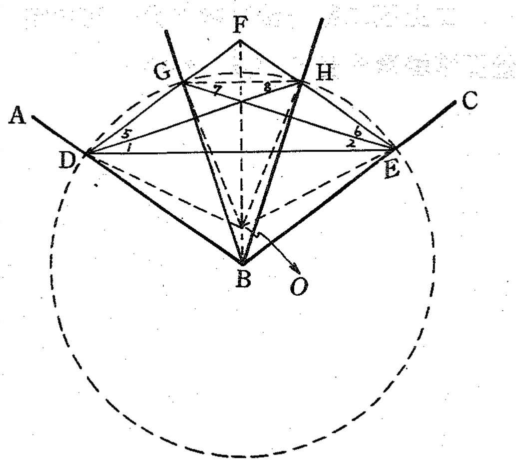
將108°角和$\frac{540°}{7}$角三等分

王志淦　省立臺南二中

指導老師　羅添壽

研究動機

在國中三年級上學期時，在一次數學課中討論尺規作圖的問題時，數學老師教我們60° 角和90° 角的三等分。教完後告訴我們，60°，120°，90°……等角度可以三等分，其餘的角都可以用尺規來把它們三等分嗎？假如同學能將任意角三等分，就可以得到諾貝爾獎（目前並無諾貝爾數學獎）。當時班上對於這一問題非常有興趣，一有時間，就思考這問題。當時我曾經以作角平分線的方式，覺得似乎可以把一些特別的角，如108°，$\frac{540°}{7}$ 等，三等分，但是不會證明。到了高中繼續的去思考，忽然想到了外接圓的性質，才慢慢找出108° 和$\frac{540°}{7}$角的三等分方法。



【已知】$\angle ABC = 108°$。

【求作】三等分$\angle ABC$。

【作法】

1. 以B為圓心，適當長為半徑畫弧，分別交$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$於D、E兩點，作$\overline{DE}$。
2. 分別以D、E為圓心$\overline{BD}$為半徑畫弧，設兩弧交於F點，作$\overline{DF}$及$\overline{EF}$。
3. 作$\angle FED$及$\angle FDE$的角平分線，設角

平分線$\overrightarrow{EG}$交$\overrightarrow{DF}$於G點，角平分線$\overrightarrow{DH}$交$\overrightarrow{EF}$於H點。

4. 作$\overrightarrow{BG}$，及$\overrightarrow{BH}$即爲所求。

【證明】

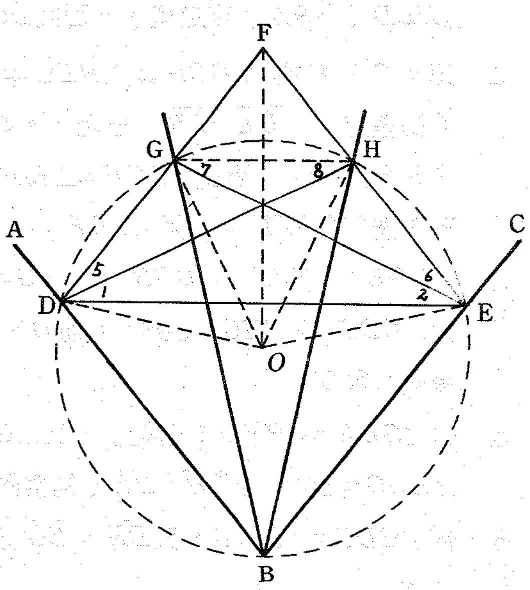
1. 在$\triangle GDE$與$\triangle HED$中，$\overline{DE}=\overline{DE}$（共同邊），$\overline{DF}=\overline{EF}$（由作圖得知），故$\triangle FDE$爲等腰三角形，因此$\angle GDE=\angle HED$。因$\overrightarrow{DH}$，$\overrightarrow{EG}$分別爲$\angle GDE$與$\angle HED$的角平分線，所以，$\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle GDE=\dfrac{1}{2}\angle HED=\angle 2$，故$\triangle GDE\cong\triangle HED$（$ASA$全等定理），因此$\overline{DG}=\overline{EH}$。
2. 連接G，H在$\triangle GDH$與$\triangle HEG$中，$\triangle GDE\cong\triangle HED$（已證），$\overline{DH}=\overline{EG}$（對應邊），$\overline{DE}=\overline{EH}$（已證），$\overline{GH}=\overline{GH}$（共用邊），故$\triangle \mathrm{GDH}\cong\triangle HEG$（$SSS$全等），因此$\angle DGH=\angle EHG$。
3. 在四邊形$GDEH$中，因$\angle GDE=\angle HED$（已證），$\angle DGH=\angle EHG$（已證），又$\angle GDE+\angle HED+\angle DGH+\angle EHG=360°$，故$2(\angle GDE+\angle EHG)=360°$，因此$\angle GDE+\angle EHG=180°$，而$D$、$E$、$H$、$G$四點可作一外接圓（對角互補）。令圓心爲$O$。
4. 因$\angle GDE=\angle HED$（已證），又$\angle GDE+\angle EHG=180°$（已證），故$\angle HED+\angle EHG=180°$ 故$\overline{GH}/\!/\overline{DE}$（同側內角互補）。
5. 因$\angle GDE=\angle HED$，又$\overrightarrow{DH}$、$\overrightarrow{EG}$分別爲$\angle GDE$與$\angle HED$的角平分線，故$\angle 1=\angle 5=\dfrac{1}{2}\angle GDE=\dfrac{1}{2}\angle HED=\angle 2=\angle 6$，即$\angle 1=\angle 2=\angle 5=\angle 6$。又因$\overline{GH}/\!/\overline{DE}$（已證），故$\angle 2=\angle 7$（內錯角相等），因此$\angle 6=\angle 7$。又因$\angle 1=\angle 8$（內錯角相等），故$\angle 5=\angle 8$。在$\triangle EGH$中，由$\angle 6=\angle 7$得$\overline{GH}=\overline{HE}$，又在$\triangle HDG$中，由$\angle 5=\angle 8$得$\overline{GH}=\overline{DG}$。因此$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}$。
6. 作$\overline{OD}$，$\overline{OG}$，$\overline{OH}$，$\overline{OE}$。因$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}$，故$\overset{\frown}{DG}=\overset{\frown}{GH}=\overset{\frown}{HE}$，因此$\angle DOG=\angle GOH=\angle HOE$。
7. 由作圖得知$\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{DF}=\overline{EF}$，所以$\angle EDB=\angle BED=\angle FDE=\angle FED$。又因$\angle ABC=108°$（已知），故$\angle FDE=\angle FED=\angle EDB=\angle BED=\dfrac{180°-108°}{2}=36°$。

8. 因$\angle FDE=36°$，且$\angle FDE$對$\overset{\frown}{GE}$，故$\angle FDE=\dfrac{1}{2}\angle GOE$，$36°=\dfrac{1}{2}\angle GOE\Rightarrow$

$36°=\angle HOE$（$\because \angle DOG=\angle GOH=\angle HOE$）。

9. 因$\angle HOE=36°$，故$\angle DOE=36°\times 3=108°$。

10. 因圓心O必在$\overline{DE}$的垂直平分線上（$\because O$為$\triangle DEG$之外心），又四邊形$BEFD$為菱形（由作圖得知），故圓心O必在對角線$\overleftrightarrow{BF}$上。又因$\angle ABC=108°$，$\angle DOE=108°$，故O與B重合。因此$\overrightarrow{BG}$與$\overrightarrow{BH}$三等分$\angle ABC$。



【已知】$\angle ABC=\dfrac{540°}{7}$。

【求作】三等分$\angle ABC$。

【作法】

1. 以B為圓心適當長為半徑畫弧，分別交$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$於D、E兩點，作$\overline{DE}$。
2. 分別以D、E為圓心$\overline{BD}$為半徑畫弧，設兩弧交於F點，作$\overline{DF}$及$\overline{EF}$。
3. 作$\angle FED$及$\angle FDE$的角平分線，設角平分線$\overrightarrow{EG}$交$\overline{DF}$於G點，角平分線$\overrightarrow{DH}$交$\overline{EF}$於H點。
4. 作$\overrightarrow{BG}$、$\overrightarrow{BH}$即為所求。

【證明】

1. 在$\triangle GDE$與$\triangle HED$中，因$\overline{DE}=\overline{DE}$（共用邊），$\overline{DF}=\overline{EF}$（由作圖得知），故$\triangle FDE$為等腰三角形，因此$\angle GDE=\angle HED$。因$\overrightarrow{DH}$，$\overrightarrow{EG}$分別為$\angle GDE$與$\angle HED$的角平分線，故$\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle GDE=\dfrac{1}{2}\angle HED=\angle 2$，因此$\triangle GDE\cong\triangle HED$（$ASA$全等），而$\overline{DG}=\overline{EH}$。

2. 連接G、H兩點在$\triangle GDH$與$\triangle HEG$中，因$\triangle GDE\cong\triangle HED$（已證），故$\overline{DH}=\overline{EG}$（對應邊）。又因$\overline{DG}=\overline{EH}$（已證），$\overline{GH}=\overline{GH}$（共用邊），故$\triangle GDH\cong\triangle HEG$（$SSS$全等），因此$\angle DGH=\angle EHG$。

3. 在四邊形$GDEH$中，因$\angle GDE=\angle HED$（已證），$\angle DGH=\angle EHG$（已證），故$\angle GDE+\angle HED+\angle DGH+\angle EHG=360°$，因此$2(\angle GDE+\angle EHG)=360°$，卽$\angle GDE+\angle EHG=180°$。因此$D$、$E$、$H$、$G$四點可作一外接圓（對角互補），令圓心為$O$。
4. 因$\angle GDE=\angle HED$（已證），且$\angle GDE+\angle EHG=180°$（已證），故$\angle HED+\angle EHG=180°$，因此$\overline{GH}\,/\!/\,\overline{DE}$（同側內角互補）。
5. 因$\angle GDE=\angle HED$，又$\overrightarrow{DH}$、$\overrightarrow{EG}$分別為$\angle GDE$與$\angle HED$的角平分線，故$\angle 1=\angle 5=\frac{1}{2}\angle GDE=\frac{1}{2}\angle HED=\angle 2=\angle 6$，因此$\angle 1=\angle 2=\angle 5=\angle 6$。又因$\overline{GH}\,/\!/\,\overline{DE}$（已證），故$\angle 2=\angle 7$（內錯角相等）。又因$\angle 1=\angle 8$（內錯角相等），故$\angle 5=\angle 8$。在$\triangle EGH$中，因$\angle 6=\angle 7$，故$\overline{GH}=\overline{HE}$。又在$\triangle HDG$中，因$\angle 5=\angle 8$，故$\overline{GH}=\overline{DG}$。因此$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}$。
6. 作$\overline{OD}$、$\overline{OG}$、$\overline{OH}$、$\overline{OE}$。因$\overline{DG}=\overline{GH}=\overline{HE}$，故$\overset{\frown}{DG}=\overset{\frown}{GH}=\overset{\frown}{HE}$且$\angle DOG=\angle GOH=\angle HOE$。
7. 由作圖得知$\overline{BD}=\overline{BE}=\overline{DF}=\overline{EF}$，所以$\angle EDB=\angle BED=\angle FDE=\angle FED$。又因$\angle ABC=108°$（已知），故$\angle FDE=\angle FED=\angle EDB=\angle BED=\dfrac{180°-\frac{540°}{7}}{2}=\dfrac{360°}{7}$。
8. 因$\angle FDE=\dfrac{360°}{7}$，且$\angle FDE$對$\overset{\frown}{GE}$，故$\angle FDE=\frac{1}{2}\angle GOE$。由$\dfrac{360°}{7}=\frac{1}{2}\angle GOE$得$\dfrac{360°}{7}=\angle HOE$（$\because \angle DOG=\angle GOH=\angle HOE$）。
9. 因$\angle HOE=\dfrac{360°}{7}$，故$\angle DOE=\dfrac{360°}{7}\times 3=\dfrac{1080°}{7}$。
10. 因圓心O必在$\overline{DE}$的垂直平分線上（$\because O$為$\triangle DEG$之外心），又四邊形$BEFD$為菱形（由作圖得知），故圓心O必在對角線$\overline{BF}$上。又因$\angle ABC=\dfrac{540°}{7}$，$\angle DOE=\dfrac{1080°}{7}$。且$\angle DOE$為圓心角，$\angle DOE=2\angle ABC$，故$\angle ABC$為圓周角。因此$\angle DBG=\angle GBH=\angle HBC$（$\because \overset{\frown}{DG}=\overset{\frown}{GH}=\overset{\frown}{HE}$）。因此$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{BH}$三等分$\angle ABC$。