不再是乏味艱難的工作；數學的實驗亦可付諸實施。本文雖屬淺薄，但仍希望對從事數學教育的教師有所裨益。

後記：本文中所有程式皆由Microsoft BASIC寫成，此類BASIC 程式可以在SHARP PC-1500 上直接執行，而在CASIO PB700，APPLE II，小教授或其它電腦上執行，僅有一些小變動而已。

古中國科學管窺

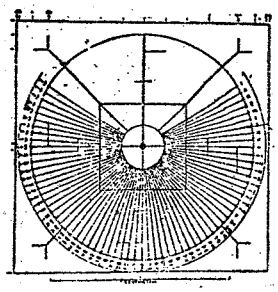
——日　晷

編輯室

中國古代計時之器有日晷、有蓮漏，日晷今尚保有漢代遺物二具：一玉製；一石製，石製的現藏於加拿大國立博物館，其形狀爲一四角形之石器，中心繪刻一圓，在約佔同圓的三分之二部位中分割爲六十九等分——考其用意當係共分一百等分，而未刻部位應屬夜間部分，因夜間無日自無必要。圓周上與各等分交會點處均刻有小洞，圓心則刻有較大深洞，另在同圓心外刻有一小圓，而小圓外更刻一正方形。

其使用方法，最初咸認係以一圓周爲一日，而一日分爲一〇〇刻，蓋將盤面與赤道平行放置，則可依照圓心穴內所立木棒循日影測時。

然而盤面位置既與赤道平置，則秋分後太陽低於赤道即無法測得棒影！於是便不能測得自秋分以迄春分的半年間每日時刻！前記方法已不能成立。



日晷盤面的倣寫圖

因之加拿大學者懷特與米爾曼兩氏乃據此存疑進行研究，發現：外圍大圓周與放射形刻度線交接點處之小穴，應係爲豎立「標針」而設，而圓心一較大之深洞，則用爲豎立一「長方條形柱體」者，測時爲根據圓周上「標針」的投影而定，如在任一孔內所豎之「標針」其投影適印射於中心「長方條形柱體」的正中，即爲應測之正確時刻！而全年可用。

此一發現，證明原設計之精密，實足爲後人所欽服。