數系的擴展——
算術發展的抽象化過程(上)

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

人類為了實際的需要，早在數千年前，就發展了計物數的概念；數千年後的今天，由於數學與科學的高度發達，原本只為計數之用的數，已經擴展成各種抽象的數，像複數、四元數（ quaternion ）、超複數或多元數（ hypercomplex number ）等。在這段期間內，不僅數的種類增加，數的概念也由“盲目地”使用，進而發展出嚴密的邏輯基礎。數的概念本是數學的根本，根本的基礎穩固，數學的威力才得以發揮，扮演科學之母的角色也才能當之無愧。

一般所稱的數系，乃是指數所成的集合，連同其各種運算與性質，如此所成的系統才稱為數系。所以，本文所介紹的數系擴展史，自然也包括各種算術運算的介紹。

甲、自然數

德國數學家 Leopold Kronecker（ 1823～1891 ） 曾經說：「整數是上帝創造的，其他的數才是人類的貢獻。」把整數看成是上帝所賜的說法，自從古希臘的 Pythagoras 時代（紀元前六世紀）以來，一直被許多人所接受。所以，正整數被稱為自然數（一直到西元十六、七世紀，歐洲大多數數學家都還不肯接受負數是數的一種），而其他的數則稱為人造數（ artificial number ）。

一、自然數的分類

把數當成一個研究的對象，而不是只做為計算的工具，應該是以 Pythagoras 為最早。 Pythagoras 的哲學主張是“宇宙萬物的本質是數”（ Numbers rule the universe），甚至把某些數都賦予特殊的意義，例如，“一”代表一切事物的根本；“二”代表意

見，可能是因爲發表意見時，都至少會有兩個人吧；“四”代表正義，因爲它是第一個由某數自乘所得的乘積（Pythagoras 學派的人不把1看成是數），因而有完美的性質；“五”代表婚姻，因爲它是第一個公的數三與第一個母的數二的和（他們把奇數看成是公的，偶數看成母的）；“七”代表健康；“八”代表友誼或愛情；等等。

除了前面的公、母之分外，古希臘人對於數還有不少分類方法。例如，抽象的數與具體的數，前者乃是把數當成一種概念，而後者則把數用來計數實際事物的個數；像“三”用於後者時，專指“三個物品”。後來的歐洲數學家像德國的Michael Stifel（1486～1567），也使用absolute number 與denominate number 分別指抽象數與具體數（在他西元1544年的著作Arithmetica integra 中就使用這種名稱）。

羅馬的學者曾把一百以下的自然數分成手指數（digiti）、關節數（articuli）、與混合數（compositi）。手指數乃是1、2、…、9；關節數乃是10、20、…、90；其他則都是混合數。

除了將自然數分成奇數與偶數之外，希臘的數學家像Euclid（紀元前三世紀）、Nicomachus（西元一世紀），也曾有偶乘偶的數（even-times-even number）、偶乘奇的數、與奇乘奇的數這種分類方法。

質數（prime number）與合成數（composite number）的觀念，Aristotle（紀元前四世紀）、Euclid、與Theon（西元四世紀）都曾經給過定義；近代數學討論質數與合成數時，通常都不考慮1，以避開不必要的煩冗；古希臘人根本就不把1當成數（事實上，數學家們完全接受1是一個數的說法，是西元十八世紀的事），所以，也就不考慮1到底是質數還是合成數這個問題。

盈數（abundant number）、完全數（perfect number）、虧數（deficient number）的分類，Pythagoras 學派的學者可能早已了解；不過，Euclid 在他的曠世名著Elements 第九卷中才較深入地討論。所謂盈數、完全數、虧數，乃是分別指其眞因數（包括1而不包含本身）之和大於、等於、小於本身的自然數。例如，每個質數都是虧數；第一個盈數是12；Euclid 證明：若2^p-1是質數（因此，p也是質數），則$2^{p-1}(2^p-1)$必是完全數。於是，6，28，496，8128都是完全數。Nicomachus 發現：這類偶完全數的個位數字不是6就是8（在前一種情形中，十位數字必是奇數；在後一種情形中，十位數字必是2）。其後不少數學家都對完全數的探討很感興趣，可是，迄今爲止，肯定性的結論只有瑞士數學家Leonhard Euler（1707～1783）在西元1747年所證明的結果：每一個偶完全數都是$2^{p-1}(2^p-1)$之形式，其中2^p-1是質數。

前段所提的完全數，在近代數學中留下了兩個尚未解決的問題：其一，到底有沒有奇完全數？其二，偶完全數有沒有無數多個？不過，就數學本身而言，這兩個問題的答案爲何，倒並不重要。

二、大數命數法

古代的算術有一種現象，那就是很少使用到很大的數。不過，這並不是絕對的；例如，數學史上最偉大的三位數學家之一的 Archimedes （紀元前三世紀），曾自稱可以寫出一個比塡滿整個宇宙所需的沙粒數還大的數，他計算的結果是：塡滿宇宙所需的沙粒不超過 10^{63} 粒。這個數當然是很大的了；不過，由於用到這種大數的機會很少，所以，現代使用的大數名稱都出現得很晚（中國除外）。

在西元十三世紀以前，million （百萬）這個字沒有在西方的任何數學著作中出現過。最先使用這個字的作者，可能是住在 Constantinople 的希臘僧侶 Maximus Planudes ，他在西元 1340 年左右所著的 Indian Arithmetic 中用了這個字，其意義是 great thousand（即 mille＋on），他的做法就像 salon（great hall）是源自 salle＋on ，balloon（great ball）是源自 balle＋on 。西元十五世紀之後，這個字才開始在義大利的許多算術作品中出現。

儘管如此，這個字並不是很快就被接受來表示 10^6 ；例如，西班牙人早期是使用 cuento 表示 10^6 ，而以 millon 來表示 10^{12}。德國、荷蘭的作者們，在西元十六世紀時，還是寧可使用 thousand-thousand 來表示 10^6 。

至於 billion 這個字，到目前爲止，美國人與英國人的用法都不相同；美國人以 billion 表示 10^9 ，而英國人則表示 10^{12} 。事實上，當法國數學家 Nicolas Chuquet（1445～1500）在西元 1484 年的著作 Triparty en la sciences des nombres 中，將整數採用六位一撇的做法時（例如，745324’804300’700023’654321），他確是以 billion 來表示 10^{12} ，同時以 trillion 來表示 10^{18}；而目前美國人的 trillion 却表示 10^{12} 。

儘管在西元十八世紀時，billion 這個字已經爲多數人所知，可是，除了學校之外，一般人恐怕很少有機會使用這個字，David Smith 在他所著 History of mathematics 中就說，大概是發生第一次世界大戰時，人們才有機會用到這個字眼。

在東方的中國，情形有些不同。紀元前一千多年前所留下來的甲骨文上就有“三萬”；這類甲骨文是殷商貴族的卜辭，並不是數學書籍。在算學著作周髀算經中，已有「周百四十二萬八千里」的字句；另一部算學著作九章算術中，更有「又有積三十九億七千

二百一十五萬六百二十五步，問爲方幾何？」這種開平方的問題。周髀算經與九章算術的著作年代雖不可考，不過，可能都是紀元前的作品，可見在大數的命名方面，中國比西方古文明要進步得多。

在中國，對大數命名做了最完整敍述的，以孫子算經爲最早。孫子算經的著作年代也不可考，不過，後世以爲最晚也不會晚過晉朝。在孫子算經中，對大數的命名是這樣說：「凡大數之法，萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京，萬萬京曰陔，萬萬陔曰秭，萬萬秭曰穰，萬萬穰曰溝，萬萬溝曰澗，萬萬澗曰正，萬萬正曰載」。以十進位制表示時，這些大數的值如下：

萬	億	兆	京	陔	秭	穰	溝	澗	正	載
10^4	10^8	10^{16}	10^{24}	10^{32}	10^{40}	10^{48}	10^{56}	10^{64}	10^{72}	10^{80}

在東漢徐岳所著的數術記遺中，有關大數的命名敍述得更爲詳盡：「黃帝爲法，數有十等；及其用也，乃有三焉。十等者，億、兆、京、陔、秭、穰、溝、澗、正、載。三等者，謂上、中、下也。其下數者，十十變之；若言十萬曰億，十億曰兆，十兆曰京也。中數者，萬萬變之；若言萬萬曰億，萬萬億曰兆，萬萬兆曰京也。上數者，數窮則變；若言萬萬曰億，億億曰兆，兆兆曰京也」。如果以十進位制來表示，前面這些大數的值如下：

	萬	億	兆	京	陔	秭	穰	溝	澗	正	載
下	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9	10^{10}	10^{11}	10^{12}	10^{13}	10^{14}
中	10^4	10^8	10^{16}	10^{24}	10^{32}	10^{40}	10^{48}	10^{56}	10^{64}	10^{72}	10^{80}
上	10^4	10^8	10^{16}	10^{32}	10^{64}	10^{128}	10^{256}	10^{512}	10^{1024}	10^{2048}	10^{4096}

從上表中，可看出數術記遺中的中數與孫子算經中的說法一致；而其下數，乃是依十進位，方便易記，所以，直到滿清末年，還有人使用。例如，當時的人口有四萬萬，一般人都說有四百兆同胞，這裡的兆字就是依下數中的意義。至於現在國內數學書籍中，在大數方面，乃是以萬來進位，即萬萬爲億（10^8），萬億爲兆（10^{12}），萬兆爲京（10^{16}），等等。這種方法與傳統的上、中、下三數都不同，這種以萬進位的大數命名法，據說是民初採用日本人的習慣而來的。

乙、分　　數

史前時代的人類，自然數的概念可能已經足夠使用；可是，當人與人之間的往來趨於頻繁時，交易與分配的現象也隨著增加，在這種情形下，除法自然成為不可或缺的一種計算；而當除之不盡時，分配的工作就必須借助於分數的概念。另一方面，當人類設定某一種計量單位時（像錢幣、長度、重量等），難免會碰到所計之量不足一個單位的情形，解決這個問題的辦法之一，自然是再設定更小的計量單位，不過，計量單位不能無限制地繼續縮小，最後勢必要引進分數的概念。分數概念的引進，古老的民族分別有不同的做法。

一、埃及人的單位分數

古埃及人的象形文字中，有一個特別的記號用來表示單位分數（unit fraction），所謂單位分數，乃是指分子為 1 的分數，或者說是整數的倒數。他們的表示法是這樣的：$\frac{1}{n}$的表示法乃是在 n 的表示法上面加上一個卵形⬭。到了僧侶體文字時代，埃及人的數字記號有了改變，然而單位分數的表示法卻與象形文字相似，只是把原來的卵形改成一點。例如，在僧侶體文字中，8 表示成＝，而$\frac{1}{8}$則表示成≐。一件很有趣的事是在近代數學中還見到以一點來表示分數的寫法，像西元十八世紀許多英文數學書籍中還以$\frac{\cdot}{2}$表示$\frac{1}{2}$，以$\frac{\cdot}{4}$表示$\frac{1}{4}$。

一般而言，古埃及的算術最值得一提的就是他們在處理分數方面的做法。埃及人對$\frac{2}{3}$有特殊的好感，所以，為它設立了一個專用記號；其他的分數要表示時，都是把它表示成單位分數的和（不過，形如 $\frac{n}{n+1}$ 的分數有時也以特殊記號表示）。在紀元前 1650 年左右遺留下來的 Ahmes 紙草（也稱 Rhind 紙草）中，作者就列出由$\frac{2}{5}$到 $\frac{2}{101}$ 等形如 $\frac{2}{2n+1}$ 的分數以單位分數之和表示的方法，不過，作者沒有說明他何以只考慮分子為 2 的情形，也沒有說明這些表示法是如何得出來；例如，

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$$

$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$$

$$\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$$

$$\frac{2}{29}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{43}=\frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301}$$

$$\frac{2}{97}=\frac{1}{56}+\frac{1}{679}+\frac{1}{776}$$

$$\frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}$$

從這些表示法中，很難看出作者得出這些表示法時所根據的“公式”。事實上，$\frac{2}{2n+1}$ 表示成單位分數之和的一個簡便公式是

$$\frac{2}{2n+1}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(2n+1)}$$

Ahmes 紙草中，$\frac{2}{5}$、$\frac{2}{7}$、$\frac{2}{11}$ 的表示法倒是與這個公式相合。上述公式有一個推廣形式：若 $p+q$ 是 a 的倍數，則得

$$\frac{a}{pq}=\frac{1}{p\cdot\frac{p+q}{a}}+\frac{1}{q\cdot\frac{p+q}{a}}$$

這也是表示成單位分數之和的一種方法。

埃及人把分數寫成單位分數之和，並不是當成一種數字遊戲，而是用來做計算之用

。例如，在Ahmes紙草的一個題目中，作者提到：要計算$\frac{1}{5}$的三分之二時（即$\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}$），只需將分母的5乘以2與6，再相加即可。事實上，作者是使用下面這個關係式：

$$\frac{2}{3}\times\frac{1}{p}=\frac{1}{2p}+\frac{1}{6p}$$

或者說，使用$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$以及乘法對加法的分配律。又如，要計算像$\frac{20}{27}x=10$ 這樣的方程式時，作者先將$\frac{27}{20}$表示成

$$\frac{27}{20}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}$$

然後，此數與10相乘，而得$13+\frac{1}{2}$。

將分數表示成單位分數的和，這種做法在中世紀與文藝復興時期，有些歐洲數學家都還很感興趣。例如，義大利數學家Leonardo Fibonacci（1180～1250）曾經得出一個表示成單位分數之和的一般規則（載於西元1202年所著的Liber Abaci 之中）。法國數學家Joannes Bueto（1492？～1572？）在計算$1162\frac{1}{8}$的平方時，都還表示成$1350534+\frac{1}{2}+\frac{1}{64}$。西元十七世紀蘇俄的測量資料中，還以half-half-half-half-half-third來表示$\frac{1}{96}$。即使是現代人，鑽石交易市場中也還以單位分數來說明鑽石的克拉數。

二、巴比倫、希臘與羅馬人的分數

與古埃及大略同一時期的巴比倫人，在算術方面比埃及人更爲優越的一點，乃是巴比倫人在他們的六十進位記數法中，很巧妙地使用了可以同時兼顧整數與分數的位值觀念。例如，「2；2」這個六十進位數，可以依其需要表示$2(60)+2$，或是$2+2(60)^{-1}$，或是$2(60)^{-1}+2(60)^{-2}$。由於有這種位值表示法，巴比倫人處理分數或小數的四則運算時，基本上是與整數的四則運算相同，不必另外設立運算的規則，這種現象與近代數學中的十進位位值制是一樣的。不過，由於巴比倫人並沒有使用小數

點，所以，像 2；2 這個數是用來表示那一個值，難免會有些混淆，有時候只能靠上下文來做決定。

目前收藏在美國 Yale University 的一塊瓦片（編號 7829）中，有一個問題是利用六十進位法求 2 的平方根，所給的平方根近似值爲 1；24，51，10，此數可以十進位法表示成

$$1;24,51,10=1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3}$$
$$=1.4142129\cdots$$

此值與 $\sqrt{2}=1.4142135\cdots$ 已很接近了。

爲了使除法能略爲簡化，巴比倫人製作了簡單的倒數表：

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7，30
9	6，40
10	6
12	5
59	1，1，1，1
61	0，59，0，59

當某數要除以 8 時，將它乘以 7，30，然後將位值往後移一位即可。前面的倒數表中，59 與 61 的倒數都只是近似值。至於 7 的倒數，巴比倫人指出其上、下限分別爲 0；8，34，16，59 與 0；8，34，18。

$$0;8,34,16,59=0.1428564\cdots$$
$$0;8,34,18=0.1428611\cdots$$

而 $\frac{1}{7}=0.\overline{142857}$。

在進位法方面，希臘人因襲了巴比倫人的一部分習慣，在天文學以及三角學的發展

方面，希臘的學者都以六十進位法來表示其分數的部分，所以，六十進位分數才也稱爲天文學家的分數（astronomer's fraction）或物理學家的分數（physicists' fraction）。

希臘人不僅是以六十進位來表示角與弧的度數，甚至連弦長也以六十進位來表示。例如，西元二世紀的數學家 Claudius Ptolemy 在其天文學名著 Mathematical Syntaxis（阿拉伯人稱之爲 Almagest，意爲 the greatest）中，當圓的半徑定爲 60 時，36° 的弧所對的弦長之近似值爲 $\lambda\zeta^{p}\ \delta'\ \nu\epsilon''$，亦即 37°4′ 55″，此數的十進位表示法爲

$$37^\circ\ 4'\ 55'' = 37 + \frac{4}{60} + \frac{55}{60^2}$$

$$= 37.081944\cdots$$

而 36° 的弧所對的弦長爲 $30(\sqrt{5}-1) = 37.082039\cdots$。

當希臘人把圓的 $\frac{1}{360}$ 做爲弧之度量單位時，他們稱此單位爲度，而度的 $\frac{1}{60}$ 稱爲第一部分（現代稱爲分）、度的 $\frac{1}{3600}$ 稱爲第二部分（現代稱爲秒），以下依此類推。

除了天文學與三角學上使用六十進位分數之外，希臘人常以 ″ 來表示簡單分數；例如，$\lambda\beta''$ 表示 $\frac{1}{32}$（在希臘 Herodianic 系統中，λ 表示 30，β 表示 2）；至於一般的分數，分子使用 ′，分母使用 ″ 而且寫兩次；例如，$\beta'\ \epsilon''\ \epsilon''$ 表示 $\frac{2}{5}$。換言之，希臘人並不是把分數看成一個主體，而是看成兩個整數間的一種關係或一個比值。所以，有時也以 in part 來說明分數，例如，"3069000 in part 331776" 表示 $\frac{3069000}{331776}$。西元一世紀的希臘數學家 Heron 與西元三世紀的希臘數學家 Diophantus 則使用過與現代記號相反的表示法。他們以 $\frac{\iota\theta}{\delta}$ 表示 $\frac{4}{19}$，其中 $\iota\theta$ 是希臘的 19，而 δ 是希臘的 4。不過，把分數表示成簡單分數之和，這種做法也受到希臘數學家的喜愛，例如，Heron 在表示 25 除以 13 的結果時，把它表示成 $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{78}$。

羅馬人所使用的分數較爲簡略，基本上是一種十二進位分數。在商業方面，他們把一磅銅的價值稱爲一個 as（不過，後來錢幣逐漸貶值，一個 as 甚至只值半兩的銅），

然後定出下面這些“分數”：

$\frac{1}{12}$個 as = 1 個 uncia,　　記爲 O，

$\frac{1}{24}$個 as = 1 個 semuncia，記爲 S，

$\frac{1}{48}$個 as = 1 個 sicilicus，記爲 Ↄ，

$\frac{1}{72}$個 as = 1 個 sextula，　記爲 Z，

上述四個單位的記號，乃是出現在羅馬算盤的簡記法。這些記號的設定，只是羅馬人想避開分數的困擾而已，在算術方面，羅馬人並沒有特別的貢獻。

三、中國人的十進位分數

中國的數學，從我們可見到的古算書中，就已經很善於處理分數。在周髀算經中就有「以……二百四十七步千四百六十一分步之九百三十三以爲法」這樣的字句，換句話說，其中已經以 247 $\frac{933}{1461}$ 這樣複雜的分數來做爲除數。另一方面，九章算術的第一章（方田）中就有約分（該書中就稱爲約分）、分數的加法（書中稱爲合分）、減法（稱爲減分）、乘法（稱爲乘分）與除法（稱爲經分）、比較分數的大小（稱爲課分）等問題；在第四章（少廣）中更有「求 564752 $\frac{1}{4}$之平方根」與「求 63401 $\frac{447}{512}$ 之立方根」等問題。李約瑟在中國之科學與文明第四册中說：「也許由於九章算術對分數的善加處理，因而延遲了小數的普遍化，亦未可知，雖然小數是早就進展開了的」。

下面我們來說明九章算術中有關分數運算的規則，就可了解中國人在三千年前左右就已經很善於處理分數了。

約分的法則是：「可半者，半之。不可半者，副置分母、子之數，以少減多，更相減損，求其等也。以等數約之。」這裡所謂「以少減多，更相減損」，就是現代數學中的輾轉相除法；而等數即現代數學中的最大公因數。所以，所謂約分，就是求分子與分母的最大公因數，然後將分子與分母同除以這個最大公因數。

加法（合分）的法則是：「母互乘子，并以爲實，母相乘爲法，實如法而一。不滿

法者，以法命之。其母同者，直相從之。」換言之，要求$\frac{a}{b}$與$\frac{c}{d}$的和時，分子、分母交叉相乘，所得乘積相加，得$ad+bc$，此數爲分子；兩分母相乘，所得乘積bd爲分母，即

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

減法（減分）的法則是：「母互乘子，以少減多，餘爲實，母相乘爲法，實如法而一。」仿加法的說明，可知其意爲

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$$

乘法（乘分）的法則是：「母相乘爲法，子相乘爲實，實如法而一。」亦即，

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

除法（經分）的法則是：「以人數爲法，錢數爲實，實如法而一；有分者通之。重有分者，同而通之。」這段文字的意義較爲隱晦，但劉徽的注文中則有「以法分母乘實，實分母乘法」這樣的字句，可知其意即爲

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{ad}{bc}$$

要了解分數除法的原意，不妨再看看張邱建算經中的一個例子（上卷第五題）：「以二十七五分之三除一千七百六十八七分之四，問得幾何？」以現代符號來計算，乃是

$$\frac{1768\,\frac{4}{7}}{27\,\frac{3}{5}}=\frac{\frac{1768\times7+4}{7}}{\frac{27\times5+3}{5}}=\frac{\frac{12380}{7}}{\frac{138}{5}}=\frac{12380\times5}{138\times7}$$

$$=\frac{61900}{966}=64\,\frac{76}{966}=64\,\frac{38}{483}$$

張邱建算經中的「草曰」乃是：「置一千七百六十八，以分母七乘之，內子四，得一萬兩千三百八十。又以除分母五乘之，得六萬一千九百，爲實。又置除數二十七，以分母五乘之，內子三，得一百三十八。又以分母七乘之，得九百六十六，爲法。除之，得六十四；法與餘各折半，得四百八十三分之三十八，得合前問。」這段說明就可以很清楚

地看出其計算方法與現代方法相同了。

四、西方文明中分數概念的演進

現代數學中所使用的記數法源自印度；而現代的分數表示法也是源自印度，只不過印度人還沒有使用橫線來隔離分子與分母。例如，印度數學家 Bhāskara （西元十二世紀）在他所著的 Lilāvati 中就把 $\frac{2}{3}$ 表示成 $\begin{matrix}2\\3\end{matrix}$。

隔離分子與分母的橫線，是阿拉伯人所引進的。不過，即使在阿拉伯境內，也不是人人都使用；倒是 Fibonacci 在其著作中都使用橫線來表示分數。而在中世紀後期印刷術發明之時，由於印刷上會增加困難，所以，分數的橫線也被省略；像德國數學家 Christoff Rudolff（西元十六世紀）所著的 Kunstliche rechnung（西元 1526 年）中，分數都沒有使用橫線。另一個有趣的現象是義大利數學家 Ciacchi （西元十七世紀）所著的 Regole generali d'abbaco（西元 1675 年）中，$\frac{2}{3}$ 印成 $\rotatebox{90}{23}$。至於以 2/3 來代替 $\frac{2}{3}$，則是為使得書寫與印刷較為簡便而採用的。這種斜線表示法，乃是英國數學家 Augustus de Morgan（1806 ～ 1871）在西元 1845 年所引進的。義大利數學家 G. Frizzo 在他西元 1857 年的著作 Le Regoluzze del M. Paolo dell' abbaco 中說，2/3 這種表示法是由 2 f 3 演變而來，其中的 f 表示 fraction（分數）。不過，這種說法只能存疑。

由於分數表示法中的橫線，是由東方西傳歐洲的，所以，希臘人與羅馬人都不曾使用這種方法來表示分數。到了文藝復興時期，部分學者採用東西合璧的做法，而出現像 $\frac{\mathrm{IX}}{\mathrm{XI}}$ 這種形式的分數表示法，像德國學者 Jacob Köbel（1470 ～ 1533）在他西元 1514 年的著作 Rechen biechlin 中，就使用這種記號。

在分數的演算方面，約分需要最大公因數的概念，通分需要最小公倍數的概念。在歐洲的數學著作中，最早出現最大公因數概念的書籍是希臘數學家 Euclid（紀元前三世紀）所著的 Elements 第七卷，後來經羅馬數學家 Boethius （西元六世紀）略做改進；西元 1494 年，義大利數學家 Luca Pacioli（1445 ～ 1514）在他所著的 Sūma 中做了較理論性的敘述。至於最小公倍數的概念則發展得較晚。所以，早期的作者在計算分數的加、減法時，都是以已知各分母的乘積來做為新分母，而不是以各分母的最小公倍數

來做新分母，中國的九章算術也是這麼做的。使用最小公分母來進行分數的加與減，是西元十七世紀後才開始普遍的。

利用十進位法來表示分數時，有關乘、除法的規則，大抵上都在阿拉伯人手上就已經確立了。

分數這個名詞，在英文中寫成 fraction ，此字源自拉丁文的 frangere ，乃是破碎的意思。換言之，分數概念的最初意義，是指一個單位中的某些部分，有人甚至把分數稱為 broken number。因為如此，早期的作者通常都限定分子小於分母。西元十六世紀以後，學者們利用除法來說明分數，才逐漸接受假分數的概念。

每個分數都有三種常用的表示法：十進位法，例如 $\frac{7}{10}$ ，此種分數稱為 common fraction 。六十進位法，例如 42′ ，此種分數稱為 sexagesimal fraction。小數表示法，例如 0.7 ，此種表示法稱為 decimal fraction（小數）。

丙、小　　數

小數固然可以說是分數之表示法的一種，但是在實際計算或製作數學上有關的數值表時，小數自有它本身的方便與重要性。所以，我們另闢一段篇幅來討論小數的演變過程。

一、中國人的小數概念

只要探查中國古代的算書，不難發現中國人的小數概念，完全隱藏在度量衡的制度之中。例如，劉徽注九章算術時，在第一章（方田）第三十二題後面的「割圓術」注文中說：若圓的半徑為一尺，則其內接正十二邊形之邊心距（的近似值）為九寸六分五釐九毫二秒五忽五分忽之四。如果我們把半徑的單位略去，則半徑為 1 時，圓內接正十二邊形的邊心距就成為 0.9659258 ，這是因為在古代的長度單位中，尺、寸、分、釐、毫、秒、忽等乃是依十進位依次遞減的。

儘管我們說中國人的小數概念隱藏在度量衡制度之中，其實古代的中國數學家對小數的概念是非常清楚的。例如，在九章算術的開（平）方術中，曾說：若某數開平方時開不盡（即平方根不是整數），則就應該「以面命之」。這四個字的意義，依劉徽的注文，乃是要「加定法如前，求其微數，微數無名者，以為分子，其一退以十為母，其再退以百為母。退之彌下，其分彌細。」這裡的「微數無名」，就是十進位小數。換句話

說，當開方至個位還開不盡時，可以仿照前面的過程繼續開方，所得的第一位應以十做分母，第二位以百做分母，餘類推。如此可得出以十進位的一系列數。這一系列的數，雖然到第五位（忽）以後就沒有名稱，但是想要記錄到多少位，都可以辦到。這種做法，其實已將平方根的近似值表示成小數了。事實上，前一段所提的「九寸六分五釐九毫二秒五忽五分忽之四」，其實就是劉徽由小數 0.933012701639 開平方而得的。

由於劉徽說無名的微數，就以分數來表示。後世算學家只在必要時，添設更小的微數，以補其不足。沒有人確實體會劉徽的用意，來改良小數的記數法，這未始不是中國數學史上一件憾事。

在小數的命名上，中國古算學家倒創設了不少。唐中宗神龍元年（西元 705 年），令南宮說修訂曆法，南宮說以百分之一日稱為餘，萬分之一日稱為奇，而稱「期周三百六十五日，餘二十四，奇四十八」。亦即，一年有 365.2448 日（正確值為 365.2422…日）。其後，唐德宗建中元年（西元 780 年），曹士蔿制訂符天曆，則將小數部分以一萬為分母，而表示成分數。元朝郭守敬在元世祖至元十七年（西元 1280 年）所制的授時曆中，將一日分成一百刻，一刻分成一百分，一分分成一百秒，倒與南宮說的做法相仿。

有關小數的命名，最多的算書乃是元朝大數學家朱世傑在元成宗大德三年（西元 1299 年）所著的算學啓蒙，其卷首就有：「小數之類：一、分、釐、毫、絲、忽、微、纖、沙、萬萬塵曰沙、萬萬埃曰塵、……。」在其中，以十進位者共有八個，即

分	釐	毫	絲	忽	微	纖	沙
10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}

沙以下更有十五個以萬萬進位的名數，即

沙	塵	埃	渺	糢	糊	逡巡	須臾
10^{-8}	10^{-16}	10^{-24}	10^{-32}	10^{-40}	10^{-48}	10^{-56}	10^{-64}
瞬息	彈指	剎那	六德	虛	空	清	淨
10^{-72}	10^{-80}	10^{-88}	10^{-96}	10^{-104}	10^{-112}	10^{-120}	10^{-128}

這些名稱倒不見得非常實用，即以今日常用單位來說，通常也只用到“毫”字而已，如分米即公寸，厘米即公分，毫米即公厘。

中國數學史上對小數做進一步明確表示，乃是南宋數學家秦九韶在他西元 1247 年（宋理宗淳祐七年）的著作數書九章卷十二上的

𝍨𝍮
寸

這個記號表示 9.6 寸。數書九章錢穀類「囤積量容」所須解的方程式，以「寸」表示如下：

𝍠 𝍧 𝍮 𝍢 𝍪
　　　寸
𝍠 𝍱 𝍡
　𝍩 𝍥

此方程式即 $16x^2+192x-1863.2=0$，所得的近似解 $x=6.35$ 表示成

𝍥 𝍫 𝍤
寸

至此，小數的表示法已很清楚了。

南宋數學家楊輝，對小數的使用，有更進一步的突破。在他西元 1275 年（宋恭宗德祐元年）所著的田畝比類乘除捷法中，他先把整數後面的三位依次命名爲分、釐、毫，這些命名好像與前人沒什麼不同，可是楊輝却是把它們獨立於長度單位之外，不再表示長度。例如，由於一斤等於十六兩，他說「六兩爲斤後三分七釐五毫」；一步表示五尺，他說「二尺爲步後四分」。當他要計算一個長爲二十四步三又十分之四尺、寬爲三十六步二又十分之八尺的長方形土地的面積，他先把尺數都化成步數的小數，然後再相乘，也就是說，與下面的等式意義相同：

$$24.68\times 36.56=902.3008$$

楊輝雖然沒有引進類似小數點這種記號，來隔離整數部分與小數部分，不過，對於小數的位數，他已有相當的了解；或許在計算時，他已經能在算盤上想像一條鉛直線來隔離整數與小數了。

隔離整數與小數部分的做法，最早出現在西元十四世紀的丁巨算法之中。丁巨算法出版於元順帝至正十五年（西元 1355 年），是一部相當單純的算術問題集。在其中，作者丁巨在整數末尾與小數開始之間，插入一個「餘」字。這個「餘」字的功用，就與

現代數學中的小數點相同了。

「小數」這個名詞，有過許多不同的稱法。劉徽使用微數這個名稱，夏侯陽算經中使用「端數」，秦九韶則稱為「收數」，「小數」這個名稱，恐怕是朱世傑才開始使用的。

從前面的說明，可以看出中國的小數命名，乃是根據度量衡中的“度”發展出來的。我們順便把中國古代的“量”與“衡”的命名加以介紹。在古算書中，對度量衡做過完整介紹的是孫子算經與夏侯陽算經。在孫子算經中，對度量衡的介紹是這樣的：

「度之所起，起於忽。欲知其忽，蠶吐絲為忽。十忽為一絲，十絲為一毫，十毫為一釐，十釐為一分，十分為一寸，十寸為一尺，十尺為一丈，十丈為一引，五十引為一端，四十尺為一匹，六尺為一步，二百四十步為一畝，三百步為一里」。

「量之所起，起於粟。六粟為一圭，十圭為一撮，十撮為一抄，十抄為一勺，十勺為一合，十合為一升，十升為一斗，十斗為一斛，斛得六千萬粟」。

「稱之所起，起於黍。十黍為一絫，十絫為一銖，二十四銖為一兩，十六兩為一斤，三十斤為一鈞，四鈞為一石」。

在夏侯陽算經中有關度量衡的說法，與上述略有不同。事實上，度量衡的使用隨時代而略有改變，不過，宋太宗雍熙九年（西元 992 年）曾公布標準的“衡”制：兩、錢、分、厘、毫、絲、忽，這些單位一律採十進位，而沿用至今。

二、西洋文明中小數概念的演進

在印刷術發明之前，歐洲人所使用的分數，很少有分子或分母的值很大的分數。例如，法國人 Rollandus（西元十五世紀）在他所著的 Scientia de numero ac virtute numeri（西元 1424 年左右出版）中，在分數的加法部分，最難的分數是 $\frac{207}{220}$ 與 $\frac{197}{280}$，而在乘法部分，最難的分數只到 $\frac{29}{36}$。天文方面的計算固然會碰到很大的數值，可是，自從希臘以來，天文的計算都以六十進位法來進行。在這種情形下，歐洲人對於數方面的需要已經覺得足夠，將數值以小數形式表現的想法，到西元十五世紀之後才逐漸產生。

數學上重要的發明，都是經過一些先驅者從不同的角度發現其需要性，才逐漸完成的。小數概念的引進與小數的發明，自然也不例外。引進小數概念的第一個思想源頭，乃是開方的問題。在早期的方根表中，大抵有一個共同的現象，表中所列出來的方根，其實都是將原數乘以 10 的某次乘冪後，再開方所得的結果。所以，觀察這類方根表，

反倒可能誤以為作者只是為了方便而把小數點略去不寫。其實作者可能在開方之前，就已經做了下面這個變換：

$$\sqrt[n]{2} = \frac{\sqrt[n]{2\cdot 10^{kn}}}{10^{k}}$$

如果作者在他的 n 次方根表上只寫出 $\sqrt[n]{2\cdot 10^{kn}}$ 的 k 位近似值，那他可能並沒有接觸到小數點的問題。圖 1 是西元 1522 年，德國學者 Adam Riese（1489？～1559？）所著的 Rechnung auff der Linien vnd Federn 中的一段平方根表：

Tabula Radicum quadratarum.

1 1	1000	17	123	33	747
2	414	18	242	34	831
3	732	19	358	35	917
2 4	2000	20	472	6 36	1000
5	234	21	584	37	82
6	449	22	692	38	163
7	645	23	767	39	244
8	828	24	900	40	324
3 9	3000	5 25	5000	41	403
10	162	26	98	42	481
11	316	27	195	43	558
12	445	28	290	44	634
13	606	29	384	45	709
14	741	30	477	46	782
15	873	31	567	47	856
4 16	4000	32	659	48	928

圖 1

我們可以發現，對於 2 的平方根，表中提示給我們 1414 這些數字，而我們知道 2 的平方根應該介於 1 與 2 之間。換句話說，1414 這些數字只是要告訴我們一個介於 1 與 2 之間的數而已。如果作者寫成 $1\frac{414}{1000}$，自然不會有任何誤解；可是，如果「將分母的 1000 省略不寫」是大家都認可的「為了方便或簡單起見」，那麼，何不設立一個特殊記號，使得人人都可分辨"真正的 1414"與"省略分母 1000 後的 1414"呢？

前面所提的那種"將原數乘以 10 的某次乘冪，再行開方，並將結果列成方根表"的做法，並非只有 Adam Riese 如此，早在古印度、古阿拉伯時代，以及中世紀的歐洲，甚至西元十七世紀初期，似乎人人都視為當然。不僅是方根表如此，其他的函數值表也都如此。早期的作者製作三角函數表時，為了避免小數的困擾，都把圓的半徑 r 選得很大（像 100000 或 10000000），而表中所列出來的三角函數值，其實是正確值的 r 倍。現在，如果我們在一張殘破的三角函數表中，只看到下面這六對數字：

（角）	（正弦）
10″	485
20″	970
30″	1454
40″	1939
50″	2424
1′	2909

儘管我們知道表中的正弦值，乃是正確的正弦值乘以 10 的某次乘冪，可是，由上面的零碎資料，實在無法判定 sin 10″ 的值是 $\frac{485}{10^4}$ 或是 $\frac{485}{10^5}$ 或是 $\frac{485}{10^6}$ 或是 $\frac{485}{10^7}$ 或是 $\frac{485}{10^8}$。所以，只是很單純地省略分母中的 10 之某次乘冪，在某些情況下，可能會引起混淆或不清。

引進小數概念的另一個思想源頭，乃是由於考慮除數呈 $a\cdot 10^n$ 之形狀的除法問題。當我們要計算 $b\div(a\cdot 10^n)$ 時，在 b 中，從個位至 10^n 位所成的 n 位數，必定都在這個除法演算後的餘數之中，所以，在除法演算的過程中，可以先撇開這個 n 位數，而先計算 b 去掉這 n 位後所得的數除以 a 的除法過程，最後將所得結果與那 n 位數做適當的合併即可。例如，要計算 5231672 ÷ 12000 時，因爲

$$\frac{5231}{12}=435\,\frac{11}{12}$$

可得

$$\frac{5231672}{12000}=435\,\frac{11672}{12000}$$

前面所提的規則，義大利數學家 Jerome Cardano（1501～1576）在他西元 1539 年的著作 Practica 中表示，乃是德國數學家 Regiomontanus（1436～1476）最先提出來的。在西元十五世紀的許多算術著作中都提到這個規則，其中必須一提的著作，乃是義大利數學家 Francesco Pellos（1450？～1500？）在西元 1492 年所著的 Compendio de lo abacco。在這本書中，Pellos 根據前面的除法規則而無意中引進了小數點。他的做法是這樣的：要計算 $b\div(a\cdot 10^n)$ 時，他在 b 的第 10^n 位與第 10^{n+1} 位中間點了一點，表示整個除法演算只是將該點左側的數去除以 a，而該點右側的數則歸入餘數。圖 2 乃是 Pellos 之著作中的一頁。

Pellos所使用的點，與現代數學中的小數點，意義上其實還有些出入。不過，這麼

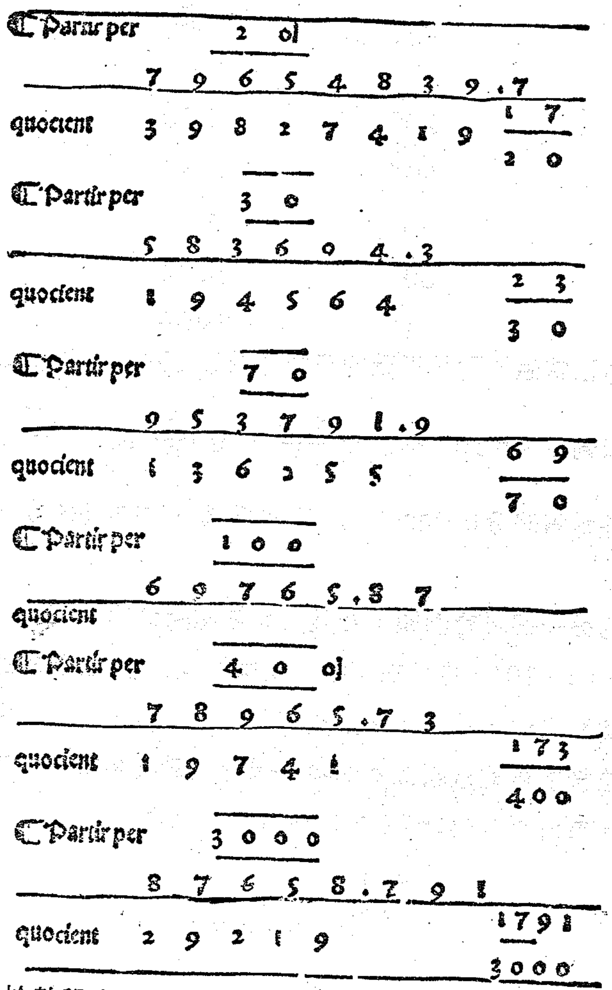


圖 2

一個小小的記號，對於數學上的計算工作，確有它的革命性影響。H. Eves 在他所著的 An introduction to the history of mathematics 中說：隨著人類文明的進步，天文、航海、貿易、工程、甚至戰爭等，在在都需要快速而精確的數值計算。這項需要已在四項重要的發明之下得以達成；他所指的四項發明，乃是：印度－阿拉伯數字、小數、對數、與現代的計算機。由此可見，小數概念的引進對於數學計算工作是何等的重要，而 Pellos 漫不經心點出的一點，也造成了何等深遠的影響。

不過，西元十六世紀的一些數學家，似乎對“點”不太滿意，所以，改用“線”來代替。例如，德國的 Christoff Rudolff 在他西元 1530 年的著作 Exempel-Büchlin 中，義大利的 Jerome Cardano 在他西元 1539 年的著作 Practica 中，義大利的 Cataneo 在他西元 1546 年的著作 Arithmetic 中，都是採用這種做法。甚至到了西元十九世紀，Pike 所著的 Arithmetik（西元 1816 年）中都還出現下面的寫法（46464÷7000）：

$$
\begin{array}{r}
7\,|\,000\,)\,46\,|\,464\,(\,6\,\dfrac{4464}{7000} \\
\underline{42\,|\quad\quad} \\
4\,|\,464
\end{array}
$$

儘管Pellos點出了革命性的一點，可是，他並沒有眞正發現小數點的重要性。除了中國的楊輝與丁巨之外，眞正體會到需要有一個記號來隔離整數部分與小數部分的人乃是西元十五世紀的阿拉伯天文學家Al-Kashi，他在撒馬爾罕王子Ulugh Beg（蒙古帖木兒汗的孫子）所建造的天文臺中工作。不僅對三角學的貢獻良多，另一項著名的成果是對圓周率 π 值的計算，他所計算的 π 值已經準確到小數點後面十二位：$\pi = 3.141592653589\cdots$。在他西元1427年所著的al-Risâli al-mohîtîje（Treatise on the circumference）中，將他所得的 π 值寫成

$$\overset{\text{sah-hah}}{3}\qquad 1415926535898732,$$

其中的sah-hah，乃是表示完整、正確、整數的意思。換句話說，我們已經有了下面這種表示分數（小數）的方法：

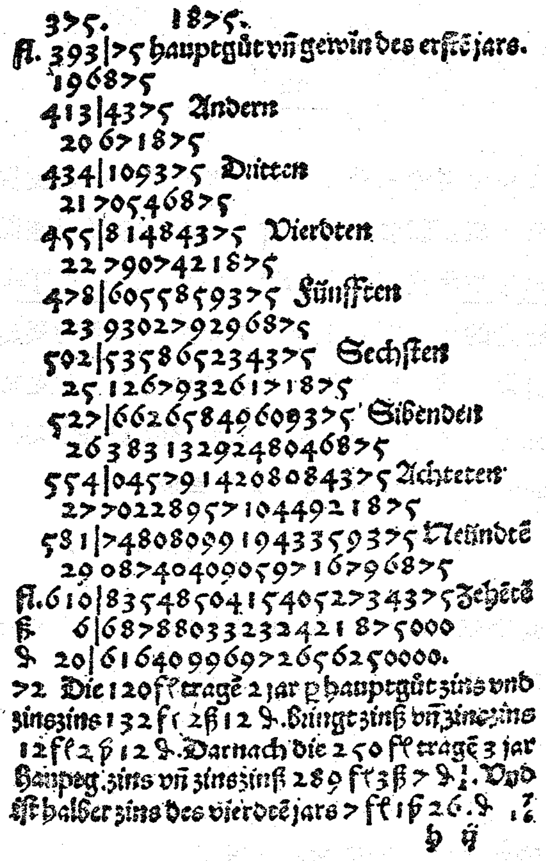
$$\overset{\text{整數}}{3}\quad 14159\cdots\cdots$$

這樣的表示法，在當時的歐洲，還沒有出現過。

歐洲數學家中，最先體會到小數之重要性的人，應該是德國的Christoff Rudolff。在他西元1530年所著的Exempel-Büchlin中，他解了一個有關複利的問題，其中以“線”來做爲近代數學中的小數點，圖3乃是他在該書中解決複利問題的一頁，從其中不難看出他做了許多“小數”的加法。所以，如果要推選一位小數的發明人，Rudolff與中國的楊輝應該都是適當人選，因爲他們不僅寫出了“小數”，還知道如何進行小數的運算。

小數概念發展成熟，乃是荷蘭數學家Simon Stevin（1548～1620）所完成的。他在西元1585年所著的La Disme中，將有關小數的各種運算規則敍說得很清楚，他並且建議政府應該使用這種十進位的小數。他的主張對於法國大革命時期，國際上得以採用十進位的度量衡公制，有很深的影響。不過，前文中已經指出，不論是十進位的記數法或是十進位的度量衡，中國人早在紀元前十四世紀左右就已開始，領先歐洲人不下三千年之久。

由於Stevin 對小數的有關規則都已解說清楚，後世對小數概念的演進所能做的貢



375. 1875.
fl. 393|75 hauptgůt vñ gewin des erstē jars.
196875
413|4375 Andern
20671875
434|109375 Dritten
2170546875
455|81484375 Vierdten
227907421875
478|6055859375 Fünfften
23930279296875
502|535865234375 Sechsten
2512679326171875
527|66265840609375 Sibenden
263831329248046875
554|0457914208084375 Achteten
27702289571044921875
581|748080991943359375 Neündtē
2908740409059716796875
fl. 610|835485041540527343 75 Zehētē
ß 6|68788033232421875000
h 20|61640996972656250000.
72 Die 120 fl tragē 2 jar ꝑ hauptgůt zins vnd
zinszins 132 fl 2 ß 12 h. Bringt zinß vñ zinszins
12 fl 2 ß 12 h. Darnach die 250 fl tragē 3 jar
haupg. zins vñ zinszins 289 fl 3 ß 7 h ½. Vnd
ist halber zins des vierdtē jars 7 fl 1 ß 26. h ½

圖 3

獻只是改善小數的表示法了。圖 4 乃是 Stevin 之 La Disme中的一頁，從其中不難看出他把小數 27.847 表示成

$$2\overset{⓪}{7}\overset{①}{8}\overset{②}{4}\overset{③}{7}$$

這種表示法自然是相當不方便的。

在小數表示法方面，與現代算術寫法完全一致的著作，最早應推英國數學家 Edward Wright（1559～1615）翻譯蘇格蘭數學家 John Napier（1550～1617）有關對數的著作所成的英譯本。Napier 在西元 1614 年出版了他有關對數的第一部著作 Mirifici logarithmorum canonis descriptio（A description of the marvelous rule of logarithms），Wright 對此書的英譯本在西元 1616 年出版。在原書中，Napier 並沒有眞正使用到小數，這是由於在Napier 的對數定義中，他已經利用 10^7 來避開小數的緣故。事實上，如果 L 是 N 的 Napier 對數，則可得

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPE-RATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster: Trouver leur somme:

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

			⓪	①	②	③
		2	7	8	4	7
		3	7	6	7	5
	8	7	5	7	8	2
	9	4	1	3	0	4

Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) 27 $\frac{8}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{7}{1000}$, ensemble 27 $\frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent 37 $\frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront 875 $\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme 27 $\frac{847}{1000}$, 37 $\frac{675}{1000}$, 875 $\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) 941 $\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

圖 4

$$L \doteqdot -10^7 \log_e \left(\frac{N}{10^7}\right)$$

上式右端的因數 10^7，使他可以避開七位小數，而七位對數已經可以協助解決許多計算工作上的問題了。所以，Napier 本人所製作的對數表上沒有出現小數。不過，當 Wright 翻譯Napier 的著作時，却把對數計算得更精密些，因而出現了小數。下面是 Wright 譯本上的一行：

Deg. 0　　　　+ | −

Min	Sines	Logarith.	Differen	Logarith.	Sines	
30	8726	4741385	4741347	38.1	999961.9	30

其中各數的意義分別爲 $30'$，$10^6 \sin 30'$，$-10^6 \log_e \sin 30'$，$-10^6 \log_e \tan 30'$ $-10^6 \log_e \sin 89°30'$，$\sin 89°30'$，$89°30'$。

Napier 雖然在他的對數表上沒有使用小數，但在西元1617年的著作Rhabdologiae中，却使用過1993,273與1993,2′7″3‴來表示1993.273。

另一位對數發明人 Johst Bürgi（1552～1632）在西元1592年的一份著作中，曾經使用句點與逗點來做為小數點，也曾經以 $14\underset{\circ}{1}4$ 來表示141.4。

德國數學家Bartholomäus Pitiscus（1561～1613）在西元1612年所製作的三角函數表中，圓的半徑選為100000，所以，sin 10″的值記為4.85，看起來很像小數點，因為

$$10^5 \sin 10'' = 4.84813\cdots$$

不過，sin 89°59′30″的值却記為99999.99894.23，此時的點却又不完全是小數點。在包含這個三角函數表的著作內文中，他又以"線"來隔離整數與小數部分。

西元1616年，德國數學家 Johann Kepler（1571～1630）在一部討論測量的著作Ausszug auss der uralten Messe-Kunst Archimedis中，他利用逗點及括號來隔離小數。例如，3,65表示3.65，21(93)表示21.93等。可是，西元1627年，他譯述丹麥天文學家Tycho Brahe（1546～1601）的著作Tabulae Rudolphinae時，却使用句點來做為小數點，例如，將 $29\frac{32}{1000}$ 寫成29.032。

德國數學家Johann Hartmann Beyer（1563～1625）在西元1616年給Kepler的一封信中，以314,1′5″9‴2⁗6′′′′′5′′′′′′來表示314.159265。荷蘭數學家Adriaen Metius（1571～1635）使用了類似的寫法，例如，以47852°:8′0″4‴與47852/8′0″4‴來表示47852.804。

英國數學家William Oughtred（1574～1660），曾經用過 $0\underline{|56}$ 來表示0.56。荷蘭數學家Frans van Schooten（1581～1646）則把17579.625表示成17579625……③。

總之，小數的表示法曾經有過許多奇怪的形式；即使在目前，小數的表示法也沒有完全統一。例如，英國人喜歡把小數點寫得較高，像23·45；而美國人簽寫支票時，則寫成 $\$23.\overline{45}$ 或 $\$23\frac{45}{100}$ 以防止塗改或造假；歐洲大陸上，寫成23,45或 23_{45} 的情形還很多。

（**下期待續**）