數系的擴展——

算術發展的抽象化過程（下）

趙文敏

國立臺灣師範大學數學系

庚、四元數

西元十九世紀，乃是數學發展史上最具革命性貢獻的世紀。在幾何方面，俄國數學家Nicolai Ivanovitch Lobachevsky（1793～1856）在西元 1829年放棄了平行公設而創立了第一支非歐幾何；非歐幾何的問世，使得數學家們體會到公設並不是神賜而自明的眞理。在分析方面，德國數學家Georg Cantor（1845～1918）在西元 1874 年以集合爲工具而闡述了“無限”的理論，這個理論中所證明的某些結果，甚至連 Cantor 本人都不敢相信（像$\boldsymbol{R}$與$\boldsymbol{R}^n$兩集合可以建立一對一的對應關係），更遑論其他數學家對其無限理論的震驚了。在代數方面，西元十九世紀最具革命性的兩大貢獻都發生在英國，其一是本文所要介紹的四元數（quaternion）；其二則是英國數學家George Boole（1815～1864）在西元1847 年所提出來的邏輯代數，亦即現代數學中所謂的Boole代數。

一、複數系能再擴展嗎？

四元數的發明人，是愛爾蘭數學家Sir William Rowan Hamilton（1805～1865）。Hamilton通常被譽爲 Isaac Newton（1642～1727） 之後英國最偉大的數學家。他也跟 Newton 一樣，在物理學上的地位可能還高過在數學上的地位。四元數乃是Hamilton 在數學上劃時代的一項貢獻。

西元1837 年，Hamilton在Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time一文中，將複數定義成有序實數對，複數的四則運算也都以有序實

數對的型態來給以定義。由此而使得平面向量的許多運算都可以利用複數的代數運算來做解釋。Hamilton 身爲一位傑出的物理學家，對於向量的興趣自然不會僅限於平面向量而已；物理上使用向量的概念，其實是以空間向量爲主，而把平面向量視爲特例。由於空間向量通常都表示成三元有序實數組（a，b，c）的形式，Hamilton在西元1837年的論文結尾就已經表示，應該定義一種新的數系，使其中的數都表示成（a，b，c）的形式，而且使得空間向量的各種運算可以利用這個新數系的代數運算來做解釋。

Hamilton所提出來的問題，有許多數學家都有同感。事實上，挪威的Caspar Wessel（1745～1818）、德國的Carl Gauss（1777～1855）、法國的Francois-Joseph Servois（1767～1847）與德國的Augustus Fedinand Möbius（1790～1868）等人，都對這個問題做過探討。而Hamilton 更是花了十年的時間努力思索這個問題，其努力的程度可由一件小事中看得出來。西元1865年Hamilton寫給他兒子 Archibald Hamilton的一封信中提到一件事。在他發現四元數之前的一段時間，每天早上他下樓吃早餐時，他的兩個兒子都會問他：“爸爸，你找到了三元數的乘法了嗎？”Hamilton 說：當時他都只能回答：“沒有，我還是只會加法與減法。”

原來，Hamilton理想中的三元數系必須要有加、減、乘、除 **四個運算**，而且下面的性質都要成立：

(1) 加法與乘法滿足結合律；

(2) 加法與乘法滿足交換律；

(3) 乘法對加法滿足分配律；

(4) 除法可以定義，亦即，對任意三元數N與N'，$N\neq 0$，必有唯一的一個三元數X，滿足$NX=N'$；

(5) 模數的定律成立；亦即，若

$$(a_1, b_1, c_1)\times(a_2, b_2, c_2)=(a_3, b_3, c_3)$$

則得

$$(a_1^2+b_1^2+c_1^2)(a_2^2+b_2^2+c_2^2)=a_3^2+b_3^2+c_3^2$$

(6) 新數系可以解釋空間向量的運算。

Hamilton 定下這個目標，乃是抄襲複數系的性質而來的。根據這個目標，加法是毫無困難的；可是，爲了乘法的定義，Hamilton 花了十年的時間而終不可得。例如，向量

的內積無法考慮結合律、可除性與模數定律都不成立；向量積則結合律、交換律、可除性與模數定律都不成立。

Hamilton 得不出這樣的乘法，是他的能力不足嗎？不是的，而是根本沒有這樣的乘法。西元 1881 年，美國數學家Charles Sanders Peirce（1839～1914）證明了一個結果：若集合

$$\boldsymbol{R}^n=\{\ (a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_1,a_2,\cdots,a_n\in\boldsymbol{R}\}$$

中可定義加法與乘法（以及係數積 $c(a_1,a_2,\cdots,a_n)=(ca_1,ca_2,\cdots,ca_n)$），使得上述的條件(1)、(2)、(3)、(4)成立，則 n 只能是 1 或 2（當 $n=1$ 時，就是實數系；當 $n=2$ 時，就是複數系）。如果像Hamilton一樣，“忍痛”放棄乘法交換律，則 n 只能是 4（即Hamilton所定義的四元數）。如果再進一步捨棄乘法結合律，則 n 的值只能是 8，例如，西元 1845 年，英國數學家Arthur Cayley（1821～1895）曾提出了現代數學所謂的Cayley 數（Cayley number）或稱爲八元數（octonion），我們略作說明如下：加法的定義仿照 $\boldsymbol{R}^2$，至於乘法則較爲複雜，令

$$e_0=(1,0,0,\cdots,0)\ ,\ e_i=(0,\cdots,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{第 } i+1 \text{ 個坐標}}}{1},\cdots,0)\ ,\ i=1,2,\cdots,7$$

任意兩個Cayley 數 $\sum_{i=0}^{7}x_ie_i$ 與 $\sum_{i=0}^{7}y_ie_i$ 的乘積定義爲

$$\left(\sum_{i=0}^{7}x_ie_i\right)\times\left(\sum_{i=0}^{7}y_ie_i\right)=\sum_{i=0}^{7}\sum_{j=0}^{7}x_iy_je_ie_j\ ,$$

而 e_ie_j 的定義如下：

$$\begin{aligned}
&e_0e_i=e_ie_0=e_i\ ,\ i=1,2,\cdots,7,\\
&e_i^2=-1\ ,e_je_i=-e_ie_j\ ,\ i,j=1,2,\cdots,7\ ,\ i\neq j\ ,\\
&e_1e_2=e_3\ ,\ e_1e_4=e_5\ ,\ e_1e_6=e_7,\\
&e_2e_4=-e_6\ ,e_2e_5=e_7\ ,\ e_3e_4=e_7,\ \ e_3e_5=e_6\ ,
\end{aligned}$$

其餘所需的 e_ie_j 可由上述後七個關係式依循環式輪換而得。例如，由 $e_1e_2=e_3$，可

得$e_2e_3=e_1$與$e_3e_1=e_2$；由$e_2e_4=-e_6$可得$e_4e_6=-e_2$與$e_6e_2=-e_4$。

Cayley 數系沒有滿足乘法結合律，例如：

$$(e_1e_2)e_4=e_3e_4=e_7$$
$$e_1(e_2e_4)=e_1(-e_6)=-e_7$$

在Cayley數系中，前面的性質(1)～(5)，只有乘法交換律與結合律不成立。其中的性質(4)，乃是美國數學家Leonard Eugene Dickson（1874～1954）在西元1912年才給以證明的。

除了Cayley數系之外，沒有乘法結合性的數系還有其他的擴展（尤其是捨棄性質(4)時，更容易再擴展）。不過，這類現代數學中稱為超複數或多元數（hypercomplex number）的數系，已經屬於抽象代數的討論範圍，我們不再說明。

二、Hamilton的的四元數

當Hamilton努力了十年而未能定義出“三元數”的乘法之時，就在西元1843年10月16日上午，Hamilton正偕其妻子沿著Royal Canal步行前往Dublin（愛爾蘭首都），走上Brougham橋上時，Hamilton 突然覺得靈光一閃，何不把思索多年的三元數$a+bi+cj$改成四元數$a+bi+cj+dk$；他掏出口袋中的小筆記本略做演算，而發現：只要捨棄乘法交換律，並規定

$$i^2=j^2=k^2=-1$$
$$ij=-ji=k$$
$$jk=-kj=i$$
$$ki=-ik=j$$

那麼，前面所要求的六個性質（除乘法交換律外）全部都可以滿足；而在近代數學與物理上相當有用的四元數，就在Hamilton走了十年錯誤方向之後的一時靈感下誕生了；代數學上也第一次出現違反傳統的數系──乘法交換律不成立；既然乘法交換律可以放棄，還有什麼性質不可以考慮放棄的呢？四元數的出現，使得代數學從傳統的束縛中開始解放；再加上矩陣的乘法、向量的乘積、方程式之根的排列、八元數的乘積等，這一系列不斷的刺激，終於使近代數學產生了一個嶄新的領域──抽象代數。

Hamilton對於四元數的研究成果，分別記載在西元1853年的論文Lectures on

Quaternions 以及他逝世後才出版的兩册著作 Elements of Quaternions 之中。我們把其中主要的概念及其應用略加介紹如下。

所謂四元數，乃是下述形式的數：

$$a+bi+cj+dk$$

其中，a、b、c、d 都是實數。在四元數 $a+bi+cj+dk$ 中，a 稱為它的純量部分而 $bi+cj+dk$ 稱為它的向量部分，向量部分可用來代表空間中的一個向量。

兩個四元數 $a+bi+cj+dk$ 與 $a'+b'i+c'j+d'k$ 相等的充要條件是 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$，$d=d'$。四元數的加法與乘法定義如下：

$$\begin{aligned}&(a+bi+cj+dk)+(a'+b'i+c'j+d'k)\\&\quad=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k\\&(a+bi+cj+dk)\times(a'+b'i+c'j+d'k)\\&\quad=(aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i\\&\qquad+(ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'+da')k\end{aligned}$$

Hamilton 證明了乘法滿足結合律，associative（可結合）這個字就是他最先使用的。

由於乘法交換律不成立，所以，在考慮四元數的除法時，必須分成左除與右除兩種情形。為了討論除法，應該先介紹三個概念：設 $q=a+bi+cj+dk$ 為一個四元數，令

$$q'=a-bi-cj-dk$$
$$N(q)=a^2+b^2+c^2+d^2$$
$$q^{-1}=\frac{1}{N(q)}q'$$

q' 稱為 q 的共軛四元數，$N(q)$ 稱為 q 的範數（norm），q^{-1} 稱為 q 的乘法反元素。顯然地，q^{-1} 必須在 $N(q)\neq 0$ 也就是 $q\neq 0$ 時才有意義。由此可得

$$q^{-1}q=qq^{-1}=1$$

設 q 與 r 為兩個四元數，$q\neq 0$，則方程式 $qx=r$ 有唯一的解 $x=q^{-1}r$（這就是左除法

）；方程式 $yq=r$ 有唯一的解 $y=rq^{-1}$（這就是右除法）。

根據前面的可右除性，四元數可用來將給定的非零向量經線性變換映至另一給定的非零向量，亦即，若 $xi+yj+zk$ 與 $x'i+y'j+z'k$ 爲二空間向量，$xi+yj+zk\neq 0$，則必有唯一的四元數 $a+bi+cj+dk$，使得

$$(a+bi+cj+dk)(xi+yj+zk)=x'i+y'j+z'k$$

此處所求得的 $a+bi+cj+dk$ 必定滿足 $bx+cy+dz=bx'+cy'+dz'=0$。事實上，每個四元數 $a+bi+cj+dk$ 都可以依上法決定出平面 $\{(x,y,z)\mid bx+cy+dz=0\}$ 上的一個線性變換：

$$\begin{cases} x'=ax-dy+cz \\ y'=dx+ay-bz \\ z'=-cx+by+az \end{cases}$$

Hamilton 還引進了一個很重要的微分算子 ∇（將希臘字母 Δ 倒過來，Hamilton 把它唸成 nabla，因爲這個字的外形很像古希伯萊人一種名叫 nabla的樂器），算子 ∇ 表示成

$$\nabla=i\frac{\partial}{\partial x}+j\frac{\partial}{\partial y}+k\frac{\partial}{\partial z}$$

∇ 作用於三變數的實數值函數 $u(x,y,z)$ 上時，得

$$\nabla u=\frac{\partial u}{\partial x}i+\frac{\partial u}{\partial y}j+\frac{\partial u}{\partial z}k$$

在現代數學中，∇u 稱爲 u 的梯度（gradient）。

另一方面，當算子 ∇ 作用於三變數的向量值函數

$$v=v_1i+v_2j+v_3k$$

時，則得

$$\nabla v=-\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z}\right)i+\left(\frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x}\right)j+\left(\frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)k$$

因此，∇ v 是一個四元數值的函數；其純量部分去掉負號後稱爲向量值函數 v 的散度（divergence），其向量部分則稱爲向量值函數 v 的旋度（curl）。

Hamilton 對於四元數的探討極度的熱衷，他相信他的創作與微積分同樣地重要，而且它將成爲物理數學（mathematical physics）中的一項主要工具，他本人倒是在幾何，光學與力學方面提出了四元數的一些應用。他的一位朋友Peter Guthrie Tait（1831～1901，英國數學家）對他的四元數方法非常支持；可是物理學家們的反應却頗爲冷漠，他們仍然直接採用空間直角坐標系的方法來探討與應用向量，Tait 甚至爲了「四元數是否眞的有用」這個問題與英國數學家Arthur Cayley 有過長時間的爭執。Crowe, M. 在他所著的A History of Vector Analysis一書中就提到一點：後世對於Hamilton 的成就在科學史上的重要性有兩種極端的評價。不過，即使四元數用來處理空間向量方面的應用不如向量本身方便，四元數的問世促使代數學得以解放，這一點對數學的發展確實功不可沒；何況，美國物理學家 Josiah Willard Gibbs（1839～1903）與英國物理學家Oliver Heaviside（1850～1925）分別在西元 1880 年代與 1890 年代發展了向量分析這套工具，其實也受到四元數的影響。

辛、數系邏輯結構的建立

自然數、正分數、正小數、正無理數、負數、虛數等各種類型的數，雖然發現的時期或有前後的不同；然而，到了西元十六世紀，這些數却都由於方程式的求解公式而成爲數學領域中不可或缺的一部分。對於這類數，西元 1800 年前的數學家都只是自由地使用；可是，這些數的嚴密定義却不曾出現，而這些數的運算所依循的邏輯根據也沒有加以探討。做爲數學之最基本概念的數系，其邏輯基礎遲至西元十九世紀才建立，這是數學史上最令人驚訝的一件事。因爲人類在缺乏邏輯基礎的情況下，發展數學達三千多年之久。

促使數學家建立數系邏輯結構的動機，我們可以分成三方面。其一、許多以字母代替數字的演算，都是當成這些字母只表示正整數來進行，可是由於其他數系的邏輯結構未曾建立，因而無法證明這些性質對其他數系也成立，例如，$a^m a^n = a^{m+n}$ 對任意正整數 m 與 n 都成立，可是，却無法證明在 $a > 0$ 的情況下，m 與 n 表示任何實數時都成立。其二、西元 1800 年前後，數學家開始關心到分析數學中各概念的引進與證明都過分鬆散，所以，西元十九世紀的數學家興起了「將分析數學嚴密化」的熱潮；可是，在分

析數學嚴密化過程中，數學家們發現數系中許多含混之處必須先行加以澄清。例如，捷克數學家Bernhard Bolzano（1781～1848）在證明中間值定理時，就由於對實數系的結構缺乏了解，而使他無法得出一個嚴密的證明。法國數學家Augustin-Louis Cauchy（1789～1867）也因爲對數系的結構缺乏了解，使得他只能提出數列收斂的充分條件但却無法證明。其三、建立數系的邏輯基礎，可以確定數學的眞確性。非歐幾何的問世，使得幾何學失去了它代表眞理的地位；儘管當時的數學家認爲根據算術與代數所發展的數學應該是眞實無疑，可是，數系並沒有一個嚴密的基礎，可以讓我們不必對算術、代數與分析數學中的眞理產生懷疑。

談到十九世紀的數學家在建立數系邏輯結構方面所做的努力，我們應該從西元1830年代英國代數學家們的嘗試開始。

一、永恒性原理

自然數是很早就被接受與使用的數，在自然數這個數系中，加法與乘法是其中主要的兩個運算。對自然數來說，這兩個運算具有下面這些性質：設 a 、b 、c 爲自然數，則可得

(1) $a+b=b+a$ ，亦即所謂的加法交換律；

(2) $a\times b=b\times a$ ，亦即所謂的乘法交換律；

(3) $(a+b)+c=a+(b+c)$ ，亦即加法結合律；

(4) $(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ ，亦即乘法結合律；

(5) $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ ，亦即乘法對加法的分配律。

前面這些性質，其實對任何複數都成立，只是在西元十九世紀初期，由於數系的邏輯結構尚未建立，數學家們尚無法證明這件事實。另一方面，當時的數學家都習慣於使用字母來表示數，可是，當他們使用像 $a+b=b+a$ 這樣的等式時，却都只“敢”把 a 、b 看成自然數，而“不敢”心安理得地說 a 、b 可以代表任何複數。當他們對這種字母表示式進行演算時，也都是把其中的字母看成是自然數，演算的過程也都依循自然數的運算所具備的性質。

前段所提的這種現象，自然有礙數學的進展，第一個想打破這個僵局的人是英國數學家George Peacock（1791～1858）。爲了要說明在字母表示式的演算過程中，各個字母代表負數、無理數、虛數時也都成立，Peacock提出了算術性代數（arithmetical algebra）與符號性代數（symbolic algebra）的區別。在算術性代數中，字母

都只能代表正整數，所做的運算也限於所得的結果是正整數的運算為主，例如，在 $a-b$ 中也只考慮 a 大於 b 的情形。由於正整數運算的許多性質（像交換律、結合律等）是當時數學家所公認的，所以，算術性代數被認為是有根據而且眞確。至於符號性代數，乃是採用算術性代數中的規則，只是其中的字母不再限定只代表正整數。舉凡算術性代數中所得的結果，只要其形式具有一般性（雖然其數值僅限於正整數），則它就同時成為符號性代數中的一個結果，而且在後者中，這個結果的形式與數值都具一般性。這種有點像“類推”的說法，Peacock稱之為字母表示式的永恒性原理（principle of the permanence of form）。例如，在算術性代數中，$a^m a^n=a^{m+n}$ 當 m 與 n 是正整數時成立；則在符號性代數中，對任意 m 與 n，都有 $a^m a^n=a^{m+n}$。

Peacock的永恒性原理，記載在他西元1833年的論文Report on the Recent Progress and Present State of Certain Branches of Analysis之中。利用這個原理，Peacock曾經驗證複數的運算與性質。他同時強調這個“類推式的”原理乃是應用在“具有一般性形式”的結果中，所以，自然數系中的某些特殊性質，不可以寫成符號的型態而說它對其他數系也成立。例如，算術性代數中的算術基本定理（每一個大於1的整數都可以分解成質數的乘積），就不能類推到其他數系。

Peacock根據他的永恒性原理，在西元1842年至1845年間，寫成了兩冊著作Treatise on Algebra，上册闡述算術性代數，下册介紹符號性代數。此外，在這部著作中，Peacock還提出一個很重要的概念，那就是：把代數看成是一種純粹形式上的假設-推理科學。換言之，跟幾何學一樣，代數的發展乃是先提出一組有關運算所要遵循的定律，然後根據這些定律推演出各種邏輯上的必然結果。Peacock這種想法，乃是公設化代數學的濫觴，所以，他可以說是近代抽象代數的先驅。也因為如此，當代數學家們稱譽Peacock是代數學方面的Euclid，而十九世紀的代數學，就是在Peacock這種「將代數公設化」的新概念指導下，發展至今。

在邁向「將代數公設化」的過程中，英國有許多位數學家是必須一提的。Duncan Farquharson Gregory（1813～1844）在西元1840年的論文On the Real Nature of Symbolical Algebra中，強調了交換律與分配律這兩個運算定律，不過commutative與distributive這兩個字却是法國數學家François-Joseph Servois（1767～1847）在西元1814年最先使用的。

代數乃是符號與運算定律所成的科學，這種新概念在英國數學家Augustus De Morgan（1806～1871）手上有了更進一步的發展。他在西元1841年至1847年間，

寫了不少論文來探討代數的結構。他認為代數是由一組沒有意義的符號以及這些符號的運算所組成的；他所說的符號乃是像 0，1，+，−，×，÷，( )$^{()}$，以及字母，而代數的定律則像交換律，指數律，負數乘正數為負數，$a-a=0$，$a\div a=1$，等等。Peacock 在處理字母符號時，基本上都是把它們當成數或量，可是De Morgan 所使用的符號，其意義要抽象得多；A，B，C 這類字母可能代表善與惡，+與−可能代表獎勵與懲罰，不過，對於等號=，De Morgan 則堅持只有完全相同的概念才可以使用。在他西元 1830 年的著作Trigonometry and Double Algebra中，闡述了他這些概念；同時也指出：從實數系這個 single algebra 擴展成複數系這個 double algebra，運算的規則是一樣的。他認為 single algebra 與double algebra 是僅有的代數，三元或四元的代數是不可能的；這個看法在西元 1843年就被Hamilton 的四元數所推翻了。

二、實數系的邏輯結構

Peacock的永恒性原理，不能做為代數的基礎；因為它並沒有證明「自然數系中的一般性代數性質為什麼可以應用到實數系，甚至複數系？」何況，就數學的邏輯基礎而言，自然數系為什麼具有像 $a+b=b+a$、$(a+b)+c=a+(b+c)$ 等類型的性質，也需要有它的邏輯根據。像這類性質要能做嚴密的證明，根本的方法乃是將各種數及其運算都重新加以定義，使得數系中常用的各種性質，都是在少數的公設下，經定義所演繹出來的邏輯必然結果。

在前文中，我們提到Hamilton與Cauchy兩人在假定實數系的運算性質下，定義了複數並證明複數系的各種性質。另外，Hamilton又在假定實數系的運算性質下，定義了四元數並證明了四元數系的各種性質。換言之，只要實數系中的各種性質都可以證明，那麼，複數系與四元數系的性質也都可以證明。

如果我們分別以$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{R}$、$\boldsymbol{C}$、$\boldsymbol{H}$表示所有自然數、整數、有理數、實數、複數、四元數所成的集合，那麼，就可以得出下面一系列的包含關係：

$$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{H}$$

在這一系列的包含關係中，每一對相鄰的集合都需要有一個邏輯上很嚴密的擴展（extension）。Hamilton與Cauchy 的成就只在$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$與$\boldsymbol{C}\subset\boldsymbol{H}$而已，而由$\boldsymbol{N}$至$\boldsymbol{R}$的擴展過程乃是西元十九世紀後半世紀所完成的。

在$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$、$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$、$\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$這三個擴展中，最複雜而困難的乃是$\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$，可是數學

家們却是從這個擴展先開始。事實上，當數學家們爲了配合「將分析嚴密化」與「確定算術與代數的眞確性」的需要，而進行實數系邏輯結構的建立時，都認爲有理數系的性質都眞確無疑而不必再建立其邏輯基礎，因此，他們都是假定了有理數系的有關性質而來定義實數並證明其有關性質。

在由$\boldsymbol{Q}$至$\boldsymbol{R}$的擴展中，主要的貢獻者有法國數學家Charles Méray（1835～1911）、德國數學家**Karl Weierstrass**（1815～1897）、Georg Cantor（1845～1918）、Eduard Heine（1821～1881）、與Richard Dedekind（1831～1916）。不過在這些數學家之前，有一些相關的概念已經出現過，而西元十九世紀所建立的實數理論，就是由早先的相關概念引導出來的，其中最主要的參考依據乃是Euclid的Elements第五卷中的比例理論。

在Elements第五卷中，Euclid對幾何度量的不可共度比値之相等做如下的定義：兩個比値$\frac{a}{b}$與$\frac{c}{d}$相等的充要條件是對任意二自然數m與n，恒有

(1)　若$na>mb$，則$nc>md$；

(2)　若$na=mb$，則$nc=md$；

(3)　若$na<mb$，則$nc<md$。

這個定義使我們可以對每個不可共度量或正無理數$\frac{a}{b}$，聯想出下面兩個由正有理數所成的集合：

$$\left\{\frac{m}{n}\;\middle|\;m\text{與}n\text{爲自然數，}\frac{m}{n}<\frac{a}{b}\right\}$$

$$\left\{\frac{m}{n}\;\middle|\;m\text{與}n\text{爲自然數，}\frac{m}{n}>\frac{a}{b}\right\}$$

這種對正有理數的分割（partition）正是後來Dedekind以割切（cut）來定義實數的依據。

Hamilton在西元1837年的論文Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time中，對於實數系邏輯結構的建立做了第一次嘗試。他把實數都視爲時間的函數，這種做法並不能做爲嚴密的邏輯基礎。Hamilton指出在任意二有理數之間都有無數多個有理數；不過，若A與B表示兩個由有理數所成的無限集合，而且A的每個元素都比B的每個元素小，却可能發生一種情況：沒有任何有理數介於A的每

個元素與B的每個元素之間。他提出一個例子是：

$$A=\{\ r \mid r\text{是正有理數，}r^2<b\ \}$$
$$B=\{\ r \mid r\text{是正有理數，}r^2>b\ \}$$

其中b是一個正有理數，但不是任何有理數的平方數。利用他所採用的時間之函數的連續性，可以利用這種集合A與B來決定無理數，也就是Dedekind所使用的方法，不過，Hamilton却沒有再做深入的探討；所以，實數系的建立乃歸功於歐洲大陸的數學家而不是英國人的成就。

關於實數系的建立，通常分成四個系統，即Méray、Weierstrass、Cantor-Heine、與Dedekind。可是，這四個系統中，前三個系統都是以數列來定義實數，而後一個系統則以割切來定義實數。下面我們分成這兩種情形來定義實數。

三、以數列定義實數

捷克數學家Bernhard Bolzano（1781～1848）、法國數學家Augustin-Louis Cauchy（1789～1867）以及其他人，都曾經想利用「實數就是收斂的有理數列之極限」來定義實數，可是，他們却忽略到很重要的一點：許多有理數列之極限的存在性必須要先有實數的定義及其性質才能證明。Méray與Cantor都曾經指出這項錯誤，所以，他們改用有理數列本身來稱爲實數（自然不是所有的有理數列，而是具備某種特殊性質的有理數列）。

Méray對於實數的探討，始於西元1869年的論文Remarques sur la nature des quantités définies par la condition de servir de limites á des variables données，而其完整的敍述則在西元1872年的論文Nouveau precis d'analyse infinit'esimale之中。Cantor的實數系理論則始於西元1871年，而後Heine提出了一些修正意見而由後者在西元1872年載於Die Elemente der Functionenlehre一文之中。不過，Cantor本人在西元1883年的論文Grundlagen einer Allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre中，對於他的實數理論做了更詳盡的解說。至於Weierstrass，早在西元1859年的一系列演講中，就指出了建立無理數理論的重要性；不過，他本人從未寫過有關這個理論的著作，後世只能從其學生的著作中窺見Weierstrass實數理論的一斑。

Méray、Weierstrass、Cantor與Heine等人，對無理數理論的建立，除了名詞、術語、符號方面有所差異外，他們的基本方法與原理是很相似的，下面我們以Cantor-

Heine 的說法來加以介紹。

Cantor 首先定義基本數列（fundamental sequence）如下：設 $\{a_n\}$ 爲一有理數數列，若對於每個正有理數 ε，必有一個正整數 n_0，使得當 m，$n \geqslant n_0$ 時，恒有

$$|a_m - a_n| < \varepsilon$$

則稱 $\{a_n\}$ 爲一個基本數列。這個定義實際上是由 Cauchy 用來判定數列收斂的充要條件衍化而來；Bolzano 與 Cauchy 都曾經想證明具有前述基本數列之性質（不過，ε 可以是任意正數）的數列必是收斂數列，但兩人都沒成功。Méray 與 Cantor 利用這個現代數學中稱爲 Cauchy 條件（Cauchy's criterion）的性質來定義實數；當一個基本數列沒有收斂於一個有理數極限時，Méray 稱此數列有一個假想極限（fictitious limit）或稱其以一個假想數（fictitious number）做爲極限。Cantor 則直接把每個基本數列稱爲一個實數（Weierstrass 的做法也是如此），我們可以把基本數列 $\{a_n\}$ 簡記爲 a。

設 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲二基本數列，則 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 表同一實數的充要條件爲

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$$

對任意基本數列 $\{a_n\}$ 而言，下述三個性質中必有一個且只有一個成立，這就是實數系中次序關係的三一律：

(1)　存在一個正有理數 r 及一個正整數 n_0，使得當 $n \geqslant n_0$ 時，恒有 $a_n \geqslant r$。

(2)　存在一個正有理數 r 及一個正整數 n_0，使得當 $n \geqslant n_0$ 時，恒有 $a_n \leqslant -r$。

(3)　對於每個正有理數 r，必有一個正整數 n_0，使得當 $n \geqslant n_0$ 時，恒有 $|a_n| < r$。

前面所述的三個性質，當 $\{a_n\}$ 滿足(1)時，稱其爲正實數；滿足(2)時稱其爲負實數；滿足(3)時則此實數即爲 0。

若 $\{a_n\}$ 與 $\{b_n\}$ 爲基本數列，則 $\{a_n+b_n\}$、$\{a_n-b_n\}$、與 $\{a_nb_n\}$ 都是基本數列，分別稱爲已知二實數的和、差、與積；更進一步地，若 $\{b_n\}$ 不爲 0，則 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 也是基本數列，稱爲已知二實數的商。

有了實數的加法與乘法定義之後，就可以利用有理數系的對應性質證明下述性質：實數的加法可交換、可結合、有單位元素（即 0）、每個實數都有加法反元素；實數的乘法可交換、可結合、有單位元素（即 1）、不爲 0 的實數都有乘法反元素、乘法對加法可分配。

其次，利用正、負實數的概念以及減法，可以定義次序關係，並可證明三一律、遞移律、加法律、以及乘法律。

正、負實數的概念可進一步地定義實數的絕對值；於是，實數系就有了距離的概念，而最後兩個重要性質則是：其一，全體有理數在實數系中是稠密的，亦即，任意兩個實數之間都有有理數存在；其二，實數系具有完備性，亦即，若一個實數數列 $\{x_n\}$ 具有像基本數列所具備的性質，則必有一個實數 x 滿足

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

這個完備性其實就是Bolzano與Cauchy所曾斷言而未能證明的性質。

完備性的出現，附帶說明了一件事實：Méray、Weierstrass、Cantor與Heine等人，由有理數系出發，考慮有理數所成的基本數列，而擴展得實數系；如果我們考慮由實數所成的基本數列，已無法再得出更大的數系，因爲實數系中的每個基本數列都有一個實數做爲它的極限。

四、以割切定義實數

德國數學家Richard Dedekind（1831～1916）認爲實數系應建立其邏輯根據的想法，早在西元1858年在德國Zürich地方的Polytechnic School講授微積分時就已產生。他發現當時的微積分中，許多性質的論證都訴諸於幾何直觀，例如，要證明有界單調數列必是收斂數列，就只能利用圖形來說明。其他像幾何上連續量（continuous magnitude）或是像 $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$ 這類算術定理，都沒有人曾經嚴密的處理過。

爲了要解決這類含混不清或缺乏理論基礎的現象，他認爲應該先建立嚴密的實數理論。於是，他先提出一個問題：幾何上的連續性是什麼意義？義大利數學家Galileo Galilei（1564～1642）、德國數學家Gottfried Leibniz（1646～1716）、捷克數學家Bernhard Bolzano（1781～1848）等人，都把直線所具有的連續性解釋成「任意兩點之間都有其他的點存在」；可是，如果我們觀察直線上全體有理數點，就可發現「任意兩有理數點之間都有有理數點存在」，而全體有理數點却沒有構成一個連續體，可見連續性與稠密性是有所區別的。

Dedekind發現，如果我們在一水平直線上固定一點 P，此直線就被分成兩部分 L 與 R，則可得

(1) 在 P 點左側的每一點都屬於 L，P 點右側的每一點都屬於 R，而 P 點本身則可

屬於L或屬於R；

(2) L中的每一點都在R中每一點的左側。

接著，他進一步發現上述性質的逆敘述也成立，亦即：若一水平直線被分成不相交的兩部分L與R，使得L中的每一點都在R中每一點的左側，則必有唯一的一個點P，使得

(1) P點左側的每一點都屬於L，P點右側的每一點都屬於R；

(2) P點必屬於L或R中之一，但不能又屬於L又屬於R。

Dedekind 認為上述的後一性質，才是直線之連續性的眞義所在。

將前述的直線連續性概念應用到數系上，Dedekind 引進「由有理數的割切定義實數」的概念，我們採用集合符號略作介紹如下：設有兩個有理數所成的集合A與B，滿足

(1) $A\neq\phi$，$B\neq\phi$；

(2) $A\cap B=\phi$，$A\cup B=\boldsymbol{Q}$；

(3) 若$x\in A$，$y\in B$，則$x<y$；

則我們就稱A與B在$\boldsymbol{Q}$中構成一個割切(cut)，記為(A, B)。

顯然地，對任意有理數r而言，令

$$A_r=\{\ s\in\boldsymbol{Q}\mid s<r\ \}$$
$$B_r=\{\ s\in\boldsymbol{Q}\mid s\geqslant r\ \}$$

則(A_r, B_r)就是一個割切，簡記為r。若將A_r改用$A_r\cup\{r\}$，B_r改用$B_r-\{r\}$，則$(A_r\cup\{r\}, B_r-\{r\})$也是一個割切。換言之，每個有理數都可以在$\boldsymbol{Q}$中決定兩個割切$(A, B)$；而且在割切$(A, B)$中，不是$A$有最大元素，就是$B$有最小元素。反之，若在割切$(A, B)$中，$A$有最大元素或是$B$有最小元素，則割切$(A, B)$必是由某個有理數所決定的。為了唯一性起見，我們不考慮$(A_r\cup\{r\}, B_r-\{r\})$這種形式的割切，換言之，我們附帶假設每個割切$(A, B)$中的$A$都沒有最大之元素。

除了前段所成的割切外，還有另一類割切(A, B)，其中A沒有最大元素而且B沒有最小元素。例如，令

$$A=\{\ s\in\boldsymbol{Q}\mid s\leqslant 0\}\cup\{\ s\in\boldsymbol{Q}\mid s>0,\ s^2<2\}$$
$$B=\{\ s\in\boldsymbol{Q}\mid s>0,\ s^2>2\}$$

則(A, B)是一個割切，但A中沒有最大元素而且B中沒有最小元素。事實上，設s為

一個正有理數，令

$$t=\frac{s^3+6s}{3s^2+2}$$

則 t 也是正有理數，而且

$$t-s=\frac{2s(2-s^2)}{3s^2+2}$$

$$t^2-2=\frac{(s^2-2)^3}{(3s^2+2)^2}$$

若 $s\in A$，則 $s^2<2$，於是，$t^2<2$ 且 $t>s$；換言之，$t\in \boldsymbol{A}$ 且 $t>s$。若 $s\in B$，則 $s^2>2$，於是，$t^2>2$ 且 $t<s$；換言之，$t\in B$ 且 $t<s$。

現在，我們可以定義割切的關係與運算了。首先定義相等：設 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 爲二割切，若 $A_1=A_2$（因此，$B_1=B_2$），則稱 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 相等，記爲 $(A_1, B_1)=(A_2, B_2)$。其次，定義次序：若 $A_1\subset A_2$ 而且 $A_1\neq A_2$，則稱 (A_1, B_1) 小於 (A_2, B_2) 或稱 (A_2, B_2) 大於 (A_1, B_1)，記爲 $(A_1, B_1)<(A_2, B_2)$ 或 $(A_2, B_2)>(A_1, B_1)$。根據這個定義，可證明次序滿足三一律與遞移律。

接著，定義加法：設 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 爲二割切，令

$$A_1+A_2=\{r_1+r_2 \mid r_1\in A_1, r_2\in A_2\}$$
$$B_1+B_2=\boldsymbol{Q}-(A_1+A_2)$$

則 (A_1+A_2, B_1+B_2) 是一個割切，稱爲 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 的和，記爲 $(A_1, B_1)+(A_2, B_2)$。由此可證明：割切的加法可交換、可結合、有單位元素（即 0）、每一個割切 (A, B) 都有加法反元素 $(-A, -B)$，其中

$$-A=\begin{cases}\{r\in \boldsymbol{Q} \mid r<-s\}，若 B 有最小元素 s；\\ \{r\in \boldsymbol{Q} \mid -r\in B\}，若 B 沒有最小元素，\end{cases}$$

而 $-B$ 則是 $-A$ 在 $\boldsymbol{Q}$ 中的餘集。另外，可證明次序的加法律。

然後，定義乘法：設 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 爲二割切，令

$$A_1A_2=\begin{cases}\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r\leqslant 0\}\cup\{r_1r_2\mid r_i\in A_i\text{ 且 }r_i>0,\ i=1,2\}, & \text{若}(A_1,B_1)>0,\ (A_2,B_2)>0;\\ 0, & \text{若}(A_1,B_1)\text{與}(A_2,B_2)\text{中有一爲}0;\\ -[(-A_1)A_2], & \text{若}(A_1,B_1)<0,\ (A_2,B_2)>0;\\ -[A_1(-A_2)], & \text{若}(A_1,B_1)>0,\ (A_2,B_2)<0;\\ (-A_1)(-A_2), & \text{若}(A_1,B_1)<0,\ (A_2,B_2)<0;\end{cases}$$

$B_1B_2=\boldsymbol{Q}-(A_1A_2)$；

則 (A_1A_2, B_1B_2) 是一個割切，稱爲 (A_1, B_1) 與 (A_2, B_2) 的積，記爲 $(A_1, B_1)\times(A_2, B_2)$。由此可證明：割切的乘法可交換，可結合，有單位元素（即1）、每一個不爲0的割切 (A, B) 都有乘法反元素 (A^{-1}, B^{-1})，其中，

$$A^{-1}=\begin{cases}\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r<\frac{1}{s}\}, & \text{若}(A,B)>0\text{且}B\text{有最小元素}s;\\ \{r\in\boldsymbol{Q}\mid r\leqslant 0\}\cup\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r>0,\ \frac{1}{r}\in B\}, & \text{若}(A,B)>0\text{且}B\text{沒有最小元素};\\ -[(-A)^{-1}], & \text{若}(A,B)<0;\end{cases}$$

而 $B^{-1}=\boldsymbol{Q}-(A^{-1})$。另外，可證明乘法對加法可分配、以及次序的乘法律。

最後，Dedekind 證明了完備性：若我們以 $\boldsymbol{R}$ 表示全體割切所成的集合，並在 $\boldsymbol{R}$ 中仿上述方法定義割切，則對於 $\boldsymbol{R}$ 中每個割切 (L, R)，不是 L 具有最大元素，就是 R 具有最小元素。Dedekind 對完備性如此敘述，與他對直線的連續性的說法完全吻合。

Dedekind 的割切，構成了實數系；由有理數 r 所決定的割切 (A_r, B_r) 仍稱之爲有理數，仍然記爲 r；不是由有理數所決定的割切則稱之爲無理數，例如，若

$$A=\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r\leqslant 0\}\cup\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r>0,\ r^2<2\}$$
$$B=\{r\in\boldsymbol{Q}\mid r>0,\ r^2>2\}$$

則割切 (A, B) 其實就是 $\sqrt{2}$。

從前面的介紹中，我們可以看出割切 (A, B) 中的 A 與 B，其實是可以互相決定的，也就是說，由 A 可決定 B，由 B 可決定 A。所以，要表示割切 (A, B) 時，其實只需寫出 A 或 B 就可以了，所以，英國數學家 Bertrand Russell（1872～1971）在西元1903年的著作 The Principles of Mathematics 中，就只採用“割切的一側”來定義實數。

與 Cantor 的基本數列相比較，Dedekind 的割切方法確實很直觀地建立了實數系與直線間的一對一對應關係；不過，Cantor 對於 Dedekind 的割切方法曾有所批評，主要

是由於這種方法在分析數學中不常見到。另一方面，Cantor 的基本數列方法與Dedekind 的割切方法，都可以推廣到抽象的空間。事實上，德國數學家Felix Hausdorff（1868～1942）在西元 1914 年的著作Grundzuge der Mengenlehre 中，將 Cantor 的數列方法用來建立賦距空間（metric space）的完備化（completion）；而將 Dedekind 的割切方法用來建立賦序空間（ordered space）的完備化。

Cantor 所建立的實數系與Dedekind 所建立的實數系，由於所使用的方法不同，所以，他們所定義的實數在“外形”上也不相同；就數學而言，必須要證明這兩個實數系其實是“一樣”的，如此才能表示只有“唯一的一個”實數系，進行計算時才不至於無所適從。所謂證明兩個實數系“相同”，在數學上的意義是這樣的：若$\boldsymbol{R}_C$與$\boldsymbol{R}_D$ 分別表示Cantor 與 Dedekind 所定義的實數系，則必存在一個函數φ：$\boldsymbol{R}_C \to \boldsymbol{R}_D$ 使得下述各性質成立：

(1) φ是一對一，映成函數；

(2) 對任意x，$y \in \boldsymbol{R}_C$，恒有$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$；

(3) 對任意x，$y \in \boldsymbol{R}_C$，恒有$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$；

(4) 若x，$y \in \boldsymbol{R}_C$且$x<y$，則$\varphi(x)<\varphi(y)$。

這樣的函數φ確實存在，事實上，若$\boldsymbol{R}_C$中有一實數x可以用基本數列$\{a_n\}$ 表示，令(A_n, B_n)表示有理數a_n所決定的割切，則

$$\varphi(x)=\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}A_m\ ,\ \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}B_m\right)\text{或寫成}$$

$$\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}A_m\ ,\ \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}B_m\right)$$

其詳細證明略去。

五、有理數系的邏輯結構

當數學家們致力於實數系邏輯結構的建立之時，對於有理數系的邏輯結構，只有少數人認爲也應該加以考慮，多數都把有理數的運算及其性質視爲當然；但就數學的眞確性而言，如果我們經常使用與計算的數都有它的邏輯根據，那麼，數學的眞確性才不致受到懷疑；所以，在整數的基礎上建立一個嚴密的有理數系，仍然是有其必要的。

有理數系既然要以整數系爲其基礎，那麼，整數系本身自然也應該有它的邏輯根據

，於是，在自然數的基礎上建立一個嚴密的整數系，自然也是不可少的。

如果前兩段所提的兩個擴展$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$與$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$都能在合乎邏輯的過程下完成，那麼，配合Méray、Weierstrass、Cantor、Heine、與Dedekind等人在$\boldsymbol{Q}\subset\boldsymbol{R}$方面的成果，以及Cauchy與Hamilton兩人在$\boldsymbol{R}\subset\boldsymbol{C}$方面的成果，整個複數系是否合乎邏輯，就全看自然數系是否能在邏輯上被接受了。

最先對$\boldsymbol{N}\subset\boldsymbol{Z}$與$\boldsymbol{Z}\subset\boldsymbol{Q}$這兩個擴展加以探討的是德國數學家Martin Ohm（1792～1872）在西元1822年的著作Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik（Study of a Complete Consistent System of Mathematics）。其次，則是Weierstrass在1860年代所給的一系列演講。Weierstrass由自然數系推衍有理數系，他把正有理數定義成自然數所成的有序數對；又以另一種形式的有序自然數對來表示負整數；再以有序負整數對表示負有理數。至於自然數系，Weierstrass認為不必為它的邏輯基礎操心（其他數學家像Kronecker也持這種看法）。Weierstrass對有理數的處理方法，與義大利數學家Giuseppe Peano（1858～1932）所使用的方法相似，後文中再加以說明。

Dedekind在西元1888年的著作Was sind und was sollen die Zahlen（The Nature and Meaning of Numbers）中，曾利用集合論的方法來建立整數的理論，不過，由於做法過於複雜，因而不太受人注意。

對於自然數、整數與有理數的理論，其邏輯基礎是在西元十九世紀末年採用公設化的方法完成的。在現代數學中較廣泛使用的方法是義大利數學家Giuseppe Peano（1858～1932）在西元1889年提出來的，當時他對Dedekind的整數理論毫無所悉，所以，整數理論的建立，應該歸功於Peano。

在西元1889年的著作Arithmetics Principia Nova Methodo Exposita中，Peano使用了許多符號，像ε表示“屬於”；$\supset$表示“若…，則…”；$\boldsymbol{N}_0$表示“全體自然數所成的集合”；$a+$表示“a的後繼元素”等等。然後，他利用“集合”，“自然數”，“後繼元素”與“屬於”等未加以定義的概念，提出自然數的五個公設：

(1) 1是一個自然數。

(2) 1不是任何自然數的後繼元素。

(3) 每個自然數都有後繼元素。

(4) 若a與b的後繼元素相等，則a與b相等。

(5) 若S是由自然數所成的一個集合，且具有下述兩個性質：

(i) S包含1；

(ii) 若S包含a，則S包含$a+$；

則S包含所有的自然數。

前面的第五個公設就是數學歸納法公設。

接著，Peano說明“相等關係”的反身律、對稱律與遞移律，亦即：

(1) $a=a$；

(2) 若$a=b$，則$b=a$；

(3) 若$a=b$且$b=c$，則$a=c$。

至於加法，Peano用下面的說法給以定義：每一對自然數a與b都有唯一確定的“和”使下述兩性質成立：

$$a+1=a+$$
$$a+(b+)=(a+b)+$$

乘法的定義則是：每一對自然數a與b都有唯一確定的“乘積”使下述兩性質成立：

$$a\cdot 1=a$$
$$a\cdot(b+)=(a\cdot b)+a$$

然後，Peano證明了自然數的各種算術性質；在這些性質的證明中，歸納法公設自然扮演了很重要的角色。

根據自然數及其算術性質，整數與有理數的定義及其各種性質的證明都很容易。就整數而言，我們可以考慮下面這個集合：

$$\{(a,b)\mid a,b\text{ 爲自然數}\}$$

在此集合中定義一個對等關係～：$(a,b)\sim(c,d)$意指$a+d=b+c$。然後把每個對等類$[(a,b)]$稱爲一個整數。整數的加法、乘法與次序則定義成

$$[(a,b)]+[(c,d)]=[(a+c,b+d)]$$
$$[(a,b)]\times[(c,d)]=[(ac+bd,ad+bc)]$$
$$[(a,b)]>[(c,d)]\Longleftrightarrow a+d>b+c$$

如此，有關整數的各種算術性質就都可以證明了。當$a>b$時，$[(a,b)]$稱爲正整數

；當 $a<b$ 時，$[(a,b)]$ 稱為負整數；當 $a=b$ 時，$[(a,b)]$ 稱為零，記為0。事實上，若在整數系中定義減法，並把 $[(a+c,c)]$ 記為 a，則所謂 $[(a,b)]$，其實就是 $a-b$。

至於有理數，則需考慮下面這個集合：

$$\{(A,B)\mid A,B\text{為整數},B\neq 0\}$$

在此集合中定義一個對等關係～：$(A,B)\sim(C,D)$ 意指 $AD=BC$。然後把每個對等類 $[(A,B)]$ 稱為一個有理數。有理數的加法與乘法則定義成

$$[(A,B)]+[(C,D)]=[(AD+BC,BD)]$$
$$[(A,B)]\times[(C,D)]=[(AC,BD)]$$

如此，有關有理數加法與乘法的各種性質就都可以證明了。事實上，若 $[(AC,C)]$ 記為 A，則所謂 $[(A,B)]$，其實就是 $\frac{A}{B}$。

至此，整個實數系（甚至複數系）的邏輯基礎就在Peano的五個公設下建立完成。

壬、結　　語

西元十九世紀的一些數學家努力於實數系邏輯基礎的建立，另外一些數學家却也對這個煩冗的工作頗多批評。

德國的數學（史）家Hermann Hankel（1839～1873）在西元1867年曾經表示：將無理數利用基本數列或割切來給以“形式化的”定義而沒有給以幾何度量的概念，只是得到一種深奧難懂的人工化產物；儘管這種做法可以使一切結果都非常嚴密，然而它却沒有科學上的價值（參看Hankel所著Theorie der complexen Zahlensystem）。

德國另一位數學家Paul du Bois-Reymond（1831～1889）在西元1887年的著作Théorie générale des fonctions中則表示：利用公設化方法逐步地建立及擴展數系，固然得出一個與幾何度量概念相似的算術體系；然而這種做法也可用來建立其他的算術體系，因此，古典的算術體系乃變成為與幾何度量概念相對應的“一個”算術體系而已。

德國數學家David Hilbert（1862～1943）對實數系的邏輯結構有另一種看法。

在西元1899年的一份著作中，Hilbert 主張對整個實數系（而不是只對自然數系）使用公設化方法。他先引進一個稱爲數的未定義名詞，然後提出下面的四組十八個公設：

Ⅰ、連接公設

I_1 由數 a 與數 b 可以經由加法而得出一個數 c，以符號表示就是

$$a+b=c \quad \text{或} \quad c=a+b$$

I_2 若 a 與 b 爲已知的數，則恰有一個數 x 且恰有一個數 y 滿足

$$a+x=b \quad \text{且} \quad y+a=b$$

I_3 有一個數 0，使得每個數 a 都滿足

$$a+0=a \quad \text{且} \quad 0+a=a$$

I_4 由數 a 及數 b 可以經由乘法而得出一個數 c，以符號表示就是

$$ab=c \quad \text{或} \quad c=ab$$

I_5 若 a 與 b 爲已知的數且 $a\neq 0$，則恰有一個數 x 且恰有一個數 y 滿足

$$ax=b \quad \text{且} \quad ya=b$$

I_6 有一個數 1，使得每個數 a 都滿足

$$a\cdot 1=a \quad \text{且} \quad 1\cdot a=a$$

Ⅱ、計算公設

II_1 $a+(b+c)=(a+b)+c$。

II_2 $a+b=b+a$。

II_3 $a(bc)=(ab)c$。

II_4 $a(b+c)=ab+ac$。

II_5 $(a+b)c=ac+bc$。

II_6 $ab=ba$。

Ⅲ、次序公設

III_1 若 a 與 b 爲不相等的數，則其中有一個大於另一個，或稱後者小於前者；以符號表示就是

$$a>b \quad \text{且} \quad b<a$$

Ⅲ$_2$ 若$a>b$且$b>c$，則$a>c$。

Ⅲ$_3$ 若$a>b$，則 $a+c>b+c$且$c+a>c+b$。

Ⅲ$_4$ 若$a>b$且$c>0$，則$ac>bc$且$ca>cb$。

Ⅳ、連續公設

Ⅳ$_1$ （Archimedes 公設）若$a>0$且$b>0$爲已知的數，則可以把a自行相加若干次而得

$$a+a+\cdots+a>b$$

Ⅳ$_2$ （完備性公設）對於這個數系，我們無法再增加新的元素而仍能使新的體系滿足前面的十七個公設。

對於他所提出來的公設體系，Hilbert 指出：這些公設並非互相獨立；也就是說，其中有些公設可以由其他公設推衍而得。他也指出：我們必須先證明這個公設體系沒有矛盾，只要證明了這一點，就得出了數學上所用的數系。不過，Hilbert 當時却沒有發現很重要的一件事：要證明這個公設體系沒有矛盾，非採用辛小節所介紹的（或其他等價的）方法不可。

參考資料

1. 李子儼：中算史論叢，台灣商務印書館發行。
2. 李儼：中國古代數學簡史，九章出版社。
3. 李約瑟（傅溥譯）：中國之科學與文明，第四册，台灣商務印書館發行。
4. 傅溥：中國數學史攬勝，幼獅文化事業公司。
5. Ball, W. W., *A short account of the history of mathematics*, Dover (reprint), 1960.
6. Boyer, C. B., *A history of mathematics*, 1968.
7. Eves, H., *An introduction to the history of mathematics*, Rinehart and company, Inc., 1953.
8. Kline, M., *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, 1972.
9. Smith, D. E., *History of mathematics*, vols. 1 and 2, Dover Publication , Inc., 1953.