青少年的比例概念發展

林福來
國立臺灣師範大學數學系

壹、層次（hierarchy）的涵義

數學教學中有一個很基本的問題，即學生們在什麼時候，應該讓他們如何地學些什麼？

關於這問題的處理，數學教育工作者通常以層次來表示學習次序。描述一個數學概念或單元教材的層次次序，依照不同的取向標準，有三種不同的涵義：

(1) 以學習者取向的學習序列或理解序列。

(2) 教師採取的教學序列。

(3) 在教材中的邏輯序列。

一個數學概念，分別以學習者取向、教師取向及教材地位取向，來描述此概念的發展次序，三者不見得會互相脗合。很可能一位學科專家所分析出來的教學序列，與學生心目中最自然的學習次序根本就不配合。例如，關於數的四則運算，我們的教學次序是加、減、乘、除。除向來都是最後才教，除法的教學與教材地位次序，都在乘法之後。不過，英國研究中學生數學理解力的CSMS小組，測驗學童“數的運算”與“小數的概念”後，發現從英國學童的觀點來看，四則運算的易難次序是加、減、除、乘。（Hart. 1981a, P.211.〔3〕).

要使學生的學習能夠成功，上述三種不同取向所分析得到的序列間必須密切的配合，才容易達成。教學序列與邏輯序列都可以經由了解整套教材的教師或專家分析決定。Gagne（1968，參閱〔4〕）所擬議的學習階層（learning hierarchy）就是要配合此兩種序列，來建立每一個數學概念及單元的學習序列。

以學習者爲中心來探討學習序列及理解力的成長過程，則是近年來數學教育工作者致力研究的方向。此類研究的基本精神是一切資料都該由學生的回答及思考過程中取得。期望能配合學生的認知發展來安排教材，以促進學習的效果。主要的研究精神深受Piaget 式研究的影響。

在本文中，我們將以比例的概念發展爲例，報導向來的研究者，如何以學習者爲中心來建立比例概念發展的層次。在這些研究報告中，Noelting 及CSMS的分析，我們將描述得較詳細，以便比較這兩種不同的表現方式。不同的表現方式來自不同取向的資料分析。以我國目前的教育環境，是否必要及如何進行此類的研究，是本文內藏的目的。

貳、認知發展的層次

Piaget 的認知發展論中，探討認知發展層次的方式是，以一個問題來研究一羣不同年齡的小孩對此問題的反應，以另一個問題來研究另一群小孩；然後將不同問題及不同小孩的回答及思考過程經挑選後，都以同樣的一組層次模式整理出來。這組層次就是前操作期，具體操作前期、後期，形式操作前期、後期。在同一階層內的思考操作行爲、概念、技巧都具有統一的特性。（參閱Piaget 的著名代表作：從小孩到青少年的邏輯思考的成長。〔7〕）

Piaget 的理論中，認爲小孩的認知發展不僅與他們的智力成長有關，同時也跟身體成長相關，所以小孩的認知發展層次跟年齡密不可分。

德國數學教育家Van Hieles（參閱Wirszup（1976）），探討幾何學的概念發展時，提出一種不同於Piaget 的認知發展層次的模式。Van Hieles 的概念發展層次都是以普通的教學名詞來描述。幾何學的五個發展層次如下：

第一層：能根據外形來區別幾何圖形。例如，正方形在此層次內將被視爲不是菱形。

第二層：能認識圖形中或不同圖形間的各部分的關係。

第三層：能建立圖形的性質，並能將各種性質邏輯排列。

第四層：能演繹證明幾何性質。

第五層：能不必依賴圖形，抽象地處理幾何問題。

Van Hieles 強調教學必需配合學生的幾何概念層次。一個老師所教的幾何層次如果高於學生的認知層次，對學生而言將毫無意義。Van Hieles 認爲學習的過程應是不連續的；幾何學的五個層次學了一個層次之後，停一段時間，等更成熟之後，再開始學

高一層次的教材，效果才會好。

Van Hieles 的理論，蘇俄引進後做了教學實驗，發現配合 Van Hieles 的理論進行幾何教學，8年的教學效果相當於傳統方式11年的教學效果。Van Hieles 的理論目前在美國也相當受教學研究者重視。（參閱 Wirszup 1976）。

參、比例概念的發展層次

應用 Piaget 的理論進行的研究有很多方向，例如探討到達某一層次的一般年齡，解某些問題所需的推理能力是什麼等等。這些研究者的一個基本共識是，如果能夠測出小孩的認知發展層次，教學就可跟它配合。

Renner 和 Paske（1977）〔14〕爲了了解到底有多少青、少年能夠進行形式操作期的思考，選擇「比例的推理」代表形式操作期的思考能力，來測大學生。

Renner 他們設計的比例問題是：在某天的同一時刻，測一建築物與一旗桿的影長。建築物的影長是 50 公尺，旗桿的影長是 2 公尺，旗桿長是 3 公尺，求建築物的高度?

Renner 將每人的回答包括錯誤類型仔細分析後，區分學生的答案成 7 個層次。範疇（catagory，以縮寫 C 代表）是 Renner 用來表示層次的名詞，分析的結果如下：

C. 1 & C. 2：天眞（naive）的回答，包括不相干與揑造的數字。

C. 3：知道二物的高度間有關係，但答案是 $51 = 50 + (3 - 2)$。

C. 4：知道比值 3：2，但沒求出正確答案。

C. 5：知道比值 3：2，但比值用錯了，求 50 的 $\frac{2}{3}$。

C. 6：正確使用比值。

C. 7：正確使用比值之外，還能考慮問題中的其他變因，“某天的同一時刻”。

Renner 的實驗結果，發現只有少數的大學生能運作形式操作期的思考，或能感受形式操作期的推理操作有用。

Karplus（〔8〕），1970）從 70 年代起，十多年一直有比例推理能力的研究報告（參閱〔9〕Karplus，1980）。

Karplus 早期設計的比例題目是「高先生、矮先生」的身高問題：

高、矮先生以銅板來量，分別有 6 個與 4 個銅板高，如果以小廻紋針來量，矮先生有 6 根廻紋針高，那麼高先生有多少根廻紋針高？

Karplus這道比例題的面測，在美國實驗外，還在七個其他國家實驗過。國內黃湘武教授等〔2〕，也曾以此題測過國內三間不同教育環境的國中生。Karplus分析學生的回答，包括錯誤型態，然後根據同樣的小孩，兩年後對同一問題的回答做爲區分層次的標準，結果如下，其中代表各層次的英文字母，都是描述該層次特性的關鍵字眼。

N：不會做任何說明。

I：直覺地或猜測式地回答。

IC：不合理地使用數據，表現不正確的推理。

A：知道使用所有數據，但應用“差”替代“比”，即答案是
$8=6+(6-4)$。（註：即加法策略）

S：知道是乘法運算，但乘的數錯了。（90％ 此層次的學生乘以2倍）

AS：加法與乘法混用。例如“我想2個矮先生跟一個高先生等高，所以對於多出的2個高先生，就加上4個矮先生”。

P：正確使用比值。

Karplus對於這些層次的高低次序，說明如下：

(1) AS和P比其他層次高，因爲28％ 其他層次的學生，兩年後再測時，移至此層次內。

(2) I和IC是最Naive的答案，因爲此二層次內65％ 的學生，兩年後移至其他層次。

(3) A和S沒有線性關係，因爲兩年後由A移至S與由S移至A的人數相等。

(4) A在Piaget的理論系統中屬於具體操作的後期。但是由於在其他7個國家中實驗的結果，發現很少學生屬於這一階層（參閱〔4〕）。因此，Karplus不認爲A應該形成一個思考的層次。

國內黃湘武教授等〔2〕，將國中生的面測回答，分成下列四個層次，其中的英文字母也是代表描述該層次特性的關鍵字眼。

I：猜測式的回答。

A：利用加法策略來求答案，即回答$8=6+(6-4)$。

T：知道比值，但是沒有正確使用它。

R：正確利用比值。

近年來，比較完整的“比例推理能力”測驗當推加拿大Noelting（1980a，1980b）所設計的「橘子水問題」：有兩壺橘子水，一壺是2杯橘子汁對5杯水調出來的，另一

壺是3杯橘子汁對6杯水調出來的，那一壺的橘子味濃？這是橘子水問題的基本型式。橘子汁與水的比任意改變，即形成一組包含各種程度的比例推理測驗。Noelting 選取來做分析對象的受測者，包括6歲到16歲的學生共319位。Noelting的分析完全嵌入Piaget 的理論架構中。對照於Piaget 的認知發展層次，Noelting 將比例推理能力的層次完全以Piaget 的層次模式及代號表示。

Noelting 的分析是我們所要討論的一種資料分析方式，特另成一節來討論。

肆、Noelting的比例推理能力分析

在Noelting（1980a，1980b）的報告中，主要的資料分析有下列幾項：

一、題目層次與特性，達到該層次的年齡。

二、學生的解題策略。

三、各層次題目的結構。

四、各層次題目結構間的包含關係。

五、低層次的結構如何強化成為高層次的結構？

分述於下：

一、題目層次與特性

Noelting 以319 位受測者答對題目的比率定義該題的難易度，然後利用統計方法將一組23個題目分成不同的層次。根據每一層次的題目，將其特性描述出來。再考慮小孩的推理能力達到該層次的年齡，以50％以上的該年齡的兒童能夠正確回答此層次的問題一個以上者為準。所得結果如下，其中典型題的數對（4，1） 代表4杯橘子汁對1杯水。

（表見第12頁）

層次	名稱	年齡（年；月）	典型題	特性	難易度
I A	直觀前期	（3；6）	（4，1） vs.（1，4）	只比較第一項	$\frac{319}{319}$
I B	直觀中期	（6；4）	（1，2） vs.（1，5）	發現第一項相等再比較第二項	$\frac{305}{319} \sim \frac{311}{319}$
I C	直觀後期	（7；0）	（3，4） vs.（2，1）	兩數對內的元素關係相反	$\frac{291}{319} \sim \frac{297}{319}$
II A	具體操作前期	（8；1）	（1，1） vs.（2，2）	（1，1）的等價類	$\frac{231}{319} \sim \frac{251}{319}$
II B	具體操作後期	（10；5）	（2，3） vs.（4，6）	任意比的等價類	$\frac{156}{319} \sim \frac{186}{319}$
III A	形式操作前期	（12；2）	（1，3） vs.（2，5）	兩個比例中，對應項有一個是另一個的倍數	$\frac{59}{319} \sim \frac{141}{319}$
III B	形式操作後期	（15；10）	（3，5） vs.（5，8）	任意比值	$\frac{51}{319}\downarrow$

形式操作前期的題目難易度的範圍很大，Noelting 又將其分成 III A_1 及 III A_2，難易度分別是 $\frac{88}{319} \sim \frac{141}{319}$ 與 $\frac{59}{319} \sim \frac{87}{319}$。

二、解題策略

Noelting 將一個題目中的兩種橘子汁分別以數對（a，b）與（c，d）表示，a，c 表示橘子汁的杯數，b，d 表示水的杯數。小孩的解題策略基本上又分成兩類，稱爲內策略（within strategy）與交策略（between strategy）。小孩的回答如果是根據（a，b）中 a 與 b 的關係及（c，d）中 c 與 d 的關係來決定的叫做內策略。如果是根據 a，c 與 b，d 的關係就叫做交策略，例如在（1，3） vs.（2，5） 這個題目中，兩個

小孩的推理過程如下，其中A代表（1，3），B代表（2，5）。

甲同學（16歲）：「A壺中1杯橘子汁有3杯水，如果有2杯橘子汁就有6杯水。B壺中只有5杯水，所以選B」。

甲同學的推理關鍵是掌握A，B兩壺的橘子汁杯數，當兩者相等時，再比較兩壺的摻水杯數，這是交策略。以符號表示如下：

$$\begin{array}{rl|l}
 & ma = c & 2\cdot 1 = 2 \\
 & m(a,b) = (ma, mb) & 2(1,3) = (2,6) \\
 & ma = c,\ mb > d & 2\cdot 1 = 2,\ 2\cdot 3 > 5 \\
\Rightarrow & (a,b) < (b,d) & \Rightarrow\ (1,3) < (2,5)
\end{array}$$

乙同學（14歲）：「A中，1杯橘子汁加3杯水。而在B中1杯橘子汁只加2杯半的水」。

乙同學的推理過程，根據的是A，B兩壺內的橘子汁與水的比，這是內策略。以符號表示如下：

$$\begin{array}{rl|l}
 & \frac{b}{a} = 3 & \frac{3}{1} = 3 \\
 & \frac{d}{c} = 2\frac{1}{2} & \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2} \\
 & \frac{b}{a} > \frac{d}{c} & \frac{3}{1} > \frac{5}{2} \\
\Rightarrow & (a,b) < (c,d) & \Rightarrow\ (1,3) < (2,5)
\end{array}$$

按照上述的分析方法，Noelting 得到各層次的學生，他們的解題策略可以用符號表示如下：

（表見第14頁）

Noelting橘子汁問題的解題策略

層 次	代 表 題 (a,b)vs.(c,d)	交 策 略	內 策 略
I A	(1,4)vs.(4,1)	$c > a \Rightarrow (c,d) > (a,b)$	
I B	(1,5)vs.(1,2)	$a = c,\ b > d$ $\Rightarrow (c,d) > (a,b)$	
I C	(2,2)vs.(3,4)		$a = b,\ c < d$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$
II A	(2,2)vs.(3,3)	$a = b,\ c = d$ $m/n(a,a) = (c,c)$ $\Rightarrow (a,b) = (c,d)$	$a/b = c/d = 1/1$ $\Rightarrow (a,b) = (c,d)$
II B	(1,2)vs.(2,4)	$m/n\ (a,b) = (c,d)$ $\Rightarrow (a,b) = (c,d)$	$a/b = c/d$ $\Rightarrow (a,b) = (c,d)$
III A 1	(2,1)vs.(4,3)	$mb = d$ $m(a,b) = (ma, mb)$ $ma > c,\ mb = d$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$	$a/b = 2$ $c/d = 1 + \frac{1}{d}$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$
III A 2	(4,2)vs.(5,3)	$(a,b)/b = (a/b,\ 1)$ $m \cdot 1 = d$ 再仿 III A 1 來解	$a/b = 2$ $c/d = 1 + \frac{?}{d}$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$
	(3,2)vs.(4,3)	$(a,b) = (b,b) + (e,0)$ $(c,d) = (d,d) + (e,0)$ $(b+b) < (d+d)$ $\frac{e}{b+b} > \frac{e}{d+d}$	$a/b = 1 + \frac{1}{b}$ $c/d = 1 + \frac{1}{d}$ $d > b,\ \frac{1}{d} < \frac{1}{b}$ $1 + \frac{1}{b} > 1 + \frac{1}{d}$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$
III B	(5,2)vs.(7,3)	$5 + 2 = 7$ $7 + 3 = 10$ $10(5,7) = (50,\ 70)$ $7(7,10) = (49,\ 70)$ $(50,70) > (49,70)$ $\Rightarrow (5,2) > (7,3)$	$100\,a \div b = x\%$ $100\,c \div d = y\%$ $x\% > y\%$ $\Rightarrow (a,b) > (c,d)$

在Noelting 的解題策略分析中，我們可以看出將比例與百分比的概念統整的能力，要等到形式操作後期才能運作。等價的比值間，以通分、約分的方法來做比較的能力是在具體操作期發展成的。任意比值與分數的通分兩者間的統整能力，也是在形式操作期才達成。

形式操作前期，即ⅢA1，ⅢA2，解題的一特性，是將兩個比值中相等的部分拿掉，降低元素的量後再做比較。

三、題目的結構

Noelting 利用題目（a，b） vs. （c，d）中，a，b，c，d 間的內比關係：aRb 與 cRd 以及交比關係：aRc 與 bRd 等四種關係來描述各層次的問題的結構。結果如下：

Noelting 橘子水問題的結構

層 次	代 表 題 (a，b） vs.（c，d）	交 比 關 係 { aRc， bRd	內 比 關 係 aRb， cRd }
ⅠA	(1，4） vs.（4，1）	$\{a<c,\ b\geqslant d\}$	
ⅠB	(1，5） vs.（1，2）	$\{a=c,\ b>d\}$	
ⅠC	(2，2） vs.（3，4）	$\{a<c,\ b<d,$	$a=b,\ c<d\}$
ⅡA	(2，2） vs.（3，3）	$\{m/n\ a=c,\ m/n\ b=d,$	$a=b,\ c=d\}$
ⅡB	(2，3） vs.（4，6）	$\{m/n\ a=c,\ m/n\ b=d,$	$na\neq b,\ nc\neq d\}$
ⅢA1	(1，3） vs.（2，5）	$\{ma=c,\ mb\neq d,$	$na=b,\ nc\neq d\}$
ⅢA2	(4，2） vs.（5，3）	$\{m/n\ a\neq c,\ m/n\ b=d,$	$a=nb,\ c\neq nd\}$
ⅢB	(3，5） vs.（5，8）	$\{ma\neq c,\ mb\neq d,$	$na\neq b,\ nb\neq d\}$

四、相鄰層次的結構間的包含關係

Noelting 利用各層次問題的結構以及各層次的解題策略兩項資料來證明低層次的問題結構都包含於較高一個層次的問題的結構中。解題策略包括各層次的錯誤分析。例如：

在 IA 層次的學生只比較（a，b） vs.（c，d） 中的第一項 a 與 c，不管第二項，

因此對於（1，5）vs.（1，2）這種IB層次的題目，IA的學生說一樣酸。而IB的學生在發現第一項 a＝c 之後，接著還看第二項 b 與 d 的關係，IB 的學生已了解水對於橘子水的酸味具有負作用，愈多水愈不酸。因此

IA：{比較第一項，不管第二項}⊂IB：{比較第一項相等，再比較第二項}

IA的學生說（1，5）（1，2）一樣酸，是上述關係成立的重要資料。

五、強化過程

利用一個層次內問題的結構以及解題策略，可以證明各個層次都可嵌入於另一個層次內，亦即每一個層次都是較高一層次的特別形式。接下來的問題是，低層次的結構如何強化為高層次的結構？

強化的過程，簡單地說，就是一個學生如果已經成功地解答 x 層次的問題，當他面對較高層次的問題時，如果他仍然以 x 層次的解題策略來處理此問題，那麼策略與問題之間只形成部分對應（partial correspondence），解題就會失敗。解題策略的修正動機就此引起，面對新問題需要修正的可能是概念、技巧或方法，等到調整後的策略與新問題間形成完全的對應（complete correspondence），解題才能成功。例如，一個初學分數的學生，面對分數的問題時。一開始可能會將他所熟悉的自然數規則套到分數的問題，而認為$\frac{4}{9}$比$\frac{2}{3}$大，因為 9，4 看起來都比 3，2 大。此時如果適當地引導他，比如說讓他操作具體物以加強分數的概念，他會發現$\frac{4}{9}$比$\frac{2}{3}$小。此時對他就造成認知衝突（cognitive conflict），而產生不平衡（nonbalance）。必須經過若干個步驟的修正自然數的概念，以配合新的問題：分數，才能再獲得均衡（equibilibration）。這些修正的步驟主要是為了適應新問題而修正結構的，所以有個直譯名稱叫做強化結構來適應（adaptive restructuring）。

造成不平衡的根源來自外界（新問題），但是修正的過程及強化結構以達成一個較高層次的策略，則完全是受測人的內在活動。此活動必須受測人具有相當理解力始能進行，當受測人面對新問題回答說「我不知道」時，表示新問題對他而言可能太難或者問題的表現方式使他無法進行策略的調整。如果說"我懂了"，即表示他已適當地修正了策略以處理新問題。

強化結構的資源，一方面來自受測人與新問題間，連續的交互作用，另一方面則是新問題的自治（autonomy） 情形。一個新問題，含有對受測人而言是熟悉的部分，以及是新鮮的部分。修正原層次的解題策略，逐漸達到均衡（equilibrium）的進程，可以歸納如下：

1. 新問題中的數據，經由可認同的基模（schemes）或行爲加以同化（assimilated）。
2. 不熟悉的新數據，在低層次的架構作用下產生“騷動”（disturbance）。
3. 受測人對於“騷動”的反應是一系列的“調整”（compensation）。
4. 調整的進程不是單一的步驟，而是包含幾個連續且可區分的步驟。

在Noelting的橘子水問題中，Noelting將調整的進程區分爲四個階段：

α-階：專心於問題中熟悉的部分，忽略新的部分。

σ-階：區分（differentiation）和組合（combination） 問題中新的部分，提起對新的元素的注意。

ρ-階：區分與組合問題中各元素間的關係。

γ-階：區分與組合相同題材所具的概念。

換句話說，α-階對應於注意力，σ- 階對應於數對中對應項的比較（區分），ρ-階對應於數對內兩項的關係或數對間對應項關係的區分與組合，γ-階對應於策略與問題間的均衡而形成的概念的區分與組合。

在這裡Noelting所沿用的仍然是Piaget的名詞：α-階、β-階、γ-階。不過，Noelting在此實驗中將β-階又分成σ-階與ρ-階。（參閱〔11〕Noelting 1980b）

Noelting依照α-階、σ-階、ρ-階、和γ-階將層次ⅠA到層次ⅢB 恰好分成兩個週期，ⅠA至ⅡA形成週期Ⅰ，ⅡA至ⅢB形成週期Ⅱ。結果如下：

見第18，19頁

週期Ⅰ

週期Ⅱ

週　期 I

層　次	典　型　題	調　整　進　程	策　略
IA α-階	(1,4) vs. (4,1)	(1,4)　(4,1) < 比較兩數對間的第1與第2項	a < c ⇒ (a,b) < (c,d)
IB σ-階	(1,5) vs. (1,2)	(1,5)　(1,2) > 比較內關係與交關係	a = c， b > d ⇒ (a,b) < (c,d)
IC ρ-階	(2,1) vs. (3,4)	(2,1)　(3,4) >　< > 統整內、交關係，建立比與量的概念	a > b， c < d ⇒ (a,b) > (c,d)
ⅡA γ-階	(1,1) vs. (2,2)	(1,1)　(2,2) =　= ×2	m(1,1) = (m,m) = (c,d) ⇒ (a,b) = (c,d)

在ⅡA所建立的概念中，1：1與2：2 這兩個比的比值一樣，兩個比等價，但是量(quantity) 不同，即考慮的橘子汁與水的量不同。在ⅡA時，已了解比例的邏輯性質。

週　期　II

層次	典型題	調整進程	策略
II A α-階	(1,1) vs. (2,2)	$(1,1)\xrightarrow{\times 2}(2,2)$ 區分數對內的項	$m(1,1)=(m,m)=(c,d)$ $\Rightarrow (a,b)=(c,d)$
II B σ-階	(2,3) vs. (4,6)	$(2,3)\xrightarrow{\times 2}(4,6)$ 區分運算：通分及加法	$m(a,b)=(c,d)$ $\Rightarrow (a,b)=(c,d)$
III A ρ-階	(1,3) vs. (2,5)	$(1,3)\xrightarrow{\times 2}(2,6)\xrightarrow{-(0,1)}(2,5)$ 代數與邏輯運算的區分與統整	$ma=c$ $m(a,b)=(ma,mb)$ $(ma,mb)-(0,f)=(c,d)$ $\Rightarrow (a,b)<(c,d)$
III B γ-階	(3,5) vs. (5,8)	$(3,5)\xrightarrow{\times 8}(24,40)$ $(24,40)\xrightarrow{+(1,40)}(25,40)$ $(25,40)\xleftarrow{\times 5}(5,8)$	$bd=db$ $d(a,b)=(da,db)$ $b(c,d)=(bc,bd)$ $(da,db)+(f,0)=(bc,bd)$ $\Rightarrow (a,b)<(c,d)$

在 III A 層次，知道如何求最小公倍數。求最小公倍數包括求積以及消去公因數，這比只求乘積更深一層，這是一種建立於某運算上的運算，也就是一種形式操作期的操作能力。

在 III B 層次，知道求最小公分母的計算，這計算包含將分數的等價類透過邏輯變換建立關係，這是形式操作後期的能力。在此層次內，邏輯形式與算術形式的加法與乘法運算，混合在一起運算。

伍、CSMS 的比例概念分析

英國倫敦大學的Chelsea 學院，花了六年（1974～79）的時間，探討中學生的數

學理解力發展情形。此研究小組簡稱為CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science)，探討的數學概念共十個，其中一項是比與比例。CSMS 的研究報告 (Hart. et. al, 1980) 中，主要有下列幾項：

一、比例概念發展的層次及特性。

二、各年齡羣學童的理解力分布。

三、學童的解題方法。

CSMS數學組的主持人Hart 博士，利用CSMS 測驗所得的資料，又進行學童比例問題解題的錯誤分析 (Hart, 1982a) 及補救教學實驗 (Hart. 1982b)，這就是接在CSMS後組成的SESM (Strategies and Errors in Secondary Mathematics, 1980～) 研究計畫，探討的單元有"比例"與"代數"，分別由Hart 與Booth 主持。研究目的是設計教學策略以幫助學生避免某些型態的錯誤。從SESM 小組在一些研討會中的報告，可以歸納成下列幾項研究重點：

四、學童解題的錯誤分析。

五、補教學策略 (或教案， teaching module)。

六、補救教學實驗結果。

上面一至六項中，僅將一至四項簡述於后：

一、比例概念發展的層次及特性

CSMS 小組設計測驗題的特色是，先分析現行中學數學教材中所涉及的各種不同的比例概念，然後引用別的研究者所測過的題目或設計新題目，務使測驗題能包含這些概念。前面Karplus 的高先生、矮先生題就被CSMS 借用了，試題一律設計成"解題"的型式，並避免出現任何術語。

根據測驗題的內涵與受測學童的解答資料，以統計方法將比例概念的問題分成下列四個層次：

第 1 層：無需利用比值，或比值已經給定，只需做加倍， 3 倍或折半的運算。

第 2 層：比值易求，或者可以逐次折半相加。

第 3 層：必需求比值，且包含分數的運算。

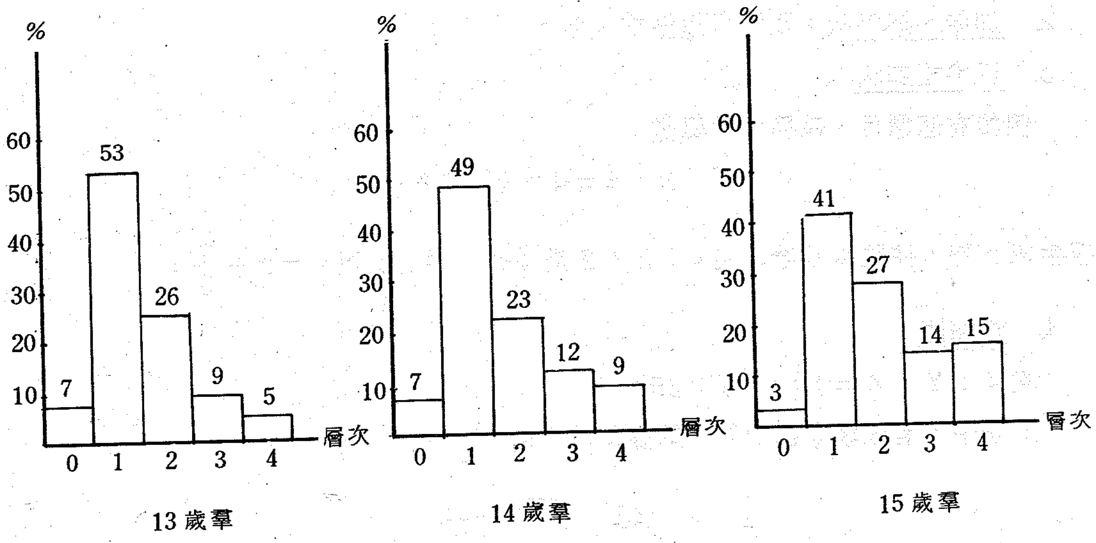
第 4 層：必需有比值的概念且問題中的數字較難。

這四個層次的問題分別有 5 , 5 , 6 和 4 題，一個學童做對 3/5 第 1 層次的題目，他的理解力就達到第一層次；再做對 3/5 第 2 層次的題目，就達到第 2 層次；再做對 4/6

，3/4的第3、第4層次的問題，就達到第3、第4層次。如果一個學童做對第2層次的問題3/5，但第1層次的題目做對的少於3/5　，此學童就從樣本中丟掉，稱爲錯誤樣本。

二、各年齡群學童的比例理解力分佈

比例測驗的對象是13歲、14歲及15歲的中學生，共計2257　個樣本。各年齡羣樣本的IQ分佈與全國學童該年齡羣的I.Q分佈曲線一樣。根據前面所定判定一個學童的比例概念的理解力到達那一個層次的方法，統計出13歲羣、14歲羣與15歲羣的中學生的比例理解力的分佈圖如下：



第0層表示第1層次的問題對不到3題。

第1層及第0層次的學童13歲、14歲、15歲的各占60％、56％、44％　。而第1層次的問題只需加倍或折半的運算，根本無需比值。所以可以說英國中學生在15歲以前，將近一半沒有比例的概念。

各年齡群在同一層次的學童百分比相當穩定，可知比例概念的發展在13～15歲間相當遲緩。

第4層次的學生百分比很低，可以知道比例對15歲以前的青少年而言，不是簡單的概念。

三、學童的解題方法

學童處理這份比例問題的方法，可歸納成下述幾種：

1. 隨意作答（Naive method）

無視於給定的數據，例如有個題目，轉換成數學是

$$X : Y : Z = 10 : 15 : 25 = 2 : \underline{y} : \underline{z}$$

有個學生的答案是 $y = 5$ 與 $z = 8$，他的說明如下：

師：“爲何 y 是 5，不是 6”？

生：也可以是 6，不過 Y 差 X 5，所以選 5。z 也可以是 10，

師：可以是 10，但你寫 8？

生：10，8 都可以，但 8 看起來比較均衡。

2. 加倍、折半法，此法可以望文生意。

3. 折半相加法：

例如有個題目，轉換成數學是

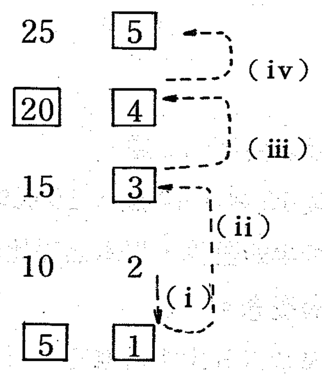
$$8 : 4 = 4 : x = 6 : y$$

學生求 y 時，往往將 6 看成是 4＋2，2 是 4 的一半，所以 $y = x + \dfrac{x}{2}$。

4. 疊加法：

在 $X : Y : Z = 10 : 15 : 25 = 2 : \underline{y} : \underline{z}$。

這題中，有些學童採用如下的疊加法求解：



其中（i）～（iv）代表解題的思考過程，方框內的數則爲各過程所操作得的數。

5. 加法策略

學童往往以加上 a－b 取替正確的乘以 a/b 的運算。例如，在高先生、矮先生的問

題中，加法策略的解法如下：

矮　4　6

高　6　$\underline{x}=6+(6-4)$

6. 忽略部分數據

例如有個題目，轉換成數學形式爲

$$a:b=1:5,\quad c:b=3:10,\quad d:b=8:15$$

求 $c:d$。

有些學童會忽略 b 的媒介性，而答 3：8。

從學童的解題方法中，可歸結出兩點關於英國學童的結論：

(a) 比例式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 中已知三個量求第 4 個的教學，如果小孩不了解此法是必需的，並且也已經有能力應用此方法，那麼灌輸式的教學不可能有效果。在 2257 受測人中，只有 20 位能正確且一貫地以 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的方法解題。

(b) 單價法（unitary method），學童很少使用。單價法的意思：例如 3 公斤米 72 元，2 公斤多少錢？單價法求解過程如下：

3 公斤　72 元

1 公斤　24 元

所以　2 公斤　48 元

四、錯誤分析

如果某一解題方法是錯的，犯錯的學生數又超過 50％，那就有必要進一步診斷、分析，再謀求補救。

比例概念中，最常見的造成錯誤的解法是「加法策略」及「疊加法」。如果問題中的數字只是比較小的整數，那麼疊加法可能有效。例如在三、4.疊加法所舉的例子，學童的解題方法主要是受到「乘法是重複相加」的觀念的支配。學童不習慣於使用乘法，遇到需要做 $1\frac{1}{3}\times1\frac{1}{4}$ 或 $1\frac{1}{2}\times1\frac{1}{2}$ 的運算的問題，疊加法就失效。

由於堅持「疊加法」，產生的問題有：

（i） 逃避乘法

(ii) 不會求比值

(iii) 從不做分數的乘法。

根據錯誤分析，了解錯誤者的特性，來設計教學策略，再進行教學實驗是Hart 等人的研究工作，不在本文討論的範圍內，故略去。

陸、Noelting與CSMS 的分析比較

從Noelting與CSMS 分析比例推理能力的發展層次的取向中，我們可以看出Noelting的重點是Piaget 理論架構的驗證，而CSMS 的重點則是研究的實用性。Noelting 的研究報告學術味道濃厚，原報告中充滿學術性的專有名詞，不是一般教師所樂意閱讀的文獻。CSMS 的報告則反過來，完全不使用學術性名詞，代之以最淺近，不必具備任何認知發展論的預備知識都能輕易地閱讀的文章，目的無他，期望數學教育有關人員都樂於參考應用。

如果以研究的方法與態度來比較兩個研究，筆者個人認爲都同樣是有效、經濟的研究方法，並且同樣都是認眞且嚴肅的研究。

CSMS的研究，強調實用性，可從幾方面看出來。第一、CSMS的接續計畫SESM，研究目標就是錯誤分析及補救教學策略的模式化，這是敎法上的立即應用。第二、CSMS 描述比例概念發展的層次，所用的也是一般課堂上使用的教學名詞，這點似乎是受Van Hieles 的幾何學認知層次，應用於敎學成功的例子的影響。第三、英國著名的中學數學教科書SMP系列，從1980年起以SMP 11-16 課程的名稱，重組編輯小組，重寫一套符合學生的理解力發展的敎科書，主要就是以CSMS 的研究報告爲參考的依據（林福來，（1983），英國的SMP 11-16新課程，參閱〔1〕）。

在概念與推理能力的認知發展的研究領域內，學術取向或者實用取向，都已有很好的範例。關心敎育的朋友，有興趣進行研究時，可以斟酌參考。

柒、其他有關比例的研究

本文中一直以比例爲例來說明概念發展的層次分析方式，最後就筆者所知，將近年來在數學敎育內，有關比例概念的兩個研究計畫介紹給大家參考：一是Noelting與Gagne共同主持，探討①橘子水問題、②分餅乾問題、③分數比較大小、④分數相加，

等四種概念發展的相關性，詳見Noelting & Gagñe（1980）的報告。另一個是Karplus，Pulos和Stage共同主持，以橘子水的姊妹品檸檬水問題來測學生的比例推理能力，並探討比例推理能力與其他方面的認知發展，例如字彙能力、容積概念、性別、在校成績、體積概念、系列概念…等的相關性，以及學習態度、學習興趣等社交因素與比例推理能力的相關性。詳見Karplus et.al（1980），Pulus et.al（1980）和Stage et.al（1980）.

在國內，如果要進行中學生的比例概念發展的研究，我們建議可以一方面藉用Noelting 的橘子水問題來判定國中生的比例推理能力的層次，另一方面，也是最主要的，配合國內國中、國小的比例教材，以及我們的教育環境，修改CSMS 的測驗題，來探討國中生比例概念的理解力分佈。再將比例推理能力的層次與理解力分佈比較，討論其相關性，受現行教材的影響，以及將來教材及教法上應改進之道。當然，有關我國學童的解題方法以及錯誤型態的分析，更是我們樂於見到的資料。

參考資料

〔1〕 林福來（1983）英國SMP 11～16新課程，師大科教月刊，61期，17～26。

〔2〕 黃湘武等（1983），國中學生質量守恆、重量守恆、外體積觀念，與比例推理能力的抽樣調查與研究，科學發展，編印中。

〔3〕 Hart K. M. (ed. 1981a), *Children's Understanding of Mathematics*: 11～16 John Murray, London.

〔4〕 Hart K. M. (1981b), *Hierarchies in Mathematics Education*, ESM, V. 12, #2, 205～218.

〔5〕 Hart K. M. (1982a), *Children's Reasoning on Ratio and Portion Problems*, Chelsea College, Univ. of London.

〔6〕 Hart K. M. (1982b), *Enlargement Module C*, Chelsea College, Univ. of London.

〔7〕 Inhelder B & Piaget J. (1958), *The Growth of Logical Thinking from Childhood to Adolescence*, Basic Books, Inc., U. S. A.

〔8〕 Karplus R. & Petersen R. (1970): *Intellectural Development Beyond*

Elementary School 11. *Ratio, a Survey, Science Curriculum Improvement Study*, Lawrence Hall of Science, Univ. of California, Berkley.

〔9〕 Karplus R, Pulos S & Stage E.K. (1980): *Early Adolescents' Structure of Proportional Reasoning; in Proceedings of the* Ⅳ *International Conference for the Psychology of Mathematics Education.*, Berkeley, California.

〔10〕 Noelting G. (1980a): *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept Part* Ⅰ—*Differentiation of Stages*, ESM, V.11, #2, 217～253.

〔11〕 Noelting G. (1980b): *The Development of Proportional Reasoning and the Ratio Concept Part* Ⅱ—*Problem Structure at Successive stages; Problem-Solving Strategies and the Mechanism of Adaptive Restructuring*, ESM, V.11, #3, 331～363.

〔12〕 Noelting G & Gagñe L (1980): *The Development of Proportional Reasoning in Four Different Contexts, in Proceedings of the* Ⅳ *International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, California.

〔13〕 Pulos S, Stage E.K. & Karplus R. (1980): *Cognitive Correlates of Proportional Reasoning in Early Adolescence, in Proceeding of the* Ⅳ *I.C.P.M.E.*, Berkeley, California.

〔14〕 Renner J.W. & Paske, W. (1977); *Quantitative Competencies of College Students*, J. of Col. Sci. Tech., May 1977.

〔15〕 Stage E.K., Pulos S & Karplus R. (1980): *Social Context of Early Adolescent's Proportional Reasoning, in Proceeding of the* Ⅳ *I.C.P.M.E.*, Berkeley, California.

〔16〕 Wirzup, I. (1976): *Breakthrough in the Psychology of Learning and Teaching Geometry*, in Martin J.r. & Bradbard, D. (Eds) Space and Geometry, ERIC, Columbus, Ohio.