數系的擴展——
算術發展的抽象化過程(中)

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

丁、無理數

無理數的概念，在古巴比倫人、埃及人、與中國人的算術中都沒有出現；儘管他們曾接觸到圓周率與方根等無理數，然而，對於這些數，他們只是致力於其（近似）值的計算，至於這些數是否能以整數或分數來表示，並沒有特別加以考慮。

一、希臘人的無理數概念

根據希臘數學家Proclus（412？～485）的說法，最先發現無理數的人是Pythagoras（紀元前六世紀）學派的學者。無理數的發現，對Pythagoras 或其學派的學者而言，造成了很大的震撼。因為他們一向認為任何兩線段都有公共的測量單位，也就是說，對任意二線段 S_1 與 S_2，必可找到一線段 S_3，使得 S_1 與 S_2 之長都是 S_3 之長的整數倍。當兩線段具有這個性質時，古希臘學者稱這兩線段為可共度的（commensurable）線段。如果兩線段沒有上述性質，則稱其為不可共度。以現代數學的術語來表示，所謂兩線段可共度，乃是指它們之長的比值是有理數。

正方形的對角線與它的邊不可共度；當線段 $\overline{AB}$ 上的一點 C 將 $\overline{AB}$ 黃金分割（即 $\overline{AB}:\overline{AC}=\overline{AC}:\overline{CB}$）時，$\overline{AB}$，$\overline{AC}$，$\overline{CB}$ 三線段兩兩不可共度。Pythagoras 學派的學者發現兩線段不一定可共度這個事實，一般以為所引用的例子就是正方形的對角線與邊，因為這個例子乃是Pythagoras 定理（或稱勾股弦定理）的應用。依Pythagoras 定理，正方形的對角線長與邊長的比值為（以現代記號表示）$\sqrt{2}$。$\sqrt{2}$ 不能表示成兩個整數的商，這個性質在Euclid（紀元前三世紀）的曠世名著 Elements 第十卷最後一

個命題（命題117）中給了證明，不過，德國著名的數學（史）家Hermann Hankel（1839～1873）却認為Euclid所給的證明是Pythagoras學派的人先提出來的。

Pythagoras學派的哲學主張是"宇宙萬物的本質是數"，他們所指的數只是整數。分數是可以由做為萬物本質的整數引導出來的，可是像$\sqrt{2}$這種數却不能由整數在有限的過程中推衍出來；這件事實說明了Pythagoras的哲學主張有了瑕疵。由於無理數的存在對Pythagoras哲學造成了威脅，所以，後世有這麼一個傳說（有人姑妄言之，我們何妨姑妄聽之）：當正方形的對角線與邊不可共度這個事實被Hippasus of Metapontum（紀元前五世紀）所發現時，Pythagoras 學派的學者們正在海上。一聽到這個眞象，Pythagoras學派的人把Hippasus丢出船外，並告誡其他人必須嚴守秘密，不可洩漏這個事實。

然而，這樣的"秘密"是守不住的。Pythagoras學派後期的一位數學家Theodorus of Cyrene（紀元前四世紀）以幾何方法證明$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{11}$、$\sqrt{12}$、$\sqrt{13}$、$\sqrt{14}$、$\sqrt{15}$與$\sqrt{17}$都與1不可共度（或者說，都不是有理數）。他的一位學生Theaetetus 開始對不可共度量（與1不可共度的量）加以探討。他先區分可共度量與不可共度量；在不可共度量中，他又區分平方後變成可共度的量（像$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$等）與平方後仍不可共度的量（像$\sqrt{1+\sqrt{3}}$、$\sqrt{\sqrt{5}-1}$等）。換句話說，Theaetetus對二次根數做了探討。

不可共度量或者說無理數的發現，帶來了希臘數學的一個重要問題。Pythagoras學派的人一向是把數與幾何做一一對應的，不可共度線段的發現，使得這種一一對應的關係遭受到破壞。因為幾何中有不可共度的比值，可是却沒有與這種不可共度比值對應的數。幾何學家仍然一如往昔地考慮幾何上各種長度、面積、以及比值，可是，代數學家並沒有接受不可共度量來做為一種數。所以，古希臘人並沒有發展出無理數的算術，他們只是把這種不可共度量看成幾何上的長度、面積、體積等。由於這類幾何量經常需要涉及到某些算術演算（尤其是比例），所以，希臘人不得不特地為了幾何上的用途而建立不可共度量的比例理論。這項比例理論是Eudoxus of Cnidos（紀元前四世紀）所提出來的，而收錄在Euclid的Elements第五卷之中，它可以說是Euclid 幾何中的一項偉大成就。

Eudoxus通常被譽為古希臘時代僅次於Archimedes（紀元前三世紀）的偉大數學家，紀元前三世紀的另一位數學家Eratosthenes稱譽他"像神似的"（godlike）。Eudoxus首先提出度量（magnitude）的概念，他所稱的度量並不是數，而只是代表像

線段、角、面積、體積、與時間等這類可以連續變動的幾何要素。接著，Eudoxus說明一個度量對另一個同性質的度量可以考慮做為測量（measure）單位的問題，由此引出度量的大小關係與倍數關係。其次，Eudoxus 說明比（ratio）的概念，所謂比，乃是指兩個同性質度量間的關係。根據這個定義，圓周與圓面積是不可以考慮比的。Eudoxus 認為，兩個度量必須在「其中任一度量的某個倍數大於另一度量」的情形下才可以考慮比。最後，Eudoxus 定義了比例的意義。四個度量 a、b、c、d 的比相同，或稱為成比例，乃是指將第一度量 a 及第三度量 c 的同一倍數 na 及 nc，與第二度量 b 及第四度量 d 的同一倍數 mb 及 md 分別做比較，如果下面的條件成立，則稱其成比例：

(1)　若 $na > mb$，則 $nc > md$；

(2)　若 $na = mb$，則 $nc = md$；

(3)　若 $na < mb$，則 $nc < md$。

Eudoxus 的比例理論，或者說 Euclid 所著 Elements 第五卷的內容，完全以幾何的方法來處理正實數的一些問題。就實數的角度來看，這些內容完全沒有建立無理數的邏輯基礎。就幾何的角度來看，或許提供了嚴密的幾何比例理論，不過，其中仍然有些缺失，例如，度量一詞，並沒有一個嚴密而清楚的定義。總之，就無理數概念的引進來說，Eudoxus 與 Euclid 所用的幾何方法，應該說是失敗的。而他們的做法，也為後來的數學發展留下了一個後遺症，那就是：只有幾何才有嚴密的不可共度量理論，所以，只有幾何才是嚴密的數學。當歐洲文藝復興時期以及往後的幾百年，無理數再度被引進時，許多數學家反對無理數，其理由就是因為無理數缺乏邏輯基礎。此外，也因為算術與代數不像 Euclid 幾何有嚴密的公理化方法與邏輯基礎，所以，由古希臘時代到歐洲文藝復興時期，數學上可以說是幾何當家，這種現象持續到微積分問世之後才改觀。

Euclid 除了在 Elements 第五卷中闡述了與無理數有關的 Eudoxus 比例理論之外，在 Elements 第十卷中則對無理數做了一些分類的工作。在這項分類工作中，Euclid 探討了長度可以表示成 $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$ 的所有線段，其中 a 與 b 為有理數。無理數當然並非都是這種形式，他所討論的無理數，只是他的幾何代數中所出現的那一類。

儘管古希臘的數學家不把無理數看成數，因而發展出定性的幾何。不過，到了亞歷山大時代，情形就有了改變。亞歷山大時代的數學家大都不再排斥無理數，他們隨意地用無理數來表示長度、面積、與體積等，由此他們才能發展出三角學。在使用無理數時，只好使用近似值，像 Heron（西元一世紀）就是如此，在他的作品中可以找到以

$a+\frac{r}{2a}$ 做為 $\sqrt{a^2+r}$ 之近似值的例子。Archimedes （紀元前三世紀）則喜歡定出無理數的上、下限，例如，他得出

$$\frac{265}{153}<\sqrt{3}<\frac{1351}{780}$$

$$3\frac{10}{71}<\pi<3\frac{1}{7}$$

不過，Diophantus （西元三世紀）是一位純代數學家，由於當時的代數學還沒有接受無理數、負數與虛數，所以，他排斥所有具備這種根的方程式。

最後，我們談談希臘人為無理數命名的一件趣事。一個數若可以表示成比的形式，希臘人稱之為 logos（其意義為 ratio），而不能表示成比的數，則稱之為 a-logos（其意為 not ratio-nal）。logos 這個字，在希臘文中的另一個意義是“文字”或“文字的含義”，當阿拉伯數學家Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi（780～850）使用一部希臘著作的阿拉伯文譯本時，由於譯者沒有把 a-logos 這個字照 not ratio-nal 這個專門意義翻譯，而照其普通意義without a word 翻譯成阿拉伯文中意義是聾子（deaf）的字，所以，al-Khowarizmi 就用這個字來稱呼 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 等形式的數。大約三百年後，當Gherado of Cremona（1114～1187）在西元1150年翻譯 al-Khowarizmi 的名著 Algebra 時，將這個意指聾子的阿拉伯字翻譯成拉丁文的 surdus（無聲的），所以，後世才會把 $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$ 這類數稱為 surd number 。

二、十九世紀以前無理數概念的演進

希臘人由正方形的對角線長與邊長的比值，引出了無理數的概念，然而却不肯把無理數看成數。印度人對無理數所持的態度與希臘人不同。他們很坦然地接受了無理數，進行無理數的運算時，都像有理數一樣，沒有特意地加以區分。這種現象對數學的不斷進步頗有幫助。

印度人是什麼時候開始接觸到無理數，這一點沒有明確的考證。有人認為在 Pythagoras 時代，即印度的古老數學著作 Sulvasutras 出現時，就由「將直角三角形相似地將面積放大三倍」的問題引出了 $\sqrt{3}$ ，不過，却沒有確實的證據。倒是在西元十二世紀印度數學家 Bhāskara 的著作中，記載有像下面這類正確的等式：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}$$

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)^2 b}$$

事實上，Bhāskara 曾經考慮像 $a+\sqrt{b}$ 與 $a+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$ 這種數之平方根的求法。他也解了下面這樣的問題：「有一三角形，兩邊長分別爲 $\sqrt{10}-\sqrt{5}$ 與 $\sqrt{6}$，底的長爲 $\sqrt{18}-1$，求其高。」（答案是 $\sqrt{2}-1$），可見對二次根數的運算已非常熟悉了。

阿拉伯人承襲了印度人的做法，也很自由地使用無理數，阿拉伯數學家 Omar Khayyam（1048？～1122）與 Nasir-Eddin（1201～1274）很清楚地表示，任何度量的比值都可以稱爲數，不論它是可共度量或不可共度量，都是如此。Omar Khayyam 曾經嘗試著要把 Eudoxus 與 Euclid 的比例理論以算術的方式來表現，可見他已經接觸到無理數的定義這個理論性的問題。

在無理數的運算方面，阿拉伯人也接收了印度人的成果，同時也得出了 $\sqrt{a^2b}=a\sqrt{b}$ 與 $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ 這些定律。

代數學之父 al-Khowarizmi（780～850）在討論一元二次方程式時，也已接受無理根（但他不接受負根）。

義大利數學家 Leonardo Fibonacci（1180～1250）在無理數方面有一個重要發現。他指出 Euclid 在 Elements 第十卷所分類出來的二十五種無理數，並不是無理數的所有形式。事實上，他證明方程式 $x^3+2x^2+10x=20$ 的根不能以圓規及直尺來作圖，換句話說，以古希臘的幾何作圖法，無法作出一線段，使其長爲上述三次方程式的根。他以六十進位法寫出這個正根的近似值爲 1;22,7,42,33,4,40 或 1.368808107⋯。前面所舉的例子，事實上替無理數做了一個新的分類，即可作圖數（constructible number）與不可作圖數。

到了西元十六世紀，歐洲數學家大都已自由地使用無理數。例如，德國數學家 Michael Stifel（1486～1567）探討形如 $\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{b}}$ 的無理數。義大利數學家 Jerome Cardano（1501～1576）因爲討論三次方程式的一般解法，附帶考慮了三次根數的有理化問題。法國數學家 Francois Vieta（1540～1603）則把 π 以一個無窮乘積來表示：

$$\pi = \cos\frac{90^\circ}{2}\cos\frac{90^\circ}{4}\cos\frac{90^\circ}{8}\cdots\cdots$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots\cdots$$

雖然在計算方面，數學家們很自在地使用無理數；然而，無理數到底是不是實數，這個問題仍然困擾著他們。Stifel表示說：當考慮幾何圖形時，從長度、面積與體積等方面來看，我們不能不把無理數看成實數；可是，當我們考慮無理數的小數表示法時，却又發現它們無法像分數一樣得出一個明確的表示法，所以我們不能把無理數看成眞正的數。即使到了西元十七世紀，法國數學家Blaise Pascal（1623～1662）、英國數學家 Isaac Barrow（1630～1677）都認爲像$\sqrt{2}$這種數只是幾何上的度量、它們只是一種符號、不能脫離幾何度量而單獨存在、無理數的運算邏輯只能依賴Eudoxus的度量理論來建立。英國大數學家 Isaac Newton（1642～1727）在他西元1707年的著作 Arithmetica Universalis 中也持這種看法。儘管如此，坐標幾何的發明人René Descartes（1590～1650）却提出了數與幾何度量可以建立一一對應關係的概念。

大體來說，從文藝復興以後到西元十九世紀的兩三百年間，數學家們都在這種無法坦然接受但又不能不與之接觸的情況下，讓無理數逐漸深入數學的各個領域。這期間也有一些成果必須提出來：英國數學家 John Wallis（1616～1703）在西元1696 年證明有理數與循環小數是一回事；而德國數學家Otto Stolz（1842～1905）則在西元1886年的著作Vorlesungen über allgemeine Arithmetik 中證明無理數都可以表示成不循環的無限小數（不過，無理數的理論已經在二十多年前就建立了）。西元1737年，瑞士數學家Leonhard Euler（1707～1783）證明e與e^2是無理數。德國數學家 Johann Heinrich Lambert（1728～1777）則在西元1761年證明π是無理數，以及有理數的自然對數都是無理數。法國數學家Adrien-Marie Legendre（1752～1833）猜測π不可能是任何有理係數多項方程式的根；這個事實在西元1882年被德國數學家 Ferdinand Lindemann（1852～1939）加以證明。Legendre這個臆測，開拓了實數的另一種分類方法。若一個數是某有理係數多項方程式的一根，則此數稱爲代數數（algebraic number）；否則，稱之爲超越數（transcendental number），因爲就像 Euler 所說的“這種數超越了代數方法的威力範圍”。西元1873年，法國數學家 Charles Hermite（1822～1901） 證明e是超越數。不過，第一個超越數却是法國數學家 Joseph Liouville（1809～1882）在西元1844 年最先提出來的，他證明：不

論a_1，a_2，…，a_n，… 是0至9間的任何整數（但不能全部爲0），下面這個實數是超越數：

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^{2!}}+\frac{a_3}{10^{3!}}+\cdots+\frac{a_n}{10^{n!}}+\cdots$$

西元1734年，Euler證明下面的極限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\log_e n\right)$$

此極限之值爲0.577215664…，通常以γ表之而稱爲Euler 常數。γ是有理數或無理數、代數數或超越數，目前還沒有人得出結果，而且也沒有人得出γ的更簡單表示式。

戊、負　數

負數進入數學領域之中，比起整數、分數、甚至無理數，爲時都較晚。不過，與虛數相較，則略爲早些。在古巴比倫人與埃及人的算術中尚未出現有關負數的問題，而中國、希臘、印度、阿拉伯的數學則都與負數概念有所接觸。

一、中國人的負數概念

在中國的古代算書中，最先出現負數這個名稱的著作是九章算術。在第七章(方程)的第四題，我們可以看到負係數的方程式，其原文如下：

「今有上禾五秉，損實一斗一升，當下禾七秉。上禾七秉，損實二斗五升，當下禾五秉。問上、下禾實一秉各幾何？」

「答曰：上禾一秉五升，下禾一秉二升。」

「術曰：如方程；置上禾五秉正，下禾七秉負，損實一斗一升正。次置上禾七秉正，下禾五秉負，損實二斗五升正，以正負術入之。」

在前面這個問題中，若令上禾一秉爲x升，下禾一秉爲y升，則「上禾一秉，損實一斗一升，當下禾七秉」的意思是$5x-11=7y$；下一段假設則爲$7x-25=5y$。換句話說，這個問題就是要解下面的一次方程組：

$$\begin{cases}5x-7y=11\\7x-5y=25\end{cases}$$

所以，在「術曰」中說「置上禾五秉“正”，下禾七秉“負”，損實一斗一升“正”。」

至於所謂的「正負術」，則寫在方程章第三題的後面，其原文爲「正負術曰：同名相除，異名相益；正無入，負之；負無入，正之。其異名相除，同名相益；正無入，正之；負無入，負之。」這段話的含意，我們解說如下。“同名”、“異名”分別指符號相同、相異；“相益”、“相除”分別指相加、相減；“無入”是指由零減去或加入。所以，這段「正負術」的意義如下：

$$\left.\begin{array}{c}\text{同名相除}\qquad\text{異名相益}\\(+a)-(+b)=(+a)+(-b)\\(-a)-(-b)=(-a)+(+b)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{正無入}\qquad\text{負之}\\(+0)-(+b)=-b\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{負無入}\qquad\text{正之}\\(+0)-(-b)=+b\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{異名相除}\qquad\text{同名相異}\\(+a)-(-b)=(+a)+(+b)\\(-a)-(+b)=(-a)+(-b)\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{正無入}\qquad\text{正之}\\(+0)-(-b)=+b\end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{負無入}\qquad\text{負之}\\(-0)-(+b)=-b\end{array}\right\}$$

至於算籌上正數與負數的表示法，劉徽在「正負術」的注文中說：「今兩算得失相反，要令正負以名之。正算赤，負算黑，否則以邪正爲異。」換句話說，以紅色的算籌表示正數，以黑色的算籌表示負數。不過，後來有些改變。例如，隋書律曆志上說：「其算用竹，廣二分，長三寸。正策三廉，積二百一十六枚成六觚，乾之策也。負策四廉，積一百四十四枚成方，坤之策也。觚、方皆徑十二，天、地之數也。」這表示以三角形算籌表示正數，正方形算籌表示負數。至於其中所謂的「觚、方」，只表示古人在存放算籌時，習慣把216枚三角形算籌綑成一個正六邊形，144枚正方形算籌綑成一個正方形。到了宋朝，表示負數的方法又有所改變。他們採用劉徽所說的「以邪正爲異」

的說法，要表示負數時，在該數的最末一位上加一斜放的算籌。例如，－3456 表示成 ☰|||☰⊤̸，如此就不必以算籌的顏色來區分了。

負數的運算，在加法與減法方面，九章算術方程章已經說明清楚了。至於乘法與減法，則是在元成宗大德三年（西元1299年）大數學家朱世傑所著的算學啓蒙中的「明正負術」才有詳細的說明。

二、希臘人、印度人與阿拉伯人的負數概念

在西方的數學著作中，最先提到負數的作品是西元三世紀希臘數學家 Diophantus 所著的 Arithmetica 。在其中，Diophantus 認爲方程式 $4x+20=4$ 是荒謬的（absurd），因爲它的根是－4。事實上，Diophantus只接受正有理根而排斥方程式的其他各種根，而且當二次方程式有兩個正根時，他也只提出較大那一個；而當一個方程式會得出負根或虛根時，他根本不予考慮。在某些問題中，他都特意地加上一些條件，以保證會得出正根。例如，「試求三數，使其中兩兩之和分別等於三個已知數。」若三已知數爲 a、b、c，則所求的三數爲 $\frac{1}{2}(b+c-a)$、$\frac{1}{2}(c+a-b)$、$\frac{1}{2}(a+b-c)$。爲了保證會得出正根，他特別加了一個假設：「三個已知數都比三數之和的一半小」。

對於負數與零的算術演算規則，最先做有系統說明的著作，乃是西元七世紀印度數學家 Brahmagupta 所著的 Brahmasphuta Siddhānta（西元628 年左右）。其中，他以負數表示債務，正數表示資產；並敍述了“正數乘正數爲正數，負數乘負數爲正數，正數乘負數爲負數”等這類運算規則，不過，他也得出像 $0\div 0=0$ 這種不正確的結果。Brahmagupta 得出了二次方程式的一般解公式，而在考慮二次方程式時，由於他容許係數爲負數，所以，就不必像 Diophantus 把二次方程式分成下面三種形式來討論：

$$ax^2+bx=c\ ,\quad ax^2=bx+c\ ,\quad ax^2+c=bx\ ,\quad (a\ ,b\ ,c\ \text{爲正數})$$

Brahmagupta 之後討論負數運算規則的數學家是西元九世紀印度的Mahāvīra，此後印度的數學著作都有負數的介紹。不過，印度人也並不是全都接受負數。甚至像西元十二世紀的印度數學家 Bhāskara 在得出某個二次方程式的兩根 50 與－5時，他說：「第二個值要捨去，一般人不接受負根。」可見印度人知道負數，但却不把它做爲方程式的根。

Bhāskara 已經發現，正數與負數的平方都是正數；並且指出：正數有兩個平方根

，一個是正數，一個是負數。他還說明負數沒有平方根，因爲當時沒有虛數的觀念。

在負數方面，阿拉伯人沒有新的貢獻；甚至連被稱爲代數學之父的Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi（780～850）都不使用負數。他不僅避免像－2這樣的數單獨出現；甚至在減法中，都儘量不讓減數大於被減數；討論二次方程式時，比Diophantus多分出兩類，即共有下面五類：

$$ax^2=bx\ ,\quad ax^2=c\ ,\quad ax^2+c=bx\ ,\quad ax^2+bx=c\ ,\quad ax^2=bx+c$$

其中a、b、c都是正數。不過，由於al-Khowarizmi所著的Algebra參考了Brahmagupta的作品，所以，阿拉伯人對負數的運算規則是有所了解的。

三、負數的認定

中世紀著名的義大利數學家Leonardo Fibonacci（1180～1250）可能是承襲阿拉伯人的習慣，他也同樣不接受負根；不過，在他西元1225年的著作Flos一個討論有關錢財的問題中，他進一步地把負數用來表示賠錢，正數表示賺錢；此種做法與印度人頗爲相似。

在歐洲的數學著作中，方程式的係數出現負數的作品，最早是法國數學家Nicolas Chuquet（1445？～1500？）在西元1484年所著的Triparty en la sciences des nombres。其中有一個方程式寫成“ $.4.^1$ egaulx a $\bar{\text{m}}.2.^0$ ”，以現代符號表示，就是$4x=-2$。不過，Chuquet與德國數學家Michael Stifel（1487～1567）都把負數稱爲荒謬的數（absurd number）。

法國數學家Francois Vieta（1540～1603）討論方程式時，拒絕係數或根爲負數的情形，他在敘述一個類似“根與係數關係”的結果時，還刻意地避開負數的使用。他的說法是這樣的：若方程式$x^3+b=3ax$有二正根x_1與x_2，則可得

$$3a=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$$
$$b=x_1x_2^2+x_1^2x_2$$

倒是荷蘭數學家Albert Girard（1595～1632）在他西元1629年的著作Invention nouvelle en l'algebre中，任何種類的根都接受，所以，才能把根與係數關係敘述得清楚。

對於負數，Girard 有一個很進步的概念。他指出“負數可以看成是與正數相反方向的數”，這種看法正是“數線概念”的濫觴。他還說：在幾何上，負數可以表示後退，而正數表示前進。

德國數學家Michael Stifel 雖然把負數稱爲荒謬的數，可是，在他西元1544年的著作Arithmetica integra 中，却也介紹了負數的用途；而且他認爲負數比零小。

義大利數學家 Jerome Cardano（1501～1576）在他西元1545年的著作Ars magna中，接受了負根的概念，但却認爲負根只是一種符號，是不可能的解，所以，他把負數稱爲假的數（fictitious number）。雖然如此，他還是對負數的運算做了探討，也提出了像“負數乘負數爲正數”這樣的規則。

總之，在西元十六、十七世紀間，數學家們對於負數是抱著遲疑的態度。負數在西元十八世紀終於被認定，還是依賴義大利數學家Rafael Bombelli（1526～1573）、英國數學家Thomas Harriot（1560～1621）、法國數學家René Descartes（1596～1650）與Pierre de Fermat（1601～1665）、以及荷蘭數學家 Johann Hudde（1629～1704）等人的影響。例如，Bombelli 在他西元1572年的著作Algebra 中，對涉及負數的運算規則做了詳細的介紹，像$(+15)+(-20)=-5$ 這種等式已經運用自如。Hudde 是最先使用一個字母來表示正數或負數的數學家，換句話說，像ax^2+bx+c 這個多項式中，a、b、c 可以代表正數或負數或0。

英國數學家 John Wallis（1616～1703）雖然率先接受負數，可是，他却認爲負數大於無限大而不小於0，在他西元1655年的著作Arithmetica Infinitorum 中，他辯證說：若a是正數，則$\frac{a}{0}$是無限大；將0改爲負數b時，所得比值應該大於無限大。這顯然有些矛盾。不過，甚至到西元十八世紀後半，瑞士數學家Leonhard Euler（1707～1783）也還相信負數大於∞。

另一件趣事發生在法國數學家Antoine Arnauld（1612～1694）身上，他懷疑$(-1):1=1:(-1)$的正確性。他說：“-1 小於1，那麼，小數與大數的比值，怎麼可能等於大數與小數的比值呢？”這個問題有不少人都討論過。西元1712年，德國數學家Gottfried Leibniz（1646～1716）說：“這其中確實有些問題，不過，這個比例仍然可以使用，因爲它是正確的”。這又是一個似是而非的說法。事實上，即使是西元十八世紀的數學家，都還沒有完全了解負數。

在負數的表示法方面，也有過許多改變。例如，Cardano把-3表示成$m:3$；

Stifel 表示成 $0-3$；Bombelli 表示成 $m.3$；最先使用 $+3$ 與 -3 這種表示法的人，可能是丹麥天文學家 Tycho Brahe（1546～1601）。

在名稱方面，印度數學家將正數也稱爲 affirmative number；Cardano 把正數稱爲 numeri urei（real number）、負數稱爲 numeri ficti（fictitious number）；John Napier 則稱正數爲 abundant number、負數稱爲 deficient number。Tycho Brahe 把負數稱爲 private number。negative number 這個名稱是德國數學家 Johann Scheubel（1494～1570）最先使用的。

己、虛　數

在各種數中，虛數出現得最晚。古巴比倫人、埃及人、中國人與阿拉伯人，似乎都沒有接觸到這個問題。

一、負數的平方根

最先出現「需將負數開平方之問題」的數學著作，乃是西元一世紀希臘數學家 Heron of Alexandria 所著的 Stereometria。在其中，$\sqrt{81-144}$ 被寫成 $\sqrt{144-81}$，使得原來不可能求得解的 $\sqrt{-63}$ 變成 $8-\frac{1}{16}$（Heron 以 $a-\frac{r}{2a}$ 做爲 $\sqrt{a^2-r}$ 的近似值）。這個錯誤係出自 Heron 本人或是後來的抄寫者，則不得而知。就這樣，原本涉及負數之平方根的問題，因爲誤寫而被忽略了。

希臘數學家 Diophantus（西元三世紀）所著的 Arithmetica 中，有這麼一個問題：「一直角三角形的周長爲 12，而面積爲 7，試求其邊長。」若以 x 表示其一直角邊的長，則得出一個二次方程式 $24x^2+336=172x$。Diophantus 指出此方程式不能解，因爲 x 的係數之一半的平方減去 24×336 不是一個完全平方（除了有理數外，Diophantus 不接受其他形式的根）。當時，Diophantus 似乎也不曾考慮虛根的問題。

印度數學家 Mahāvīra（西元九世紀）是第一位談到負數之平方根的數學家。他說：“根據數的性質，負數都不是平方數，所以，負數沒有平方根”。西元十二世紀的印度數學家 Bhāskara 在他所著的 Vija-Ganita 中說得更清楚：“正數或負數的平方都是正數；而正數都有兩個平方根，一爲正數，一爲負數。負數則沒有平方根，因爲負數不是平方數”。

法國數學家Nicolas Chuquet（1445？～1500？）在他西元1484年所著的Triparty中，也曾提到有些二次方程式不可能求解。義大利數學家Luca Pacioli（1445～1514）在他西元1494年所著的Sūma中，指出二元方程式$x^2+c=bx$除非滿足$\frac{1}{4}b^2 \geqslant c$，否則就不可能求解。可見西元十五世紀的數學家還不曾有過創設新數的想法。

負數的平方根問題所帶來的困擾，感受較深刻的應該是義大利數學家Jerome Cardano（1501～1576）。在他西元1545年所著的Ars magna中，他提出了三次方程式的一般解法。其中有一個例子是$x^3=15x+4$，根據他的一般公式，可得出一個解為$x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$。Cardano知道負數沒有平方根，可是這個方程式明明有一個解是$x=4$；他無法了解他的一般公式怎麼會造成這種現象。一個實數可以表示成兩個"虛數"的和，這個現象並沒有使Cardano深入去探討虛數，他只是把負數的平方根冠上一個強辭奪理（sophistic）的頭銜。而在另一個問題"將10分成兩部分，使其乘積為40"中，他得出了$5+\sqrt{-15}$與$5-\sqrt{-15}$；面對這個結果，Cardano驗證說$5+\sqrt{-15}$與$5-\sqrt{-15}$的和為10而乘積為$25-(-15)=40$，於是，他表示說這是很巧妙但却無用的結果。

義大利數學家Rafael Bombelli（1526～1573）對於Cardano求解$x^3=15x+4$時所產生的困擾，曾做過一些解釋。他指出：當兩個數具有某種特殊關係時，它們開方所得的數也可能具備同一種關係。Bombelli的說明雖不是非常清楚，但他已經指出共軛複數的一個重要性質：若$a+b\sqrt{-1}$是$c+d\sqrt{-1}$的一個n次方根，則$a-b\sqrt{-1}$是$c-d\sqrt{-1}$的一個n次方根（其中a、b、c、d都是實數）。

荷蘭數學家Albert Girard（1595～1632）為了要得出方程式的根與係數關係，他表示應該接受虛根，至少把它們看成是形式上的根；如此才能保證n次方程式必有n個根。

法國數學家René Descartes（1596～1650）把負根稱為假根（false root），而對於像前述$5+\sqrt{-15}$這種形式的根則稱之為imaginary root，這是後來imaginary number（虛數）這個名稱的來源；而與imaginary相對的real，這個字也是Descartes最先使用的。不過，Descartes基本上都不接受負數與虛數來做為方程式的根。

英國大數學家Isaac Newton（1642～1727）也沒有把虛數看得頂重要，也許是

由於當時尚沒有發現虛數的物理意義的緣故。

德國數學家Gottfried Leibniz（1646～1716）對於複數曾提出了不少“形式上的”結果。例如，他在西元1702年把x^4+a^4分解成

$$(x+a\sqrt{\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{\sqrt{-1}})(x+a\sqrt{-\sqrt{-1}})(x-a\sqrt{-\sqrt{-1}})$$

而且他在西元1676年就證明了下面這個等式：

$$\sqrt{6}=\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$$

將一個正實數分解成兩個虛數的和，這個結果曾令當時的數學家們感到驚訝。此外，Leibniz 曾經臆測一個性質：若$f(z)$是一個實係數多項式，則對任意實數a與b，$f(a+\sqrt{-1}\,b)+f(a-\sqrt{-1}\,b)$必是實數。不過，Leibniz 並沒能證明這個結果；可見Leibniz對於複數的運算及其有關性質，並沒有完全的了解。Leibniz 也是一位傑出的神學家，他說：虛數乃是介於“存在”與“不存在”之間的一種概念，就像天主教神學所謂的聖靈（Holy Ghost）。

二、分析數學與虛數

西元1702年，瑞士數學家John Bernoulli（1667～1748）在計算下面這個積分

$$\int\frac{dz}{b^2+z^2}$$

時，利用下面這個變數變換

$$z=bi\,\frac{t-1}{t+1}$$

而使積分變成

$$\int\frac{i}{2bt}\,dt=\frac{i}{2b}\log_e t=\frac{i}{2b}\log_e\left(\frac{bi+z}{bi-z}\right)$$

可是，另一方面，他也知道

$$\int\frac{dz}{b^2+z^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{z}{b}$$

由此，他得出了下面的關係式

$$\tan^{-1} z=\frac{1}{i}\log_e\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

John Bernoulli的發現，引起了相當的震撼。首先，當時的數學家大都還是把虛數看成“不可能”或“不存在”，可是，Bernoulli 不僅把虛數引進分析數學之中，甚至將兩個原本獨立的函數結合起來。此外，從 John Napier 發明對數以來，一直都只“容許”正數才有對數，而Bernoulli 所得的表示式中却有虛數的對數；因此，John Bernoulli 的發現引發了長達十年的爭議——負數與虛數有沒有對數？

前段所提的爭議，乃是從Leibniz 與 John Bernoulli 開始，爭論的重點在於負數的對數。兩人的爭論都是以書信方式很友善的進行，從西元1712年到1713年共達十六個月。Leibniz 的看法是負數沒有對數，或者更正確地說，負數沒有實數值的對數。可是，John Bernoulli 却努力想證明負數有實數值的對數。雙方各持自己的看法，而沒有得出定論。

負數是否有對數的第二階段爭論，發生在 John Bernoulli 與他的學生瑞士大數學家Leonhard Euler（1707～1783）之間。從西元1727年至1731年間，John Bernoulli 仍然堅持他十多年前的看法，可是Euler 却對 John Bernoulli 所提的 $\log_e(-x)=\log_e x$ 表示不同意，不過，Euler 本人却也沒有一個固定的看法。

直到西元1747年，Euler 提出多値函數（multi-valued function）的概念來定義非零複數的對數之後，法國Jean Le Rond d'Alembert（1717～1783）仍然無法信服而努力想證明 $\log_e(-1)=0$。不過，現代數學却已接受了Euler 的定義方法。

關於複數的對數這個問題，是隨著其他相關問題的發展而逐漸澄清的。這其中主要的成就是數學家們對於指數與三角函數的關係理出了頭緒，而主要的貢獻者則是英國數學家Roger Cotes（1682～1716）、法國數學家Abraham de Moivre（1667～1754）以及Euler。

西元1714年，Cotes 在Philosophical transactions 上發表了一篇論文，其中所得的一個結果以現代數學術語表示，就是

$$\sqrt{-1}\,\varphi=\log_e(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

Cotes 得出這個結果的過程，以現代術語說明，乃是：將橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$（$b>a>0$）繞 y 軸旋轉，則此旋轉體在 $y=0$ 至 $y=t$ 之間那一段的表面積爲

$$S=2a\pi\int_0^t\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2}\,dy$$

此值有兩個表示法：

$$S=a\pi\left[t\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log_e\left(t\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}}+\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}\right)\right]$$

$$S=a\pi\left[t\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2-a^2}}\varphi\right]$$

其中 $\sin\varphi=t\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^4}}$ ，$\cos\varphi=\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}$ 。將兩式比較，即得上面的等式。

法國數學家Abraham de Moivre（1667～1754）在西元1707年發表的一篇論文中，為了要從下列兩式

$$\begin{cases}1-2z^n+z^{2n}=-2z^nt\\1-2z+z^2=-2zx\end{cases}$$

中消去 z ，他令 $x=1-\cos\varphi$ ，$t=1-\cos n\varphi$ ，因而得出

$$(\cos\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi)^n=\cos n\varphi\pm\sqrt{-1}\sin n\varphi$$

這個公式，de Moivre 只考慮了 n 為正整數的情形；Euler 在西元1748年的著作 Introducio in analysin infinitorum中才推廣到所有整數。

西元1740年，Euler 在給 John Bernoulli 的一封信中，提到 $y=2\cos x$ 與 $y=e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}$ 乃是同一個微分方程式的解（他是根據冪級數求解法發現這個結果），因此，這兩個函數應該相等。這個結果在西元1747年發表，即

$$\cos x=\frac{e^{\sqrt{-1}x}+e^{-\sqrt{-1}x}}{2},\quad \sin x=\frac{e^{\sqrt{-1}x}-e^{-\sqrt{-1}x}}{2\sqrt{-1}}$$

$$e^{\sqrt{-1}x}=\cos x+\sqrt{-1}\sin x$$

西元1747年，Euler 定義了非零複數的對數。他的論證方法其實是錯誤的，我們介紹如下：

$$x=e^y=\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

其中 n 是很大的數（請注意，上述第二個等號不成立），則得

$$x^{\frac{1}{n}}=1+\frac{y}{n}$$

或是

$$y=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

由於有無數多個不同的 $x^{\frac{1}{n}}$，所以，也有無數多不同的 y 值。又因爲 $y=\log_e x$，所以，$\log_e x$ 有無數多不同的值。事實上，他把無數多個 $\log_e x$ 用下法來計算：設

$$x=a+b\sqrt{-1}=c(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$$

令 $c=e^C$，則得

$$x=e^C(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)=e^C e^{\sqrt{-1}(\varphi\pm2\lambda\pi)}$$

於是，得

$$y=\log_e x=C+(\varphi\pm2\lambda\pi)\sqrt{-1}$$

其中 λ 是正整數或0（這段計算方法就是現代數學中所用的方法）。然後，Euler 下結論說：對正實數而言，只有一個對數值是實數，其餘的對數值都是虛數；而負數與虛數，則每個對數值都是虛數。

除了定義複數的對數之外，Euler 在西元1749 年又利用複數的對數來定義複數的複數乘冪。他的做法是這樣的：設 a、b、m、n、x 與 y 爲實數，若

$$(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}=x+y\sqrt{-1}$$

他在兩邊取對數，令 $c=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\varphi=\dfrac{a}{c}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{c}$，而得出

$$x=c^m e^{-n\varphi}\cos(m\varphi+n\log_e c)$$
$$y=c^m e^{-n\varphi}\sin(m\varphi+n\log_e c)$$

由於滿足 $\cos\varphi=\dfrac{a}{c}$ 與 $\sin\varphi=\dfrac{b}{c}$ 的角 φ 有無數多。於是，他說，像 $(a+b\sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ 這種廣義的指數也是“多值的”。例如，

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=e^{-2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}}$$

其中 λ 爲任意整數。當 $\lambda=0$ 時，Euler 得到一個近似值爲0.2078795763。

與Euler同時代的法國數學家Jean Le Rond d'Alembert（1717～1783）對於複數的探討也非常熱衷。荷蘭數學家Albert Girard（1595～1632）曾經有一個臆測：每個次數不為0的複數係數多項方程式至少有一個複數根。d'Alembert 對這個臆測的證明最感興趣，所以，近代法國人都把這個現代數學中稱為代數基本定理的臆測稱為d'Alembert 定理。多項方程式的求解，可以看成是一種廣義的代數運算；所以，d'Alembert 對這個臆測所做的努力，可以看成是想證明"對一個複數進行任何代數運算，所得的結果仍是一個複數"。而Euler 對複數考慮對數與複數乘冪，甚至考慮複數的三角函數與雙曲線函數等，却是在對複數進行初等超越運算。換言之，對複數進行初等超越運算，所得的結果仍是一個複數。例如，

$$\begin{aligned}\sin(1+\sqrt{-1}) &= \frac{e^{\sqrt{-1}(1+\sqrt{-1})}-e^{-\sqrt{-1}(1+\sqrt{-1})}}{2\sqrt{-1}} \\ &= \frac{e^{-1}(\cos 1+\sqrt{-1}\sin 1)-e(\cos 1-\sqrt{-1}\sin 1)}{2\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1+e^2}{2e}\sin 1+\sqrt{-1}\cdot\frac{e^2-1}{2e}\cos 1\end{aligned}$$

d'Alembert 也考慮像$(a+b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$這種複指數，有時他甚至把底數$a+b\sqrt{-1}$當成變數而加以微分，這種考慮方法正是西元十九世紀所發展之複變數函數論的濫觴；而往後數學家們對複數的再進一步探討，其內容大都已是複變數函數論的範圍，本文中不再說明。

以i表示$\sqrt{-1}$，乃是Euler在西元1748年所提出來的。不過，在西元1777年以前，Euler本人都很少使用；i被數學家所接受來做為$\sqrt{-1}$的專用記號，乃是德國大數學家Carl Gauss（1777～1855）在他西元1801年的著作Disquisitiones Arithmeticae中引用後才被確定的。imaginary這個字是René Descartes最先使用，前文已經提過，而西元十七、十八世紀的大多數數學家也都以imaginary quantity 來稱呼$a+b\sqrt{-1}$這種型態的數。西元1832年，Gauss 認為有必要把$b\sqrt{-1}$與$a+b\sqrt{-1}$這兩種數予以區別，才引進了complex number（複數）這個名稱。如此，實數與虛數成為對立的名稱，而複數則兼含兩者。共軛複數（conjugate）之名，係法國數學家Augustin-Louis Cauchy（1789～1857）在他西元1821年的著作Cours d'Analyse algebrique中最先使用的。對於$a+bi$（a、b為實數）而言，$\sqrt{a^2+b^2}$是一個很重要的實數，Cauchy在同一部著作中使用modulus（模數）這個名稱；absolute value

（絕對值）這個名稱，是德國數學家Karl Weierstrass（1815～1897）所引用的，而 $|a+bi|$ 這個表示法，也是Weierstrass所提出來的。Gauss則把 a^2+b^2 稱爲 $a+bi$ 的norm（範數）。

三、複數的幾何表示法

經過西元十八世紀的數學家像Leibniz、John Bernoulli、Euler與d'Alembert等人對負數之對數所做的長期爭論，數學家們已經可以很明顯地看出來，複數在數學領域中不可能再被排除。然而，這種在物理上與幾何上看不到的“虛”數，到底在數學家的心裏多少留著一些不痛快的感覺，所以，替虛數尋找一種可見的、具體的幾何表示，乃成爲許多數學家所共有的心願。在這件工作中，我們應該提到的數學家有英國的John Wallis（1616～1703）、挪威的Caspar Wessel（1745～1818）、瑞士的Jean-Robert Argand（1768～1822）與德國的Carl Gauss（1777～1855）。

早在荷蘭數學家Albert Girard（1595～1632）的時代，數學家都已了解實數（正數、負數、與零）可以與直線上的點建立對應關係。Wallis認爲負數與虛數其實同樣地“荒謬”，既然負數可以做幾何解釋，虛數應該也可以做同樣的處理。所以，他在西元1673年提出了以坐標平面上的點 (x,y) 來表示複數 $x+iy$ 的構想。可惜的是，儘管他提出了這種想法，却不曾再深入地解說這種表示法的重要意義，所以，複數的幾何表示法方面，就無法歸功於Wallis。

像Wallis這樣的想法，Euler也曾經有過。他不僅把複數 $x+iy$ 以坐標平面上的點 (x,y) 來表示，而且更進一步地把複數寫成極式 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，而將它以極坐標平面上的點 (r,θ) 來表示。不過，Euler也沒有更進一步地說明這種表示法對複數的有關運算所產生的幾何意義。

Caspar Wessel是一位自學而成的測量師，他在西元1797年寫成一篇題目爲On the Analytic Representation of Direction; an Attempt的論文，儘管他很謙虛地在題目中使用“an attempt”這樣的字眼，其實這篇論文已經對複數的幾何表示法以及複數的代數性質所具備的幾何意義都已經解說清楚。可惜的是，Wessel的論文刋登在一個不受數學家注意的研究報告中，以致於沉埋了一百年之久。要不是這篇論文的法文譯本在西元1897年重行刋登，數學家們還不知道他們將複數平面稱爲Argand平面或Gauss平面，其實是錯誤的。

Wessel的目的，乃是將有向線段（向量）以複數來表示。在 x 軸上以1表示一單

位，另外設定一個虛軸以$\sqrt{-1}$（他寫成ϵ）來表示一單位。當有向線段$\overrightarrow{OP}$的終點P之坐標爲(a, b)時，$\overrightarrow{OP}$就以複數$a+b\sqrt{-1}$來表示。

然後，Wessel 把複數運算予以幾何化。例如，若$\overrightarrow{OP}$表示成$a+b\sqrt{-1}$，$\overrightarrow{OQ}$表示成$c+d\sqrt{-1}$，則$a+b\sqrt{-1}$與$c+d\sqrt{-1}$的和就是以$\overrightarrow{OP}$及$\overrightarrow{OQ}$爲鄰邊所決定之平行四邊形的對角線。$a+b\sqrt{-1}$與$c+d\sqrt{-1}$的乘積則是另一向量$\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OR}$的長等於$\overrightarrow{OP}$及$\overrightarrow{OQ}$之長的乘積，而$\overrightarrow{OR}$與x軸（之正方向）的夾角等於$\overrightarrow{OP}$及$\overrightarrow{OQ}$與x軸（之正方向）的夾角之和。

儘管Wessel 是以向量來表現複數，而不是以平面上的點，可是他的做法其實已經與現代數學中常用的方法相同。

複數的另一種幾何表示法，出現在西元 1806 年瑞士人 Jean-Robert Argand 所著的一本小書 Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques 之中。Argand 是一位自學而成的記帳員，他發現負數可以經由正數以及方向的考慮而加以推廣，乃提出一個問題：我們是不是也可以引進某種新的概念而把實數系加以擴展？假定我們考慮 1，x，-1這個數列，能不能找到某種運算將 1 變成x，然後對x做同樣運算而把x變成-1？在圖 1 中，如果我們把$\overline{OP}$繞O點逆時針旋轉$90°$，所得的線段再繞O點逆時針旋轉$90°$，則兩次“繞O點逆時針旋轉$90°$”就把P點移到Q點。Argand 指出，前面的旋轉所產生的結果，只要“乘以$\sqrt{-1}$”就可以辦到；換句話說，將 1 乘以$\sqrt{-1}$，所得的結果再乘以$\sqrt{-1}$，就可得出-1。因此，我們可以把$\sqrt{-1}$看成是“繞O點逆時針旋轉$90°$”，而$-\sqrt{-1}$則看成“繞O點順時針旋轉$90°$”。

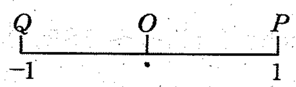

圖 1

爲了要把他這種以複數表示一個變換的概念應用到三角、幾何與代數上，Argand 把始點在原點的每個有向線段都表示成$r(\cos\theta + i\sin\theta)$的形式。如此，Argand 對複數的乘法得出了與Wessel 相類似的幾何意義。另外，他也把複數$a+b\sqrt{-1}$看成是a與$b\sqrt{-1}$的組合，而由此來對複數的加法做幾何解釋。

Argand 這本小書，雖然曾經引起複數之幾何解釋方面的一陣小風潮，不過，因爲這本書是他在數學上僅有的貢獻，所以，他的成果所造成的衝擊並不大。雖然也有人採用Argand 平面或Argand 圖示這種名稱。可是，對於複數做幾何解釋，並使得複數不再被冠以“不可能”、“不存在”或“荒謬”的數這類頭銜，主要還是要歸功於德國大

數學家Carl Gauss。

Gauss對複數方面的第一個貢獻，是在西元1799年的博士論文中證明了代數基本定理——每個次數大於0的複數係數多項方程式至少有一個複數根。事實上，在Gauss對代數基本定理所給的前三個證明中（後兩個是西元1816年提出來的，另外，在西元1850年又給了第四個證明），他都使用了複數與坐標平面上之點間的一對一對應關係。

將複數$a+bi$以點(a,b)表示，並像Wessel一樣地對複數的加法與乘法做幾何解釋，Gauss直到西元1831年爲Göttingische gelehrte Anzeigen（刊物名稱）所寫的一篇論文中才做了完整的說明。更重要的一點，乃是Gauss在該論文中所說的：只要分數、負數、與實數都已完全了解，那麼，複數乃是可以容忍的。用現代數學的術語來說，只要實數系有嚴密的邏輯基礎，那麼，複數的邏輯根據是毫無問題的。

四、複數的邏輯結構

Gauss對於複數之邏輯基礎所做的註解，引起了法國數學家Augustin-Louis Cauchy（1789～1857）與英國數學家Sir William Hamilton（1805～1865）的回應。在西元1801年的名著Disquisitiones Arithmeticae中，Gauss定義了同餘（congruence）的概念，亦即，設a、b、與m爲整數，若$a-b$是m的倍數，則稱a與b對模m同餘，記爲

$$a \equiv b \pmod{m}$$

接著，Gauss仿照整數的同餘概念定義了多項式的同餘概念。Cauchy就是利用Gauss的多項式同餘概念來定義複數，並記載在他西元1847年的論文Exercices d'analyse et de physique mathématique之中，我們介紹如下。

設$f(x)$爲一個實係數多項式，則$f(x)$除以x^2+1所得的餘數必是$a+bx$之形式，於是，可得

$$f(x) \equiv a+bx \pmod{x^2+1}$$

而根據多項式的除法原理，可知a與b都是實數。設有另一個實係數多項式$g(x)$滿足

$$g(x) \equiv c+dx \pmod{x^2+1}$$

Cauchy證明了下面兩個同餘式：

$$f(x)+g(x)\equiv(a+c)+(b+d)x \quad (\mathrm{mod} \quad x^2+1)$$
$$f(x)g(x)\equiv(ac-bd)+(ad+bc)x \quad (\mathrm{mod} \quad x^2+1)$$

由此，Cauchy發現，對於模x^2+1而言，$a+bx$與$c+dx$ 的加法與乘法很像複數。Cauchy 就根據這種現象而採用一種純代數的方法來定義複數，我們以現代數學中簡潔的語言來說明。

在任意集合X中，若一個二元關係～滿足下列三個條件，則稱其爲X上的一個對等關係（equivalence relation）：

(1) 反身律：每個$x\in X$都滿足$x\sim x$；

(2) 對稱律：若$x\sim y$，則$y\sim x$；

(3) 遞移律：若$x\sim y$，$y\sim z$，則$x\sim z$。

若～是集合X上的一個對等關係，則對每個$x\in X$，令

$$[x]=\{y\in X \mid x\sim y\}$$

$[x]$稱爲含x的對等類（equivalence class）。若$x,y\in X$，則$[x]$與$[y]$ 必滿足下述二條件之一：$[x]=[y]$或$[x]\cap[y]=\phi$。

今設X表示所有實係數多項式所成之集合，令$f(x)\sim g(x)$表示$f(x)\equiv g(x)$ （$\mathrm{mod}\ x^2+1$），則～是X上的一個對等關係。這個對等關係中的每個對等類都稱爲是一個複數，而複數（對等類）的加法與乘法則定義爲

$$[f(x)]+[g(x)]=[f(x)+g(x)]$$
$$[f(x)]\times[g(x)]=[f(x)g(x)]$$

因爲每個實係數多項式$f(x)$都與一個形如$a+bx$的實係數多項式滿足下述關係：$f(x)\sim a+bx$，所以，所有複數所成的集合可以表示成

$$\{[a+bx] \mid a\text{ 與 }b\text{ 爲實數}\}$$

又因爲$[(a+bx)(c+dx)]=[(ac-bd)+(ad+bc)x]$，所以，複數的加法與乘法可以表示成

$$[a+bx]+[c+dx]=[(a+c)+(b+d)x]$$
$$[a+bx]\times[c+dx]=[(ac-bd)+(ad+bc)x]$$

Cauchy 對複數如此定義，只要實數系有了嚴密的邏輯基礎，則複數系就跟著有了**邏輯根據**。數學史上一件有趣的事是，複數系比實數系先行建立邏輯結構，而複數系却必須在實數系有了邏輯基礎後才有意義。雖然這樣的發展顯得本末倒置，可是複數系走在前頭的旣成事實，却也是促使數學家從速建立實數系邏輯結構的原動力之一。

Cauchy 對複數所給的定義，乃是一種相當抽象的方法。關於複數系，另有一個較具直觀性的定義方法，此種方法是英國數學家 Sir William Hamilton 在西元 1837 年（比 Cauchy 早了十年）的論文 Conjugate Functions and on Algebra as the Science of Pure Time 中所提出來的。Hamilton 先指出，複數 $a+bi$ 的寫法中雖然有一個“＋”，可是却與 $2+3$ 中的“＋”意義不同。$a+bi$ 中的“＋”只是數學發展史過程中偶然“誤”用而已，因爲 a 與 bi 並不能相加。他說，所謂複數 $a+bi$，其含義只是一個有序實數對（a，b）而已。所以，Hamilton 把複數定義成有序實數對，而複數（有序實數對）的加法與乘法則定義成

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\times(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

根據 Hamilton 這種定義，只要實數系有了嚴密的邏輯基礎，複數系也就會有邏輯根據。Gauss 在西元 1837 年寫爲匈牙利數學家 Wolfgang Bolyai（1775～1856）的一封信中說，他在西元 1831 年就有“將複數定義成有序實數對”的想法。不論此言是否眞實，這種定義方法乃是 Hamilton 先行發表的。

Hamilton 定義複數的方法，不僅使複數與坐標平面上的點自然地合而爲一；同時，更開拓了數學上定義新數系的一條方便之路，例如，考慮全部 n 元有序實數組（a_1，a_2，…，a_n）是否可以定義適當的運算，使之能具備複數系的多數性質。事實上，四元數（quaternion）就是 Hamilton 朝這個方向所做出來的一次數系擴展。

【下期待續】