算術運算的演變

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

人類發展數的概念，當然不是只爲了計數物品的個數而已；當文明逐漸進步，許多計算的工作就跟著出現，例如，賦稅的徵收，以物易物或是以錢幣易物的交易行爲等，都需要某些計算的工作。因此，隨著數之概念的形成，數的運算方法與技巧乃變成算術發展的核心工作。

現代算術中許多演算技巧，像乘法、除法、與開方法，在西方文明中，差不多都在西元十五世紀才發展完成。這些技巧發展如此緩慢的原因，可以分成兩方面：其一是古代的記數方法，都不適合於做計算；其二則是書寫工具缺乏，中國人所發明的紙，在西元十二世紀才傳入歐洲；而利用紙槳以機器大量造紙，不過是一百多年的歷史而已。

近代數學中通常有四則運算之稱，其意是指算術中的加、減、乘、除等四種基本的運算；此外，開方法也是算術中很重要的一種運算。不過，早期的數學家所指的基本算術運算並不只這五種，他們的基本運算至少都增加了加倍（duplation）與減半（mediation）兩種。像義大利數學家Luca Pacioli（1445～1509）在他西元1494年的著作Sūma 中就還有這兩種。加倍與減半之所以被列爲基本算術運算，乃是由於古代西方的乘法演算中，有一種方法必須依賴加倍與減半的協助。就演算技巧來說，加倍與減半分別只是最基本的乘法與除法而已（甚至只用加法與減法就可達成），所以本文不介紹這兩種運算，而只介紹其他五種運算的演進。

壹、加　　法

在現代數學中，加法一詞在英文中寫成addition　；可是，自古以來，加法一詞的

用字有許多變遷。古希臘所用的 προστιθέναι 相當於 aggregation；Fibonacci（1175～1250，義大利數學家）使用 composition 與 collection；十三世紀的法國學者以 assemble 來代替 add；印刷術發明的初期，則又流行 summation，現代數學中還常見到 summing up 表示“加起來”。在中國古代的算書中，大都以“幷之”或“併之”表示相加；九章算術、孫子算經中有一題「今有三分之一、五分之二，問合之得幾何？」這裡的“合之”，也是相加的意思；至於“加”字，在九章算術中也出現了，例如，第四章（少廣）中開平方法的「術曰」就有「所得副以加定法」的字句。

加法運算比較無從講究技巧，即使是印度－阿拉伯數字通行之前，各古文明的記數法都不會在加法方面引起困擾（希臘人、希伯萊人使用字母表示數，自然會麻煩些）。羅馬人只要把數字記號併在一起就可以了（埃及人的記數法也是如此）：

$$\begin{array}{r} DCCLXXVII \\ CC\quad X\ VI \\ \hline DCCCCLXXXXIII \end{array} \qquad \begin{array}{r} 777 \\ 216 \\ \hline 993 \end{array}$$

在進位的做法沒有通行之前，常用的方法是像印度數學家 Bhāskara（西元十二世紀）在他所著的 Lilāvati 中所介紹的方法。試求 9938、7827、4119、6826 的和：

個位 8、7、9、6 的和	30
十位 3、2、1、2 的和	8
百位 9、8、1、8 的和	26
千位 9、7、4、6 的和	26
諸和的和	28710

荷蘭數學家 Gemma Frisius（1508～1555）在他西元 1540 年的著作 Arithmeticae Practicae Methodus Facilis 中，把上法歸併成：

$$\begin{array}{r} 9938 \\ 7827 \\ 4119 \\ 6826 \\ \hline 30 \\ 8 \\ 26 \\ 26 \\ \hline 28710 \end{array}$$

貳、減　　法

跟加法一樣，減法的用字也經過不少變動。即使是現代，還常常聽到像「把我所欠的部分扣掉，剩下的付給我」這一類的說法，其中的“扣掉”與“剩下”，其實是數學上的“減”與“差”。在英文中，減法寫成 subtraction；Fibonacci 却使用 extraction；Jerome Cardano（1501～1576，義大利數學家）使用 detraction；Cuthbert Tonstall（1474～1559，英國數學家）使用 subduction；Robert Recorde（1510～1558，英國數學家）則把 rebate 做爲 subtract 的同義字；其他像 diminish 與 deduct 都曾被用來做爲 subtract的意義。在中國古代的算書中，“減”字很早就使用了；像九章算術與孫子算經中，有一題爲「今有九分之八減其五分之一，問餘幾何？」這裡的“餘”字與現代數學中的“餘數”意義當然不同。在英文中，餘數寫成 remainder，差寫成 difference，事實上，即使是現代數學教科書，remainder、rest、excess 與 balance 等都常用來表示差的意思。

與加法運算比較，減法運算似乎有較多的技巧。下面我們介紹一些方法，這些方法在目前的小學數學教科書中還可見到。

以加法代替減法，亦即利用下面的關係式：

$$a-b=a+(10-b)-10$$

其中a與b是一位整數。這種方法在印度數學家Bhāskara（西元十二世紀）所著的 Lilāvati 中已介紹過，所以，可能發現得更早。這種做法是這樣的：當我們要從 83 減去 26 時，由於 3 比 6 小，乃將 6 與 10的差 4 與 3 相加，得 7；然後將減數的十位數 2 加 1，得 3；最後，十位數的 8 減去 3，得 5。於是，所得的差是 57，這種方法曾經很受歡迎。

借位法自然是減法運算中常用的，不過，這種借位法却有兩種解釋。在希伯萊學者 Rabbi ben Ezra（1093～1167）所著的 Sefer ha-Mispar（Book of Number）中，他所介紹的方法是從被減數的下一位借 1；換言之，在 83－26 中，向 8 借 1 而成 13－6，得 7；然後，十位變成 7－2，得 5。另一種方式出現在義大利人 Piero Borghi（西元十五世紀）所著的 Qui comenza la nobel opera de arithmethica 中（西元 1484 年出版），在這種方式中，乃是採用有借有還的方式，亦即，向被減數借而還給減數。以 83－26 爲例，個位數部分是 13－6＝7，而十位數部分則是 8－3＝5；這兩

種方式也都很受歡迎。

另一種方法稱爲奧地利法，這個方法頗像美國店員找錢的方法。當我們要求 243－87 時，乃是去找一個整數，使它與 87 的和爲 243 。所以，我們說：「 7 與 6 的和爲 13 ， 8 與 5 的和爲 13 （或 9 與 5 的和爲 14 ）， 0 與 1 的和爲 1 （或 1 與 1 的和爲 2 ）」，由此得出差 156 。這個方法是法國人 Joannes Buteo（1492？～1572？）在他西元 1559 年的著作 Logistica 中提出來的，不過，直到西元 1874 年經由德國人 Kuckuck 的推介才引起大家的注意，Kuckuck 乃是從奧地利人學得這種方法，所以，才稱之爲奧地利法。

加法與減法的記號“＋”與“－”，是德國數學家 Johann Widman（1460？～1500？）在他西元 1489 年的著作 Rechenung auff allen Kauffmanschafft 中最先使用的；不過，却是經由德國數學家 Michael Stifel（1487～1567）在西元 1544 年的著作 Arithmetica integra 的推介下，才被普遍的接受與採用。在此以前，通常以 p 表示相加，m 表示相減；甚至以文字形式來表示，像 Nicolas Chuquet（1445？～1500？，法國數學家）在其著作 Triparty 中就分別以 plus 與 moins 表示加與減。

叁、乘　法

乘法乃是加法的一種簡便形式，所謂 $n \times m$，其實就是 n 個 m 相加，或 m 個 n 相加。不僅乘法的概念起源於這種意義，連 multiplication（乘法）這個字也是根據這種意義而創的。在拉丁文中，乘法寫成 multiplicatio ，這個字是由 multus（意思是 many）與 plicare（意思是 fold）合併轉變而成的。從字面上解釋，就是將許多相同的事物疊在一起的意思。在英文中，乘積寫成 product 。 product 這個字其實是成果的意思，所以，早期的作者們並沒有把它專用來指相乘的成果，而可泛指各種運算的成果。這個字變成乘法專用，是西元十六世紀以後的事。至於中國，“乘”與“積”這兩個字很早就使用了，像九章算術第一章（方田）第二題的「術曰」就有「廣從步數相乘，得積步」這些字句。

乘法運算自然比加、減法運算要講究更多的技巧，而且乘法表也是不可或缺的。在中國，九九乘法表出現得很早，當時稱爲九九歌。這種九九歌與現代小學生所背誦的九九乘法表不相同，它是從九九八十一開始的，所以才稱爲九九。從西元十九世紀以來，在中國西北方陸續挖掘出許多留有字跡的竹簡，這些竹簡大都是漢朝遺留下來的，一般

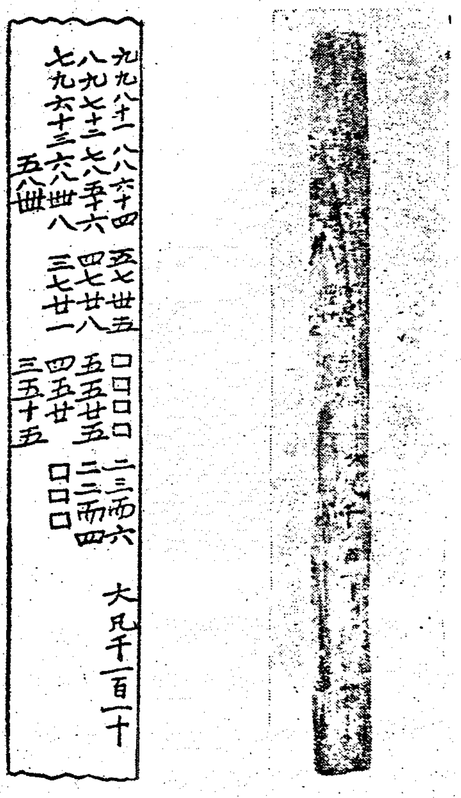


圖 1　漢簡九九圖

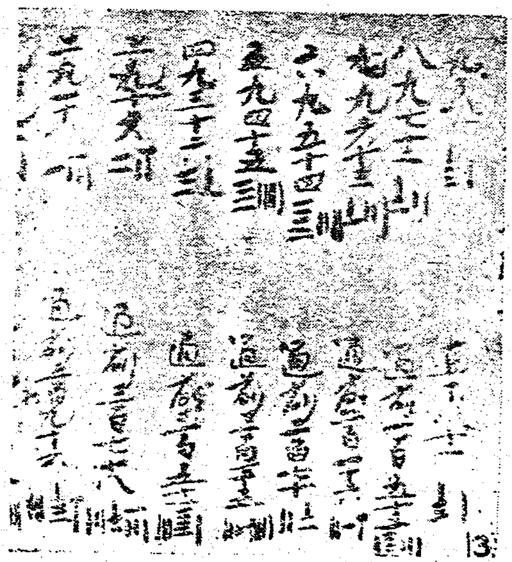


圖 2　唐立成算法的九九圖

都稱之為漢簡。其中有些竹簡上，也有著九九歌的記載。不過，由於這些竹簡在地下埋藏太久，上面的九九歌已經殘缺不全，圖 1 所示的簡上，共有十四句。

孫子算經中也有九九歌，它不像現代寫九九乘法表都用了八十一句，而只用了四十五句，即：九九八十一、八九七十二、…、一九如九、八八六十四、…、一二如二、一一如一。換言之，只有八九七十二，而沒有九八七十二，餘類推。圖 2 是唐朝立成算法中的九九圖，其中每一行的下面，都還利用算籌記數法寫出對應的數值。

關於中國的九九歌，有一個傳說中的故事。據說春秋時齊桓公曾經設立招賢館想物色人才，等了很久都沒人來應徵。過了一年，才來一個人把九九歌獻給齊桓公。齊桓公覺得很好笑，問那個人說：九九歌也能拿出來表示才學嗎？那個人回答說：九九歌確實不能夠表示才學，可是如果您對只懂得九九歌的人也能禮待的話，那麼還怕有才能的人不接踵而來嗎！齊桓公覺得這話很有道理，就把他迎進招賢館，並隆重地招待他。果然不久之後，許多有才學的人都前來應徵了。

西方文明中，乘法表自然也出現得很早。巴比倫人所用的乘法表寫成由上而下的長欄式，同時也避開了 $2\times3=6$ 與 $3\times2=6$ 這種類型的重複。義大利商人還設計了質數與質數之乘積的表，通常列出到 47×47，甚至 97×97。正方形方式的乘法表據傳是 Pythagoras 最先設計的，不過却無明顯的證據。三角形方式的乘法表，依 Johann Widman 的說法，乃是希伯萊人設計的。右圖是Widman所著的Rechenung auff allen Kauffmanschaft 中出現的三角形與正方形乘法表。

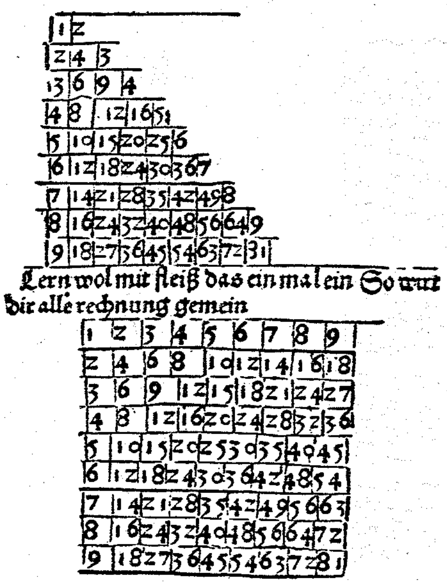


圖 3

在乘法的計算方面，中國人在明朝以前都使用算籌，明朝起開始使用珠算盤，所以，這段期間都沒有發展筆算的技巧，倒是珠算的口訣有良好的演進。中國人發展筆算數學，是西元十九世紀末葉的事，不過，儘管筆算數學發展得很晚，中國人所發明的算籌與珠算盤却是非常巧妙的計算工具。在宋、元以前，中國的算術與代數，比起同時期的西方文明要進步得多，或許應該歸功於這種巧妙的計算工具。

古埃及人計算乘法，根據埃及一些紙草的片段資料，可能是採用下面這種方式。例如，要計算 15×17 時，將 15 看成 $1+2+4+8$，而將 17 連續乘以 2，所得乘積相加即可：

$$\begin{array}{cc} 1 & 17 \\ 2 & 34 \\ 4 & 68 \\ 8 & 136 \\ \hline 15 & 255 \end{array}$$

這種做法可能沿用很久，所以，在歐洲文藝復興時期所出版的算術書籍，通常都有一章專門討論加倍（duplation）的問題。事實上，連Michael Stifel 那麼傑出的數學家，要計算 31×42 時，都還使用前面這種連續加倍的做法。

前面所介紹的方法，顯然與二進位法有關。目前蘇俄的農民也使用一種與二進位法有關的乘法，這種乘法是把相乘的兩數之一連續加倍，另一則連續減半（mediation），但減半時只計整數部分。例如，要計算 49×28 時，其做法如下：

49	24	12	6	3	1
28	56	112	224	448	896

然後，將上列各個奇數下方的數 28、448、896 相加，即得所要的乘積：

$$49 \times 28 = 28 + 448 + 896 = 1372$$

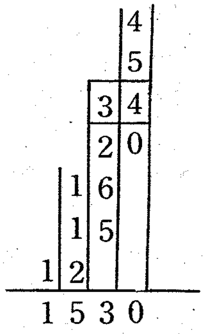
義大利數學家 Luca Pacioli（1445～1509）在他西元 1494 年的著作 Sūma 中，提出了好幾種表現乘法的運算式，其中有一部分是印度數學家 Bhāskara 在其著作 Lilāvati 中已經提過了。Pacioli 的第一種方法與現代的寫法最爲接近。例如，要計算 9876×6789 時，他寫成：

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 9 & 8 & 7 & 6 \\
 & & & & 6 & 7 & 8 & 9 \\
 & & & \boxed{8} & \boxed{8} & \boxed{8} & \boxed{8} & \boxed{4} \\
 & & \boxed{7} & \boxed{9} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{8} & \\
 & \boxed{6} & \boxed{9} & \boxed{1} & \boxed{3} & \boxed{2} & & \\
\boxed{5} & \boxed{9} & \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{6} & & & \\
\hline
6 & 7 & 0 & 4 & 8 & 1 & 6 & 4
\end{array}$$

Pacioli 這種寫法後來逐漸地被一般人所接受，不過，一般人對於乘數、被乘數書寫的位置，却還是各有千秋。在 Pacioli 之前的印度數學家 Bhāskara 用過下面兩種寫法：

$$\begin{array}{cccc}
 & 1 & 3 & 5 \\
1 & 2 & & \\
\hline
1 & 2 & & \\
 & 3 & 6 & \\
 & & 6 & 0 \\
\hline
1 & 6 & 2 & 0
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
 & 1 & 3 & 5 \\
 & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 3 & 5 \\
 & 2 & 7 & 0 \\
\hline
1 & 6 & 2 & 0
\end{array}$$

法國人 Rollandus（西元十五世紀）在他所著的 Scientia de numero ac virtute numeri（西元 1424 年左右出版）中，使用下面這種寫法（45×34）：



西元 1478 年，第一本印刷的算術著作在離義大利 Venice 不遠的小鎮 Treviso 出現（後世稱之爲 Treviso arithmetic），其中的乘法寫成下面的形式（934 × 314）：

```
      9 3 4
    ---------
    3 7 3 6 / 4
      9 3 4 / 1
  2 8 0 2 / 3
  -------------
  2 9 3 2 7 6
```

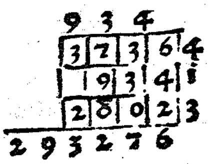
與現代算術課本中排列法完全一致（除了沒有×號）的乘法式，最早出現在西元 1515 年義大利數學家 Girolamo Tagliente 與 Giannantonio Tagliente 所合著的 Opera che insegna A ogni Ragione de Mercãtia 中：

```
   456
    23
 -----
  1368
  912
 -----
 10488
```

Pacioli 所提出的另一種乘法式稱爲城堡法，此名稱是由於乘法式的外型像城堡而得的，下面是 Pacioli 使用這種方式的第一個例子（原文照抄）：

9876	6	Per. 7
	6	
6789	1	Proua
Castelucio	61101000	
	5431200	
	476230	[原文有錯]
	40734	
Sūma	67048164	

Pacioli 還提出一種四邊形法如下：



在這種方法中，要求最後的結果，必須沿左上至右下斜著相加。

Pacioli 還提出一種交叉相乘法（cross multiplication）。他所根據的原理是，兩數相乘時，兩個數中每一對數字都須乘過一次，而且還須注意所得各個乘積的正確位值。例如，以 Taglientes 合著的 Opera 中 9876 × 6789 爲例，該書 1541 年的版本上有右圖中這一段。圖中正方形內的數，其正確排列應爲（第三列應是 4242）：

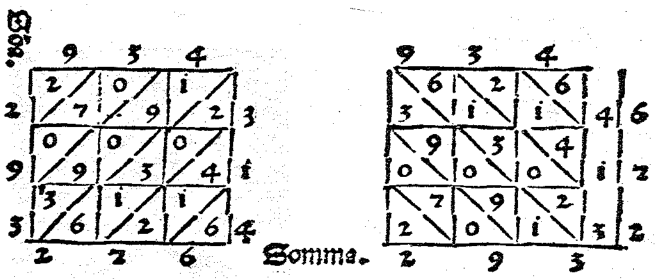
圖 4

81
484948
4242
54565654
7272
636463
36

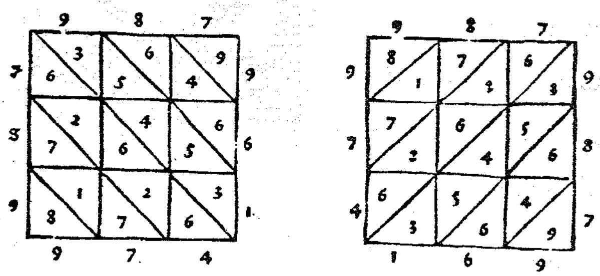
67048164

這些數字的意思，我們說明如下：第一列是 9000×9；第二列是 $800\times 6000+70\times 700+6\times 80$；第三列是 $70\times 6000+6\times 700$；第四列是 $9000\times 6000+800\times 700+70\times 80+6\times 9$；第五列是 $9000\times 80+800\times 9$；第六列是 $9000\times 700+800\times 80+70\times 9$；第七列是 6×6000。

Pacioli 所提的另一種方法稱爲 gelosia 法，此法源自印度人與阿拉伯人（他們稱之爲篩法），而西元十七世紀時，蘇格蘭數學家 John Napier（1550～1617）根據這種乘法而設計了有名的Napier 算籌。下面的例子係引自 Treviso arithmetic 中的兩種型式（Napier 算籌係採用左式）：



下面是Pacioli 書中的例子：



這種 gelosia 法，在明神宗萬曆二十一年（西元 1593 年）程大位所著的算法統宗中有所記載，稱爲因乘圖或鋪地錦，而在此以前的中國古算書中則都沒有，右圖是算法統宗的一段。

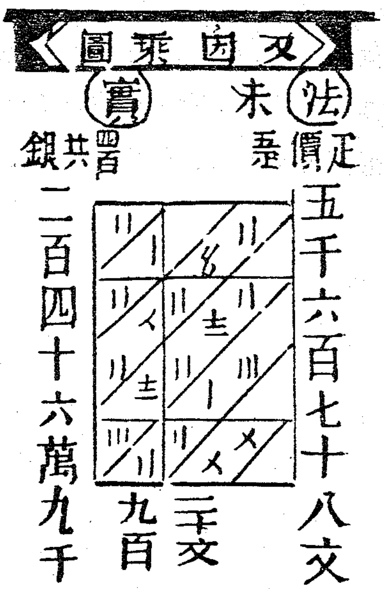


圖 5

乘法運算的記號×，是英國數學家William Oughtred（1574～1660）在他西元 1631年的著作Clavis Mathematicae中最先使用的。不過，在此以前，英國人已經使用過像字母 x 這種較

小的記號來表示乘號。至於以一點來表示乘號，像 $2\cdot 3=6$ ，則是德國數學家Christopher Clavius（1537～1612）在他西元1583 年的著作Epitome Arithmeticae Practicae中最先提出來的。

肆、除　法

在英文中，除法寫成 division ；除了這個字之外，Treviso arithmetic 及Michael Stifel 的Arithmetica integra 中都用 partition ，所以，被除數（dividend）與除數（divisor）也分別寫成 partend 與 parter 。商（quotient）的用字更多，像 answer、result、product、part、exiens、outcome 都曾使用過。在中國方面，“除”字出現得很早，如九章算術第一章（方田）第二題的「術曰」就有「以畝法二百四十步除之，即畝數」這樣的字句。在古代算書中，被除數都稱爲“實”，除數稱爲“法”，不過，在張邱建算經中就已有除數這個名詞。“商”這個字表示相除所得的結果，乃是從夏侯陽算經開始使用的；後來，開方所得的方根與解方程式所得的根也稱之爲商或上商（加了上字，乃是因爲在算籌用的算盤上，商通常置於最上列）。

在算術的四則運算中，除法自然是其中最困難的運算，所以，Pacioli 在他西元1494 年的著作 Sūma 中說：只要除法能做得好，那其他運算就都簡單了，因爲它們都包含在除法之中。Rollantus 在他西元 1424 年的著作 Scientia de numero ac virtute numeri 中，所舉的除法例子都是數目很小的簡單情形。倒是中國人在古算書中所舉的例子，有許多數目很大的問題。

古埃及人做除法運算，乃是以加倍與減半來進行。例如，要求 $19\div 8$時，他們的做法如下：$2\times 8=16$ ，$\frac{1}{2}\times 8=4$，$\frac{1}{4}\times 8=2$，$\frac{1}{8}\times 8=1$ ，等等。由於 $16+2+1=19$ ，所以，所得的商爲 $2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$。

$$\begin{array}{cc} 1 & 8 \\ {}^{*}2 & 16 \\ \frac{1}{2} & 4 \\ {}^{*}\frac{1}{4} & 2 \\ {}^{*}\frac{1}{8} & 1 \end{array}$$

古希臘人與羅馬人如何在他們那種不方便的數字記號上進行乘、除運算，後世已無法考證。使用印度 - 阿拉伯數字來做除法運算，最古老的方法據英國學者 Adelard of Bath（西元十二世紀）在其著作 Regulae abaci 中說，乃是法國人 Gerbert（940～1003，從西元 999 年至 1003 年間，他成爲教皇 Sylvester 二世）所傳下來的，不過，這一點却值得懷疑，因爲 Gerbert 不曾使用過零的記號。我們以 $900 \div 8$ 爲例來解說這個方法。首先把除數 8 寫成 $10-2$，則得

$$\begin{aligned} 900 &= 90(10-2)+180 \\ &= 90(10-2)+18(10-2)+36 \\ &= 90(10-2)+18(10-2)+3(10-2)+12 \\ &= 90(10-2)+18(10-2)+3(10-2)+(10-2)+4 \\ &= 90(10-2)+18(10-2)+3(10-2) \\ &\quad +(10-2)+\frac{1}{2}(10-2) \\ &= 112\frac{1}{2}\times(10-2) \end{aligned}$$

即得出商 $112\frac{1}{2}$。這個除法過程，Gerbert 的寫法如下：

$$
\begin{array}{l}
10-2\ )\ 900\ (\ 90+18+3+1+\frac{1}{2} \\
\qquad\quad \underline{900-180} \\
\qquad\qquad\quad 180 \\
\qquad\qquad\quad \underline{180-36} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 36 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{30-6} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 6+6=12 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{10-2} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2+2=4, \quad \frac{4}{8}=\frac{1}{2}
\end{array}
$$

中世紀末期很常見的一種除法演算，是將除數先因數分解。例如，把 216÷24 變成（216÷8）÷3，這種做法的主要目的，乃是儘量使除數變成一位數，這麼一來，除法演算的困難程度似乎可以略為降低。

在西元 1600 年之前，最常見的一種除法演算稱為帆船法（galley method），此種方法可能是印度人最先發現的。我們以 Treviso arithmetic 中的例子 65284 ÷ 594 來解說這種演算方法：

(1) 寫出被除數與除數，得出第 1 個商數 1。

$$
\begin{array}{r|l}
65284 & 1 \\
594 &
\end{array}
$$

(2) 6－5×1＝1，在 6 上寫 1，6 與 5 劃掉。

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \\
\cancel{6}5284 & 1 \\
\cancel{5}94 &
\end{array}
$$

(3) 15－9×1＝6，在 5 上寫 6，1、5 與 9 劃掉。

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{1}6 & \\
\cancel{6}\cancel{5}284 & 1 \\
\cancel{5}\cancel{9}4 &
\end{array}
$$

(4) 62－4×1＝58，在 6 上寫 5，2 上寫 8，6、2 與 4 劃掉。

$$
\begin{array}{r|l}
5 & \\
\cancel{1}\cancel{6}8 & \\
\cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}84 & 1 \\
\cancel{5}\cancel{9}\cancel{4} &
\end{array}
$$

(5) 寫上除數 594，得出第二個商數 0。

$$
\begin{array}{r|l}
5 & \\
\cancel{1}\cancel{6}8 & \\
\cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}84 & 10 \\
\cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}4 & \\
59 &
\end{array}
$$

(6) 因為商數 0，所以不必進行前面那些減的過程。把除數 594 劃掉，另在不同位置寫上除數 594，得出第三個商數 9。

$$
\begin{array}{r|l}
5 & \\
\cancel{1}\cancel{6}8 & \\
\cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}84 & 109 \\
\cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{4}4 & \\
\cancel{5}\cancel{9}9 & \\
5 &
\end{array}
$$

(7) 58－5×9＝13，在5上寫1，8上寫3，5、8與5劃掉。

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \cancel{5}3 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8} & \\ \cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}84 & 109 \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{4}4 & \\ \cancel{5}\cancel{9}9 & \\ \cancel{5} & \end{array}$$

(8) 138－9×9＝57，在3上寫5，8上寫7，1、3、8與9劃掉。

$$\begin{array}{r|l} \cancel{1}5 & \\ \cancel{5}\cancel{3} & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}7 & \\ \cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{8}4 & 109 \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{4}4 & \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{9} & \\ \cancel{5} & \end{array}$$

(9) 574－4×9＝538，在7上寫3，4上寫8，7、4與4劃掉。

$$\begin{array}{r|l} \cancel{1}5 & \\ \cancel{5}\cancel{3}3 & \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{7}8 & \\ \cancel{6}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{4} & 109 \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4} & \\ \cancel{5}\cancel{9}\cancel{9} & \\ \cancel{5} & \end{array}$$

由此得 65284 ÷ 594 的商爲 109 而餘數爲 538。

前面所提的帆船法，乍看起來非常麻煩，可是熟悉後就會發現它其實頗爲簡便，至少它比現代通用的除法演算要少寫許多字。西元十八世紀還有些數學家像德國的 Johann Christoph Heilbronner（1706～1747）都還喜歡使用這種方法。一個可能的原因，乃是這種演算不必佔用太大的面積，當紙張價格還昂貴時，這個原因是很有意義的。

這種方法稱爲帆船法，乃是因爲演算後所留下來的數，其排列形狀像一艘帆船。右圖乃是西元十六世紀一位義大利僧侶的作品中的一段，其中是以帆船法計算 965347655446 ÷ 6543218，得商 147534，餘數 531034。帆船法的形式在 Fibonacci 等人手上又有所改善，我們不再贅述。

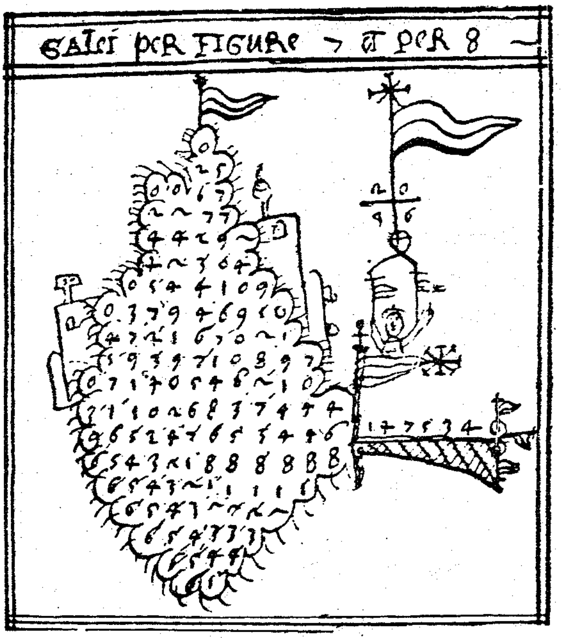


圖 6

現代算術中所使用的（長）除法，目前已無法考證其起自何時。不過，在許多阿拉伯與波斯的著作中可以看到像下表中之形式的除法演算（1729÷1 2，得商 144，餘數 1）：

	1	4	4	商
1 1 0	7 2	2	9	被除數
	5 4 1	8		
		4 4 0	8	
1	1 2	1 2	1 2	餘數 除數

Maximus Plaudes 在西元 1340 年左右所著的 Indian Arithmetic 中則有下述形式的除法演算（625÷25＝25）：

```
25）625（25
     4
  --------
     22
     10
  --------
     125
     10
  --------
      25
      25
     -----
```

其形式已非常接近現代的長除法，而 Plaudes 稱此種方法爲阿拉伯法。

西元十五世紀之後，長除法開始趨於普遍，到西元十七世紀時，差不多已取代了帆船法，當時稱此種方法爲 a danda（意思是 by giving），這個名稱的來源，乃是因爲

當某個部分乘積減掉後，都要把被除數的下一位移給餘數的緣故。有了Plaudes所提的方法，後世數學家只再做了兩項改進，第一：商數移到被除數上方，如此，小數點的位置隨著被除數的小數點自然確定；第二：商數的每一位數字與除數的（部分）乘積以一列寫出，如此，可使除法演算式不至於太長。

“÷”這個記號表示“除以”，最早出現的數學書籍乃是西元1659年Johann Rahn（1622～1676）所著的Teutsche Algebra，但是，這個記號被推介使用却是經由英國數學家John Pell（1610～1685）翻譯這本書後才為人所知的。而“：”這個記號用於表示除號，則是西元1684年德國數學家Gottfried Leibniz（1646～1716）才開始廣泛使用的；在這以前，這個記號曾被用來表示分數，即$\frac{3}{4}$寫成3：4。此外，也曾用來表示比例。

伍、開方法

古巴比倫人有平方表、立方表、平方根表與立方根表，他們也解過像「某數與其倒數之和為一已知數，求此數」這樣的二次方程式，可見巴比倫人也了解開方的方法。事實上，巴比倫人用來求平方根之近似值的方法，在近代數學中還在使用，這個方法是這樣的：設有一正數r，欲求$\sqrt{r}$。任選一正數a_1（a_1^2大於r較佳），令

$$a_2=\frac{1}{2}\left(a_1+\frac{r}{a_1}\right)$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(a_2+\frac{r}{a_2}\right)$$

$$\vdots$$

若$a_1^2>r$，則可得$\sqrt{r}<\cdots<a_3<a_2<a_1$，換言之，就做為$\sqrt{r}$的近似值來說，前面的$a_i$，一個比一個好（即，更接近$\sqrt{r}$）。例如，欲求$\sqrt{2}$，先選$a_1=1.6$，則得

$$a_2=1.425$$
$$a_3=1.414254\cdots\cdots$$

而$\sqrt{2}=1.414213\cdots$，可見a_3 的小數點後面已有四位與$\sqrt{2}$相同。古巴比倫人就是以這種方法來求平方根的近似值。

在中國方面，開平方與開立方的方法，早在九章算術的第四章（少廣）中就敍說得很詳盡，其中所使用的方法乃是根據$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$與$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$這兩個等式而來的。我們把九章算術中有關開方法的原文抄錄如下：

開平方

「術曰：置積爲實，借一算步之，超一等。議所得，以一乘所借一算爲法，而以除。除已，倍法爲定法。其復除，折法而下。復置借算，步之如初。以復議一乘之，所得副以加定法，以除。以所得副從定法，復除折下如前。若開之不盡者，爲不可開，當以面命之。若實有分者，通分內子爲定實，乃開之。訖，開其母，報除。若母不可開者，又以母再乘定實，乃開之。訖，令如母而一。」

開立方

「術曰：置積爲實，借一算步之，超二等。議所得，以再乘所借一算爲法，而除之。除已，三之爲定法。復除折而下，以三乘所得數置中行，復借一算置下行。步之，中超一，下超二位。復置議，以一乘中，再乘下，皆副以加定法，以定法除。除已，倍下并中從定法，復除折下如前。開之不盡者，亦爲不可開。若積有分者，通分內子爲定實，定實乃開之。訖，開其母以報除。若母不可開者，又以母再乘定實，乃開之。訖，令如母而一。」

下面我們以「求三千四百三十二萬八千一百二十五的立方根」爲例，來解說九章算術中的開立方法。

								商
3	4	3	2	8	1	2	5	實
								定法
							1	借算

(1) 置積爲實，借一算步之。

								商
3	4	3	2	8	1	2	5	實
								定法
1								借算

(2) 超二等。（借算連續超二位，可知上商有三位）。

3	商
34328125	實
	定法
1	借算

(3)　議所得。（三的三次方二十七較借算左方的實三十四爲小，故可得商三。於上商格中借算的上方置商三。）

3	商
7328125	實
	定法
1	借算

(4)　以再乘所借一算爲法，而除之。（拿議得的商三的再乘九乘以借算一爲法，除實三十四，得商三；由實中減去 $9\times3=27$，餘 7。）

3	商
7328125	實
27	定法
1	借算

(5)　除已，三之爲定法。（除後，將上面除三十四的法九用三乘，置於定法格中借算的上方。）

3	商
7328125	實
27	定法
1	借算

(6)　復除折而下。（定法一退，借算三退。）

3	商
7328125	實
27	定法
9	中行
1	下行
1	借算

(7)　以三乘所得數置中行，復借一算置下行。

3	商
7328125	實
27	定法
9	中行
1	下行
1	借算

(8)　步之，中超一，下超二位。

3　2	商
7328125	實
27	定法
18	中行
4	下行
1	借算

(9) 復置議，以一乘中，再乘下。（以定法二千七百除實七千三百二十八，可得商二。於上商格中借算的上方置續商二。以續商二的一乘乘中行的九，續商二的二乘乘下行的借算一。）

3　2	商
7328125	實
2884	定法
18	中行
4	下行
1	借算

(10) 皆副以加定法。（將前面中行乘得的十八，下行乘得的四，分別置於定法的右方，加起來共成一個定法。）

3　2	商
1560125	實
2884	定法
18	中行
4	下行
1	借算

(11) 以定法除。（以定法二千八百八十四除實七千三百二十八，得商二，餘一千五百六十。）

3　2	商
1560125	實
3072	定法
	中行
	下行
1	借算

(12) 除已，倍下并中從定法。（除後，將下行的四加倍，連同中行的十八一起加入定法中。）

復除折下如前。（前面所得的(12)與(5)的形式相同，仿照前面的(6)～(12)，即可得下面的(13)～(19)，開立方過程就完成了。）

3 2	商
1560125	實
3072	定法
	中行
	下行
1	借算

⒀

3 2	商
1560125	實
3072	定法
96	中行
1	下行
1	借算

⒁

3 2 5	商
1560125	實
3072	定法
96	中行
1	下行
1	借算

⒂

3 2 5	商
1560125	實
3072	定法
480	中行
25	下行
1	借算

⒃

3 2 5	商
1560125	實
312025	定法
480	中行
25	下行
1	借算

⒄

3 2 5	商
	實
312025	定法
480	中行
25	下行
1	借算

⒅

3 2 5	商
	實
	定法
	中行
	下行
	借算

⒆

九章算術中的開方法的敘述，與現代數學中解方程式時的倍根變換與減根變換之原理相合。正因爲如此，唐、宋、元朝的中國數學家才得以很容易地推廣成高次方程式的解法，而近代數學中解方程式的Horner 方法，中國的賈憲（西元十一世紀）比英國的William Horner（1786～1837）早了八百年就已發現。

希臘方面，Euclid（紀元前三世紀）在其曠世名著Elements第二卷中就利用幾何方法提出了$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$這個等式。利用這個關係式，Theon of Alexandria （西元四世紀）提出了開平方法，他把平方根的近似值以六十進位法表示，所以，做了下面這段說明（括號內以$\sqrt{4500}$作解釋）：

「當我們要計算（4500的）平方根時，先找出最接近的平方數的平方根（67）。將餘數（$4500-67^2=11$）化成分（$660'$），以前面所得的平方根（67)兩倍後去除餘數（得商$4'$及餘數$124'$）。將新得的餘數化成秒後再減去商的平方（$16''$）。最後，將前面所得的差（$7424''$）除以前面所得的度與分（$67°4'$）之兩倍，得出一商（$55''$）。如此，所得的度、分、秒（$67°4'55''$）就是所要的平方根近似值。」

Theon的做法已經掌握了開平方的精義了，以現代符號表示，可以說明如下：設b與c爲整數，$0\leqslant b, c<60$，且

$$r=\left(a+\frac{b}{60}+\frac{c}{60^2}\right)^2$$

$$=a^2+2a\times\frac{b}{60}+\frac{b^2}{60^2}+2\left(a+\frac{b}{60}\right)\times\frac{c}{60^2}+\frac{c^2}{60^4}$$

$r=4500$時，$a=67$，於是，

$$b=\frac{60(r-a^2)}{2a}\text{的商}=\frac{660}{134}\text{的商}=4$$

$$c=\frac{60(60(r-a^2)-2ab)-b^2}{2\left(a+\frac{b}{60}\right)}\text{的商}=\frac{7424}{\frac{8048}{60}}\text{的商}=55$$

希臘人的開平方法傳入印度與阿拉伯後，方法上沒有特殊的改進。所以，印度數學家Bhāskara在他的著作Lilāvati中對開平方法的敘述如下（括號內以$\sqrt{88209}$ 做解說）：

「從右邊數起的最後一個奇數位數（8）中，減去最大的平方數（4）。將此平方數的平方根（2）兩倍後，去除前面的偶數位數（正確的說法，應該是平方根2乘以

20後去除482），得出一個商（9），所得餘數再減去商的平方（81）。」

Bhāskara 的敘述有些語焉不詳，不過，他的說法大抵上很接近現代所使用的開平方法。

西元1881年，有位農夫在巴基斯坦北部的Peshawar附近一個叫做Bakhshāli的村莊，挖出了一份數學作品，其中只殘留七十頁。印度政府將它付印並請人做評介，不過，對它的著作年代與作者都無可考。在這份稱爲Bakhshāli manuscript的作品中，發現了一個平方根的近似值公式，以現代術語表示，就是

$$\sqrt{a^2+r} \doteqdot a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)}$$

上述右端的前兩項倒是與函數$\sqrt{x}$在$x=a^2$處的冪級數展開式相合，但第三項則略有出入，不知原作者是如何導出來的。依$\sqrt{x}$在$x=a^2$處的冪級數展開式，應是

$$\sqrt{a^2+r} \doteqdot a+\frac{r}{2a}-\frac{r^2}{8a^3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\cdot\frac{r^n}{a^{2n-1}}$$

同時，在Bakhshāli manuscript上，作者以上述公式求$\sqrt{41}$的近似值，他令$a=6$，$r=5$，則得

$$\begin{aligned} a+\frac{r}{2a}-\frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a+\frac{r}{2a}\right)} &= 6+\frac{5}{12}-\frac{25}{1848} \\ &= 6.403138\cdots \end{aligned}$$

此值與$\sqrt{41}=6.403124\cdots$已有四位小數相同。

在求平方根方面，Maximus Plaudes在其Indian Arithmetic中所用的方法是

$$\sqrt{a^2+r} \doteqdot a+\frac{r}{2a}$$

換言之，只是根據函數$\sqrt{x}$在$x=a^2$處的冪級數展開式的前兩項。

印刷術發明之初，許多數學家喜歡模仿除法演算中的帆船法來做開平方的演算。下面這個例子是Pacioli在其著作Sūma中所舉的一個例子：

$$
\begin{array}{r|l}
99980001 & 9 \\
9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & \\
\cancel{9}\cancel{9}980001 & 9 \\
\cancel{9} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
18 & \\
\cancel{9}\cancel{9}980001 & 99 \\
\cancel{9}89 & \\
1 &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \\
\cancel{2} & \\
0\cancel{9}9 & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}7 & \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}0001 & 99 \\
\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9} & \\
\cancel{1} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
1 & \\
\cancel{2} & \\
0\cancel{9}9 & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}7 & \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}0001 & 999 \\
\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9}89 & \\
\cancel{1}19 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
01 & \\
\cancel{1}\cancel{2}7 & \\
\cancel{2}\cancel{0}\cancel{8} & \\
0\cancel{9}\cancel{9}\cancel{6}9 & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{8}9 & \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{0}001 & 999 \\
\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9} & \\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{9} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r|l}
01 & \\
\cancel{1}\cancel{2}7 & \\
\cancel{2}\cancel{0}\cancel{8} & \\
0\cancel{9}\cancel{9}\cancel{6}9 & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{8}9 & \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{0}01 & 9999 \\
\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{8}989 & \\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{9}99 & \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
00 & \\
0\cancel{1}\cancel{8} & \\
\cancel{1}\cancel{2}\cancel{7}0 & \\
\cancel{2}\cancel{0}\cancel{8}\cancel{8}0 & \\
0\cancel{9}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{9}\cancel{8}0 & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{7}8\cancel{9}\cancel{8}0 & \\
\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{1} & 9999 \\
\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{9} & \\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9} & \\
\cancel{1} &
\end{array}
$$

由此，他得出 $\sqrt{99980001}=9999$。

西元十六世紀以後，帆船法逐漸被淘汰。開方的演算逐漸接近現代數學中所使用的形式。開方法較接近現代形式的最早作品，是義大利數學家 Cataneo 在西元 1546 年的著作 Pratiche，其中的寫法如下：

```
54756(234
4
---
14          第一次兩倍 4
12          第二次兩倍 46
---
 27
  9
---
 185
 184
---
   16
   16
---
    0
```

與現代開方之形式完全相同的寫法，最早出現在義大利數學家 Pietro Antonio Cataldi（1548～1626）在西元 1613 年的著作 Trattato dei numeri perfetti 之中。不過，Cataldi 還沒有使用兩位一撇的撇節法。

早期的作者們，在計算平方根與立方根時，大都只把開方“法”指示出來，而沒有做充分的解釋，最多只是說根據 $(a+b)^2$ 與 $(a+b)^3$ 的展開式而已。所以，Joannes Buteo（1492？～1572？）在他西元 1559 年的著作 Logistica 中說，求立方根時，除了第一個數字之外，其他數字簡直無從着手。因此，他主張應該製作立方根表。下面這個近似值公式是他製作立方根表時所用的（他的立方根表含 1 至 40^3 的立方根）：

$$\sqrt[3]{a^3+r} \doteqdot a+\frac{r}{3a^2+3a}$$

談到開立方的困難，還有一則小趣事。法國數學家 Thomas-Fantel de Lagny（1660～1734）在他西元 1692 年的著作 Nouveaux Élémens d'Arithmétique et d'Algebre 中說：對大多數人來說，要計算 696，536，483，318，640，035，073，641，037 的立方根，都需要超過一個月的時間。如果開立方法的原理還沒弄清楚，又沒有適當的計算器械來協助，這話或許不算危言聳聽吧！這個數的立方根為 886437165.3…。以目前來說，只利用袖珍電算器，個把鐘頭就可以得出這個值了。

西元十六世紀的數學家像英國的 Cuthbert Tonstall（1474～1559）、法國的 Ian Trenchant、荷蘭的 Gemma Frisius（1508～1555）等人，都曾以幾何圖形來解說開平方法的原理。這種幾何意義，乃是源自於「已知正方形之面積，而欲求其邊長」的問題。若正方形的面積為 r，則其邊長自然是 $\sqrt{r}$。如果我們選取一個最接近 r 的

平方數 a^2 ，則相當於從已知面積之正方形中割去一個邊長為 a 的較小正方形，則圖 7 中所剩下的 L 形圖的面積為 $r-a^2$，而且此圖形可以分成兩個全等的長方形與一個小正方形。由於兩全等長方形的一邊為 a，所以，其另一邊長 b 可選為最接近 $\frac{r-a^2}{2a}$ 的（整）數，通常都選為 $\frac{r-a^2}{2a}$ 的商。若其餘數 $r-a^2-2ab$ 再減去 b^2 後，所得的差不為 0，即 $r\neq(a+b)^2$ ，則表示原正方形割去一個邊長為 $a+b$ 的正方形後，還剩下一個更細的 L 形圖。那就需要仿照前面的方法，利用 $\frac{r-(a+b)^2}{2(a+b)}$ 來決定 L 形的寬，如此繼續進行，這就是開平方法的幾何意義。

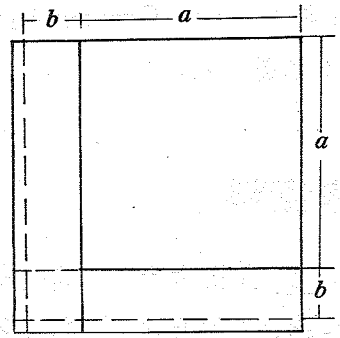


圖 7

至於開立方法，也可以利用正立方體與長方體的體積來做幾何解說，這種解說在英國數學家Robert Recorde（1510～1558）所著的Ground of Artes（西元 1542 年）的 1646 年版本中就有。

當平方根與立方根的求法原理弄清楚之後，數學家們像德國的Michael Stifel（1487～1567）、德國的 Johann Scheubel（1494～1570）等進一步地利用二項式定理說明了高次方根的求法，例如，Scheubel 曾經求過 1,152，921，504，606，846，976 的十次方根（64），甚至討論過二十四次方根。

最後，我們談談方根這個名稱。在古代的中國，開方所得的結果，並沒有“根”這樣的稱呼；因為古中國的開平方及開立方，都是與「已知正方形面積或正方體體積而求邊長」這種幾何問題有關，所以，所得的結果就直說其為邊長就可以了。古拉丁的學者，也與中國的情形相似，都以幾何觀點來處理開平方與開立方問題，所以，開方所得的結果稱為 latus；而阿拉伯人却是由平方數的觀念來引進方根，也就是說，從算術或代數的觀點來討論方根，所以，開方所得的結果稱為 radix，由此才有英文中的 root；而中國數學中“方根”這個名稱，可能也是沿襲阿拉伯人的用法而來的。

“$\sqrt[n]{\ }$”這個記號，最早出現在Christoph Rudolff（1500～1545）的著作 Coss 之中（西元 1525 年），不過，當時還沒有加上表示方根之次數的數字。$\sqrt[n]{\ }$ 這個記號的被接受與使用，則是在德國數學家Michael Stifel（1487～1567）將這本書重編（西元 1553 年）之後的事。然而，這個記號的普遍採用，則為時甚晚；在西元

1691年Jacques Ozanam（1640～1717）編寫Dictionnaire Mathematique時，$\sqrt[3]{a^2b}$都還寫成$\sqrt{}$ *C.aab*。

參考資料

1. 李儼：中國古代數學簡史，九章出版社。
2. 李約瑟（傅溥譯）：中國之科學與文明，第四册，臺灣商務印書館，民國六十四年九月修訂一版。
3. 傅溥：中國數學攬勝，幼獅文化事業公司，民國六十七年十二月。
4. 戴震校：算經十書，臺灣商務印書館。
5. Eves, H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and Company Inc., 1953.
6. Gow, J., A short history of Greek mathematics, Chelsea Publication Company, 1968.
7. Smith, D.E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publication, Inc., 1953.
8. Srinivasiengar, C.N., The history of ancient Indian mathematics, The World Press Private LTD., 1967.