數學思考方法的探討

賴漢卿

國立清華大學數學系

在數學的教與學的過程中，知識的傳授與計算技巧固是很重要的一部分，但其來龍去脈，要是沒能以證明或圓滿的說明來溝通，則不管它是屬純粹或應用數學的任何領域，都將帶給教師與學生莫大的困擾。一般學生對數學的恐懼感，就是因爲“知其然而不知其所以然”所導致。有時候，做教師的免不了避重就輕地，用責備的口吻說：“這些問題大部分都屬很簡單的，在我的經驗裏，不可能不知道此抽象的顯示。”但這種方式對數學理論的說明，往往會遺失其眞正的方法。

本課題的目的，想來敍述或研究某些有效方法，使學生如何**去讀**、**去想**、**去懂**他要學習的數學，藉以提高學生對數學的興趣。雖然要提高學生學數學的興趣，摒除其對數學的恐懼感，方式是多方面而複雜，但根源與推理的過程是重要因素之一。也就是要使學生知道問題或公式是怎麼來的，並瞭解怎樣能做好“證明”，這種推演常要靠我們觀察所有重複使用的有限個不同的證明技巧而來。證明技巧應該是數學上的一種共通的語言，在重複看到其演練過程的當時，我們只能確信學生在當時，或許懂得每個個體的證明技巧而已。要是教師能作有系統的一系列說明，俾學生能舉一反三的發揮，而不再擔憂怎樣去解及怎樣去證明數學問題，則我們可說那是**教與學**的一種成功。爲達此目的，其重要焦點應放在出發點，並使學生瞭解爲什麼用這種特別方法，又爲什麼要把這個片段用在第一地位。其次便是教導學生們如何使這些**各片段**活動起來；就像下一盤棋一樣的，當兩人扮演此對局時，各人都必需學習，如何將各片段過程，使其在整盤棋中活動起來。

下面我們用簡單的例子來說明在證明中常採用的兩種技巧及某種根源的探討：

A. 前推後退方法

[1] 設△ABC爲一直角三角形，∠C 爲直角，兩股長爲 a，b，而斜邊長爲 c，若

三角形的面積爲$\frac{c^2}{4}$，則$\triangle ABC$是等腰三角形。

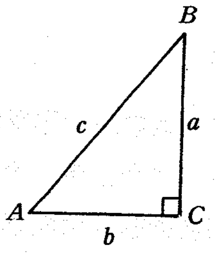
註：想證明此事實，學生的學習背景應知：①直角三角形之性質，②三角形之面積，③等腰三角形。

分析：在進行證明之前，應先檢討要是得證，則表示 $a=b$ ，欲達此目的，則該從題意假設來看：

(i)　該三角形的面積$\frac{c^2}{4}$應該等於$\frac{ab}{2}$。

(ii)　$\triangle ABC$既爲直角三角形，則 $c^2=a^2+b^2$ 。

由 (i) , (ii) 乃知$\frac{ab}{2}=\frac{c^2}{4}=\frac{a^2+b^2}{4}$，於是 $a^2+b^2=2ab$ 。



圖一

或$(a-b)^2=0$, $a=b$ 。

循此學生就易於寫出其證明方式了。

[2]　若n爲正整數，若2^n-1爲質數，則n也必爲質數。

註：本題在學習背景中，學生應知質數的意義，即除了1與其本身外，無其他整數可除盡之。同時我們常用$a \mid b$ 表示a除盡b 。

分析：本題除了質數定義外，無什麼特別形式。但仍用前推後退法以達建立某結論。我們可以反問學生“**如何才能證明此正整數爲質數？**”要是n不是質數，則應該有一正整數k， $1<k<n$ 使得$k \mid n$，否定了此結果就表示n爲質數。故如果我們在n不爲質數的情況下，導出2^n-1也不是質數便得，那就是有一整數m， $1<m<2^n-1$ 使 $m \mid 2^n-1$ 。則2^n-1不是質數。於是回到原先的問題，在n不是質數時，則存在一正整數q，使得$n=kq$，於是

$$2^n-1=2^{kq}-1=(2^k)^q-1$$
$$=(2^k-1)((2^k)^{q-1}+\cdots\cdots\cdots+1)$$

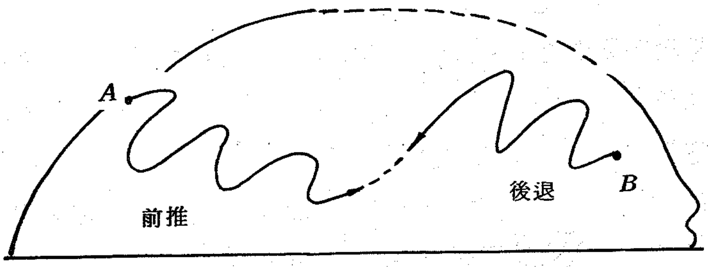
其中

$$(2^k)^{q-1}+\cdots\cdots\cdots+1=p$$

爲一正整數，且$1<p<2^n-1$，這就否定了2^n-1爲質數，由此不難將眞正證明方法寫出來。

以上的前推後退技巧，就像在草堆中尋找針線一樣的，是在沒有把握正確的證明方

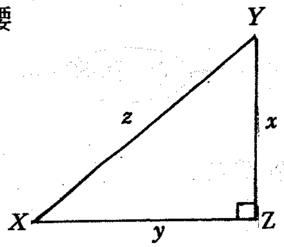
向時所使用。我們可參照下面圖二圖形



圖二

下面幾個類似題可供演練：

(1) 如圖三，$\triangle XYZ$ 的 Z 爲直角頂點，其斜邊 z 與兩股間之關係若滿足 $z=\sqrt{2xy}$，則 $\triangle XYZ$ 爲等腰三角形。



圖三

(2) 如圖三，若 $\sin X=\sqrt{x/2y}$，則 $\triangle XYZ$ 爲等腰三角形。

註：① 本題可由三角函數的定義直接得出：

如 $\sin X=\sqrt{x/2y}=\sqrt{\dfrac{1}{2}\tan X}$

則 $\sin^2 X=\dfrac{1}{2}\tan X$，或 $2\sin X\cos X=1$

結果

$$\sin 2X=1\ ,\ X=45^\circ$$

② 另一種方法可依：因 $\sin X=x/z$，故

$\sqrt{\dfrac{x}{2y}}=\dfrac{x}{y}$，或 $2xy=z^2=x^2+y^2$

顯然 $(x-y)^2=0$，$x=y$。

(3) 設 n 爲奇數，則 n^2 亦爲奇數。

(4) 設 n，m 爲奇數，則 mn 爲奇數。

B. 歸納法

對於所有正整數都要成立的公式，常藉助於所謂“數學歸納法”來證明。譬如 B_n 為具有此形式的式子：

「對於任何整數 $n \geq 1$，B_n 成立。」

此 B_n 於 B_1 時發生，而 B_2，B_3 ……等也都成立，但要如何才能說 B_n 對所有正整數 n 都成立呢？“歸納法”就是用來證明此形式的一種技巧，其過程應為

$$\cdots\cdots \rightarrow \boxed{B_1\text{為眞}} \xrightarrow{\text{入}} \boxed{\text{證明箱}} \xrightarrow{\text{出}} \boxed{B_2\text{為眞}} \cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots \rightarrow \boxed{B_n\text{為眞}} \xrightarrow{\text{入}} \boxed{\text{證明箱}} \xrightarrow{\text{出}} \boxed{B_{n+1}\text{為眞}} \cdots\cdots$$

舉幾個例子說明如下：

[1]　對於任何正整數 $n \geq 1$，$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$。

證明：第一步驟為 B_1 能成立，我們置 $n=1$，則 $\sum_{k=1}^{n} k = 1(1+1)/2 = 1$ 成立。

第二步驟是在 B_n 成立之假設下，推導 B_{n+1} 亦成立，但在 B_{n+1} 的情形：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)\\ &= \frac{1}{2} n(n+1) + (n+1)\\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2} n + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}(n+1)(n+1+1)\end{aligned}$$

知 B_{n+1} 時公式亦正確，因而證明了本命題。

用歸納法證明題目時，並不一定要從 $n=1$ 開始，譬如：

[2] 對任何整數 $n \geq 5$，$n^2 < 2^n$。

也可用歸納法證明。此時第一個步驟應做些微修改爲自 $n=5$ 時證明 $2^5 > 5^2$ 爲眞（顯然 $32 > 25$）。其次設 $n(>5)$ 時成立，即 $2^n > n^2$，而推導在 $n+1$ 時，$2^{n+1} > (n+1)^2$。證明此不等式成立仍用 $2^n > n^2$ 之兩邊乘 2 得

$$2^{n+1} > 2n^2,$$

但 $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 < n^2 + n^2$，蓋因

$$n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 > 0 \quad (n \geq 5)$$

結果得 $(n+1)^2 < 2n^2 < 2^{n+1}$，而得所要的證明。

可用歸納法來證明的其他例子如：

[3] 對所有正整數 n，$5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ 都可被 8 整除。

[概說] $n=1$ 時 $5^1 + 2 \cdot 3^0 + 1 = 8$，

若 $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ 可被 8 所整除，即設 $5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1$ 爲 8 的倍數，則證明（$n \geqslant 2$）

$$5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 \text{ 也爲 8 的倍數即可。}$$

因 $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1 = 5 \cdot 5^n + 6 \cdot 3^{n-1} + 1$

$$= 5(5^n + 2 \cdot 3^{n-1} + 1) - 4 \cdot 3^{n-1} - 4$$

但 $4 \cdot 3^{n-1} + 4 = 4 \cdot (3^{n-1} + 1)$，而 $3^{n-1} + 1$ 爲偶數，故 $4 \cdot 3^{n-1} + 4$ 爲 8 的倍數，因之 $5^{n+1} + 2 \cdot 3^n + 1$ 能爲 8 所整除。

[4] 對任何整數 $n \geqslant 4$，$n! > n^2$。

[概說] $n=4$ 時　$4! > 4^2$

若 $n \geqslant 4$，$n! > n^2$，則證明

$$(n+1)! > (n+1)^2 \text{ 成立即可。}$$

因
$$\begin{aligned}(n+1)! - (n+1)^2 &= (n+1)[n! - (n+1)] \\ &\geqslant (n+1)[n^2 - n - 1] \\ &= (n+1)[(n-1)^2 + (n-2)] \\ &> 0 \qquad (n > 4)\end{aligned}$$

故 $(n+1)! > (n+1)^2$。

[5]　對於任何 $n \geqslant 1$，6 可整除 $n^3 - n$。

[概說]　$n=1$，命題仍為眞。

$n=2$，則 $2^3-2=6$ 可被 6 整除。

設 $n \geqslant 1$ 時，n^3-n 被 6 整除。我們欲導出 $(n+1)^3-(n+1)$ 也可被 6 整除。

蓋因 $(n+1)^3-(n+1)=(n^3-n+3n^2+3n)$

$=(n^3-n)+3n(n+1)$

因 $n(n+1)$ 為偶數，故 $3n(n+1)$ 能被 6 整除；又 n^3-n 已知可被 6 整除，故 $(n+1)^3-(n+1)$ 可被 6 整除。

從上述例題，我們知道關於正整數 n 之**等式、不等式**以及其他既非等式亦非不等式的命題仍能用歸納法證明。

想證明一個命題之眞，除上述用**前推後退法**、歸納法之外，亦常依定義選擇（存在）以及建造（特別式）等方法來做為證明題目的技巧。但有些公式或數列的形成與自然或人們的感悅有很密切的關係。如果在一教學的過程中，能示明給學生，那就更能引起學生的學習興趣了。下面我就舉個實例算是趣味式的探討某事實的根源。在未提這一段之前，也許大家已聽過：

① 在照像術中，主體應在什麼位置，才會使人覺得調和悅目。又

② 一條線段要折成二段使成為矩形之兩邊，何時的矩形看起來最舒適呢？（正方形顯得太呆板，但太瘦長的矩形又顯得壓迫感，總之該找某點來分較為合適，該有一眞理存在）

③ 自然現象中，許多樹枝或莖分出新芽或新枝都似乎循某一種規則，你能發現此規則嗎？

④ 蜜蜂雄蜂之前幾代祖先雄、雌分布之情形如何，你知道嗎？

⑤ 為什麼鋼琴半音階及全音階如此地分布呢？

…………………………

以上幾種都與數學中之某數列有很密切的關係，不管是藝術或音樂，甚或某些自然現象都離不開數學的某種規則，即所謂的黃金分割，下面我們來介紹**黃金分割**（Golden section）。

C. 黃金分割的特徵

“黃金分割”也稱爲“黃金律”或“外中比”。從古希臘時代的建築物或經典性的美麗藝術品，都可以發現這種黃金分割比。德國心理學家Gustav Theodor Fechner（1801～1887）及Wilhen Max Wundt（1832～1920）曾經在一連串的心理測驗中，證明大部分的人，在選擇圖片、鏡子、包裹及其他矩形物品時，常常不自覺地喜愛“黃金尺寸”（金塊），即寬、長之比是一黃金律。當時的藝術家、心理學家雖不完全瞭解當中道理，爲何此數或矩形（兩邊之比爲黃金比）能大大地吸引着人們的興趣。也許因它能調和人們的視覺與腦神經間之關係；如同音律的調和一樣吧！

矩形的長、寬成黃金分割比的意思是：

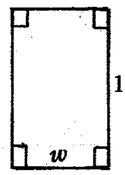
“較小的寬度與較大之長度的比等於較大的長度與長、寬之和的比”。

如設長爲1，寬爲w，則黃金分割比是下面之比

(1)　$w : 1 = 1 : 1+w$

或　$w^2+w-1=0$

其解爲　$w=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.61803398\cdots\cdots$



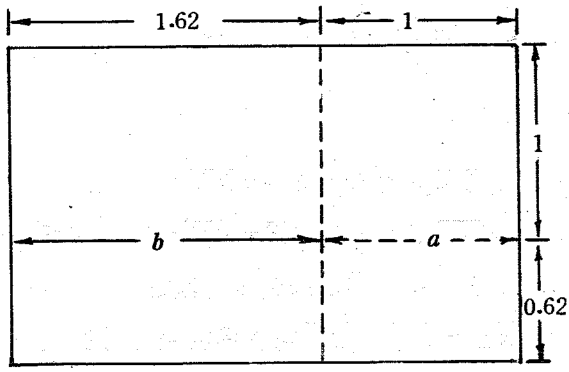
圖四

（捨去$w<0$者），而$\dfrac{1}{w}=1.61803398\cdots\cdots$。

數$0.61803398\cdots\cdots$　稱爲一單位的黃金分割數，其倒數恰在該數加1。

在繪畫或攝影時，其主體人物應該置放在那個位置，才能顯出調和悅目呢？下圖是一幅簡單的圖畫，其中心景物置放法即依黃金比的關係安放的：設b，a分別爲中心景物離左、右兩邊的距離，並且滿足

(2)　$a : b = b : a+b$



圖五

這樣的安排你覺得如何？看來是否覺得很調和。這個比如何求出呢？從(2)式去其分母得

$$a\,(a+b)=b^2 \text{ 或 } a^2+ab-b^2=0$$

我們感興趣的是 $\frac{a}{b}$，因之以 b^2 除上式得

(3) $\quad (\frac{a}{b})^2+(\frac{a}{b})-1=0$

設 $\frac{a}{b}=r$，則(3)與(1)同等，而求得 $r=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}=0.61803398\cdots$， 即為黃金分割數。令 $b=1$，則 $a=0.61803398\cdots$。 若令 $a=1$，則 $b=1.61803398\cdots$，因此

$$\frac{a}{b}=\frac{0.61803398\cdots}{1}=\frac{b}{a+b}=\frac{1}{0.61803398\cdots+1}=\frac{1}{1.61803398\cdots}$$

$$=\frac{a+b}{a+b+b}=\frac{1.61803398\cdots}{2.61803398\cdots}$$

由此可見

$$\frac{0.61803398\cdots}{1}=\frac{1}{1.61803398\cdots}=\frac{1.61803398\cdots}{2.61803398\cdots}$$

此比是圖形中相互間大小之關係。如果在繪圖或攝影時，其中心物如能依上面的黃金分割比安排，那就會得較佳效果。

黃金分割比也稱為“外中比”，即將一線段分成兩段使其長的線段為短的一段與線段全長的比例中項。在平面幾何作圖中，我們可用尺規求出該比值（ $0.61803398\cdots$）:

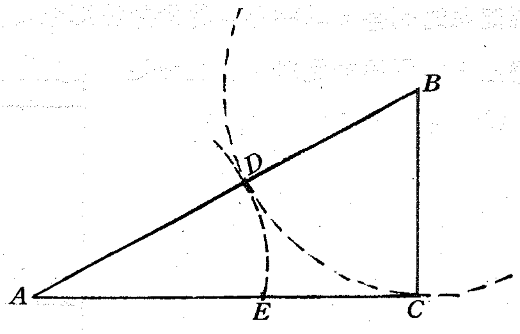
① 設 $\overline{AB}$ 為給定的線段，

② 以 $\frac{1}{2}\overline{AC}$ 長作過 C 的垂線 $\overline{CB}\,(=\frac{1}{2}\overline{AC})$，

③ 在 $\overline{BA}$ 上取 D 使 $\overline{BD}=\overline{BC}$，

④ 於 $\overline{AC}$ 上取 E 使 $\overline{AE}=\overline{AD}$，

則 E 為線段 $\overline{AC}$ 的黃金分割點。



圖六

即 $\overline{AC}:\overline{AE}=\overline{AE}:\overline{EC}$ 為著名的黃金分割比。

故不難求得 $\overline{AE}=0.61803398\cdots\times\overline{AC}$。蓋設 $\overline{AC}=1$，$\overline{AE}=x$，則

$\overline{EC}=1-x$。於是

$$1:x=x:(1-x)\text{ 或 }x^2+x-1=0$$

如同(1)式解得 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}=0.61803398\cdots$。在作圖過程中 $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1}{2}=\sqrt{(\dfrac{1}{2})^2+1^2}-\dfrac{1}{2}$，表示 x 取斜邊長減去另一股長的 $\dfrac{1}{2}$ 而得。

D. 菲布納西數列

由黃金分割到菲布納西（Fibonacci）數列，你會意會到此數列與黃金分割有密切的關係。先從自然界裏的生物如**雄蜂的家系**，植物的**花朵與支枝**，音調等來觀察，你會發現到有趣的數字排列，那就是菲布納西數列：

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,\cdots\cdots$$

這個數列的形成是將它前兩項數之和，依次列出，唯第一項爲 1，而第二項爲 $1+0=1$，第三項爲 $1+1=2$，第四項爲 $1+2=3$，第五項爲 $2+3=5$，⋯⋯。

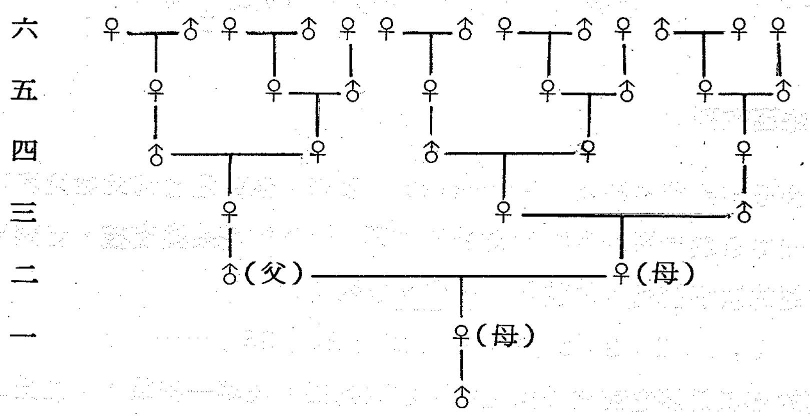
在自然界中，依這種數列形成的情形很多。這個數列之前項與後項之比由 1 慢慢地（非單調）減少而趨近於黃金分割比 0.61803398。說來也很奇妙，我們就先看下面幾個例子。

例 1 設有一元及二元的硬幣兩種，以小 o 表示一元，大 O 表示二元硬幣，則在我們付款時，各種款數之付法，就是按菲布納西數列安排的。請參照下面表一。

（表一）

付款數（元）		可能安排的方法
1.	o	1
2.	oo, O	2
3.	ooo, oO, Oo	3
4.	$oooo$, ooO, oOo, Ooo, OO	5
5.	$ooooo$, $oooO$（4種）, oOO（3種）	8
6.	$oooooo$（1種）, $ooooO$（5種）, $ooOO$（6種）, OOO（1種）	13
7.	⋮	21
⋮	⋮	⋮

例2　許多動物都必須有雌有雄，然後才能繁殖後代，但蜜蜂繁殖却很奇怪，牠們雖是有雌有雄，但雄蜂却只有母親而無父親，原因是在一群蜜蜂中，雌蜂雖多，但都是工蜂，只有一隻蜂后能產卵。蜂后與雄蜂交配，產下的蜂卵，大多數是受精卵，受精卵孵化成雌蜂（工蜂或蜂后），而有少數未受精卵也能孵化，牠們孵出成為雄蜂。因此當我們要追溯一隻雄蜂的家系，你很容易看牠的任何一代祖先數目是按非布納西數列而成，請參照圖七。



♂：雄，♀：雌　　　圖七

上圖中從最下面一隻雄蜂♂開始往前推算，則因♂無父親，故其上一代只有母親一個，但母親的上一代則必有父親與母親，因此往上追溯而知本身開始往上的

第一代為 1　（1♀，無♂）
第二代為 2　（1♀，1♂）
第三代為 3　（2♀，1♂）
第四代為 5　（3♀，2♂）
第五代為 8　（5♀，3♂）
第六代為13　（8♀，5♂）

圖中雖沒列出第七代，但我們可容易地觀察出

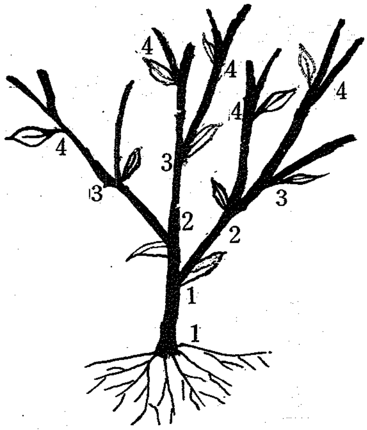
第七代為21　（13♀，8♂）

……………………

例3　在自然界的花朵，不少有非布納西數列之花瓣，如松果要是從中間一層一層往外數的話，每層的果瓣是依非布納西數列增加。其他花朵有

二瓣，三瓣，五瓣，八瓣，……等等

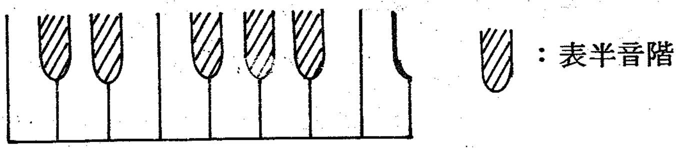
而在菊科中，乃以34瓣爲最普遍，這也是一非布納西數。至於爲什麼植物的花瓣會按非布納西數來開呢？生物學家認爲多花瓣的花，都是由具有少花瓣的花進化而來，就以同一種植物而言，常常會有單瓣與重瓣花種，重瓣則是由單瓣發展而來。其他植物分枝的情形，大體也合乎非布納西數。一般而言，植物開始由種子萌芽長出時是一條主莖，當它長到一定高度後，就由主莖的某一葉子的葉腋長出一個新芽。當第一個新芽長到一定高度而成第一枝莖後，又由主莖與第一枝莖的某一葉腋分別長出新芽，此時有二個新芽。依此長成的樹枝也都按非布納西數而添加。



圖八

例4　由例2我們從一隻雄蜂往上追溯至第六代祖宗有13個，這13隻蜜蜂，用白圈表示雌蜂，黑的表示雄蜂，則13隻蜜蜂的排列如下：

如果在例3由主莖及枝莖長到有13個枝時才分別開花，我們若在新枝上的花用黑圈表示，而老莖上的花用白圈表示，畫出來的結果也如上圖完全相似。此圖形恰好與鋼琴鍵上的一音階極相似，因爲13個黑白圈子，對應於半音階的13個音階：



圖九

由此使我們聯想到音階的原理，在人們耳中有一特殊生理結構，使人們能區別聲音。在二三千年前人類就已製造了樂器，開始是很單純的發音器，而逐漸地形成了今天的音調樂器，並寫成樂譜流傳下去。這種流傳形式是根據聲音由耳傳至腦神經，使人們聽來覺得愉快而成的。它不能任意構成，否則就像今天噪音那樣變成公害了，它必須與我們的聽覺機制之生理相互調和，因此人們就很自然地發展與非布納西數相吻合的音樂傳統形式。含半音階共有13個音調是較近代音樂的發展，此數是非布納西數列中之13。

以上我們就自然現象與數字相關連之情形，做了一番探討。數學除了它對於各科學

能給予合理的說明外，本身的創新是屬於極重要的一部分，從已有的事實再探討其特性，藉以發現新關係，而能彼此呼應。我們就前述非布納西數列之相繼前後兩項之比，看它有什麼特性存在於其中：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，……

（表二）

$\frac{1}{1}=1$	$\frac{2}{1}=2$
$\frac{3}{2}=1.5$	$\frac{5}{3}=1.66\cdots$
$\frac{8}{5}=1.6$	$\frac{13}{8}=1.625$
$\frac{21}{13}=1.61538\cdots$	$\frac{34}{21}=1.619047\cdots$
$\frac{55}{34}=1.617647\cdots$	$\frac{89}{55}=1.618181\cdots$
$\frac{144}{89}=1.617977\cdots$	$\frac{233}{144}=1.618055\cdots$

在上面兩邊之比數，我們可以發現左邊的比值是逐漸增加而右邊的比值則逐漸減少，且兩邊之比值又逐漸趨於相近的數：1.61803398…。這個數就是在前節所述與黃金律相關的數，即

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.61803398\cdots$$

此數是黃金分割數$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$的倒數。我們想求非布納西數的一般項表示：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

看來這個公式會令人望而生畏。事實上由於其各項數是前兩項數之和的關係而知有

(1) $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$

(2) $F_0=F_1=1$

這是一種疊代的公式，因之可考慮r^n形式之數（r不一定要正數）滿足

$$r^n = r^{n-1} + r^{n-2}$$

故 $r^2 = r + 1$，解之得 $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 。

我們發現 $(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$ 及 $(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ 都是滿足(1)式，

所以它們的線性組合

(3) $$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

也滿足(1)式，其中 c_1 , c_2 是任意常數。但在(2)的限制下它們必須滿足

$$\begin{cases} 1 = c_1 + c_2 & (n=0\text{ 時}) \\ 1 = c_1\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) & (n=1\text{ 時}) \end{cases}$$

解此聯立方程式得 $c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

故得

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]。$$

從這個一般式 F_n，將 n 代 2，3，……時得

$$F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ \cdots\cdots。$$

故 $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是非布納西數列。

再說由表二看 $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ 於 $n\to\infty$ 時的極限值乃趨近於 $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803398\cdots$ 是黃金分割比，我們記作

(4) $$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1.61803398\cdots$$

(4)式之求法可由

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

兩邊同除以 F_{n-1} 得

$$(5)\qquad \frac{F_n}{F_{n-1}} = 1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}}$$

雖不知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\tau$ 是多少，但 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{F_{n-1}}{F_{n-2}}}=\frac{1}{\tau}$

因此於 $n\to\infty$ 時，(5)式的極限爲

$$\tau=1+\frac{1}{\tau} \text{ 或 } \tau^2-\tau-1=0$$

解之得 $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$（另一解爲負數 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，但其比值恒爲正，故負值捨去）。如果在非布納西數列中，以前項比後項求其極限則爲

$$(6)\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}=\frac{1}{\tau}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0.61803398\cdots$$

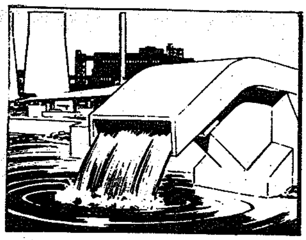
(4)與(6)之數值是在上一節所見到的黃金分割比值。

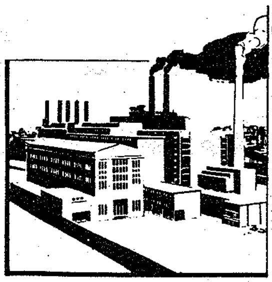
熱污染

取材自：Frontiers of Science 3：Introduction to Earth Sciences

已經工業化的先進國，消耗的能量極大，諸如發電所引起的空氣和海洋的化學污染等等，都是極嚴重的問題。因爲這些污染對生物的生命威脅已不容忽視了。

雖然就表面上說電力比較氣體燃料、煤炭的污染爲低，但是仍有極大潛在的環境污染之害。它的環境污染，即所謂的“熱污染”，熱污染是由於發電所放出的熱水流入河川或海內而造成。在美國電力的消費，每10年增加2倍，所以熱污染的問題，也日趨嚴重。發電廠由火力發電變更爲核子發電後，它的放熱量，即增加60％，使熱污染愈行增大。





生態學者對發電所排出的熱水，非常困擾。地球上生物的新陳代謝，與溫度的正常與否關係至爲鉅大，而魚類等不能調節體溫，所受影響最大。新陳代謝在溫度增加10°C以上時，即增加兩倍，魚類因而對氧的需要增加，尤感難以適應。水溫增高，會影響魚的食慾和成長，也減退消化能力。尤其對卵的發育影響更大。目前的若干發電所，計畫在河川興建，如此則河川內的生物，將不能存活。

—編輯室—