三角函數和差角公式之證明

余進發

高雄縣立梓官國民中學

三角函數的和差角公式中，最主要的是：

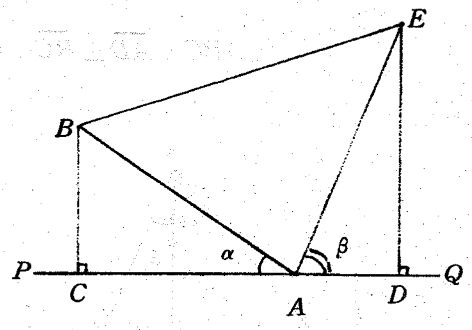
$$\begin{cases}\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\end{cases}$$

這二個公式，只須證明其中一個成立即可，另一個以及其他三角函數之和差角公式，皆可由此推得。

和差角公式的證明，在任何版本的高中數學第三册，以及坊間所有三角學的參考書籍皆可查到。本文在此提出對此公式之特殊證法四種，供讀者參考。為了方便起見，文中之 α , β 僅取銳角。

1. 利用三角形的面積公式證明（註1）

在 $\overleftrightarrow{PQ}$ 上任取一點 A，如圖一所示。



圖一

作 $\angle BAP=\alpha$，$\angle EAQ=\beta$，

且 $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ 均為單位長。

又作 $\overline{BC}\perp\overline{PQ}$，$\overline{ED}\perp\overline{PQ}$，

其垂足分別為 C , D 二點，

則 $\overline{BC}=\sin\alpha$, $\overline{CA}=\cos\alpha$，

$\overline{DE}=\sin\beta$, $\overline{DA}=\cos\beta$，

$\because \triangle ABC+\triangle ADE+\triangle ABE$

$=$梯形 $BCDE$

$\therefore$由三角形的面積公式得

$$\frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha+\frac{1}{2}\cos\beta\sin\beta+\frac{1}{2}\sin[\pi-(\alpha+\beta)]$$

$$=\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)\text{，}$$

又 $\sin[\pi-(\alpha+\beta)]=\sin(\alpha+\beta)$，

$$\therefore \cos\alpha\sin\alpha+\cos\beta\sin\beta+\sin(\alpha+\beta)$$

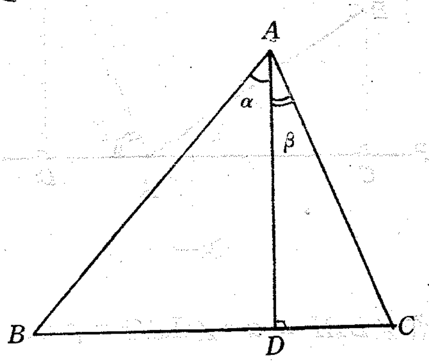
$$=\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\beta\text{，}$$

化簡，得

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\text{。}$$

2. 利用正弦定律證明

如圖二，作△ABC，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$D$為垂足。



圖二

由正弦定律得

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\overline{BC}}=\frac{\sin B}{\overline{AC}}$$

$\therefore \sin(\alpha+\beta)$

$$=\overline{BC}\times\frac{\sin B}{\overline{AC}}$$

$$=(\overline{BD}+\overline{DC})\frac{\sin B}{\overline{AC}}$$

$$=\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}\sin B+\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\sin B$$

$$=\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}+\sin\beta\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

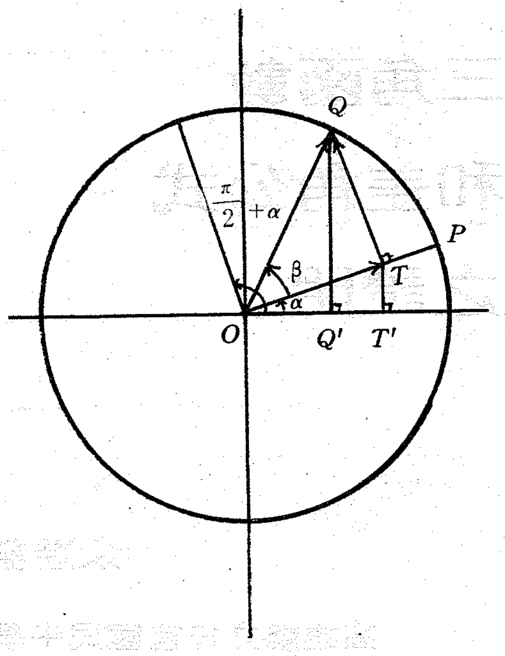
$$=\frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}+\sin\beta\cdot\cos\alpha$$

$=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$，

故 $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$。

3. 利用向量證明

作一單位圓0，如圖三所示。



圖三

得$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OT}+\overrightarrow{TQ}$。又因為

$\overrightarrow{OQ}$的x分量$=\cos(\alpha+\beta)$

$\overrightarrow{OT}$的x分量$=\cos\beta\cos\alpha$

$\overrightarrow{TQ}$的x分量$=\sin\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$

$=-\sin\beta\sin\alpha$，

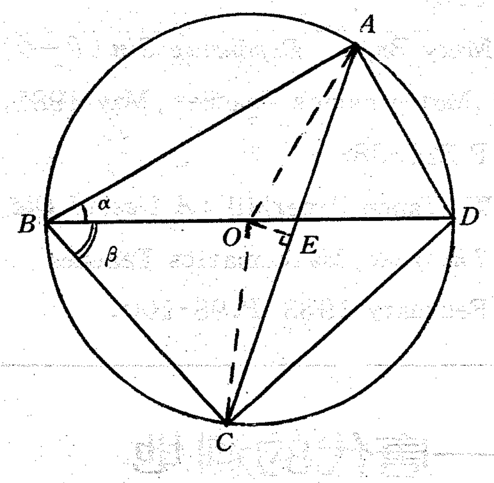
而$\overrightarrow{OQ}$的x分量$=$($\overrightarrow{OT}$的x分量)

$+$($\overrightarrow{TQ}$的x分量)，

故 $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$。

4. 利用多洛梅定理（Ptolemy's Theorem）證明（註2）

作一單位圓0之內接四邊形$ABCD$，使對角線$\overline{BD}$為圓0之直徑，如圖四所示。



圖四

令$\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$，

作$\overline{AC}$，$\overline{OA}$，$\overline{OC}$，

並作$\overline{OE}\perp\overline{AC}$，$E$點為垂足。

$$\therefore \angle AOE=\frac{1}{2}\angle AOC$$

$$=\frac{1}{2}(2\alpha+2\beta)$$

$$=\alpha+\beta$$

即$\overline{AE}=\sin(\alpha+\beta)$。

又$\overline{AC}=2\overline{AE}$，

$\therefore \overline{AC}=2\sin(\alpha+\beta)$。

$\because \overline{BD}$為直徑，

$\therefore \angle BAD=90^\circ$，$\angle BCD=90^\circ$。

在$\triangle ABD$中，

$\overline{AB}=2\cos\alpha$，$\overline{AD}=2\sin\alpha$。

在$\triangle BCD$中，

$\overline{BC}=2\cos\beta$，$\overline{CD}=2\sin\beta$。

又$\overline{BD}=2\times 1=2$。

由多洛梅定理得

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}=\overline{AD}\cdot\overline{BC}+\overline{AB}\cdot\overline{CD}$$

即$2\sin(\alpha+\beta)\cdot 2$

$=2\sin\alpha\cdot 2\cos\beta+2\cos\alpha\cdot 2\sin\beta$，

故得$\sin(\alpha+\beta)$

$=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$（註3）。

註1：三角形的面積公式

若$\triangle ABC$之面積為S，當二邊與夾角已知時，可得

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A$$

$$=\frac{1}{2}ca\sin B$$

$$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$\sin^2\frac{r}{2}=\frac{1-\cos r}{2}$$

註2：多洛梅定理：

圓內接四邊形中，對邊長之乘積的和等於其兩對角線長之乘積。（多洛梅就是利用這個定理導出正餘弦的和差角公式—本刊編輯室）

註3：若圖四加以修正，利用多洛梅定理亦可證出

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$

參考文獻：

1. 洪萬生等：簡明數學百科全書，九章出版社，70年7月叁版，P.294-296.
2. Allan Weiner：*President Garfield's Configuration*，Mathematics Teacher，October 1982，P.567-570.
3. Mary Brian：*Expanding Sin* ($\theta+\phi$)，Mathematics Teacher，May 1981，P.326-388.
4. W. Vance Underhill：*A Useful Old Theorem*，Mathematics Teacher，February 1983，P.98-100.

古中國科學管窺——唐代的測地

古諺的「千里一寸」即爲古中國測地術的術語，其法爲以長八尺的標竿，在同一日的正午由南北兩地測其影長，北地影長，南地影短，其長短間每一寸之差視爲「千里」的距離。

周以洛陽告成鎮爲「地中」，準此處所立標竿之影爲則，以測距離。「地中」夏至日之標影長一尺六寸，冬至日標影長一丈三尺五寸。

蓋天說周髀之術，以天似覆盆，蓋以斗極爲中，中高而四邊下，日月旁行遶之。又：周髀長八尺，夏至之日，晷一尺六寸。句股法以髀爲股，影爲句，度天地的高厚，日月的運行，因之周髀是爲句股之祖。

惟此說所得太陽與地表之距離，夏至爲一萬六千里；冬至爲十三萬五千里，又標高八尺是以天高爲八萬里計，不合今日科學論據。但句股之學對句方加股等於弦方之設辭「折距以爲句廣三，股脩四，經隅五，旣方之外，半其一矩，環而共盤，得成三、四、五。例：若求邪至日者，以日下爲句，日高爲股，句股各自乘，並而開方，除之得邪。」又定圓周率爲徑一周三，以計日道等，殊有其不可泯的高度價值。

不過値得重視的當時有子午線——測天球、地球假設的線，天球的子午線爲通過某地天頂及南北極的大圓，地球的子午線爲通過地面某點之經線。南方爲（午），北方爲（子）亦可稱爲南北線——一度的長度的算定，知極差每度爲三五一里又八〇步，當時中國人的分度準則爲周天三六〇度，一年日數爲三六五日強。折算其一度爲現在的0.9856度。

編輯室