

◆ 專題演講 ◆

SKEMP 數學心理學

RICHARD R. SKEMP 博士

(英國WARWICK大學)

地 點：國立臺灣師範大學數學系

新智力模式與數學理解力簡介(一)

日 期：民國七十二年十一月十五日

翻 譯：林福來 (國立臺灣師範大學數學系)

壹、智慧的功用與數學理解力

很高興有機會在此與諸位討論關於“數學理解力”(the understanding of mathematics)我的新看法。有關數學理解力的問題，我已經探討相當久了。

十二年前，在個人所著“數學的學習心理學”⁽¹⁾一書中，曾寫著“什麼是理解力？是什麼促使我們理解的？對於某一件事瞭解與否，我想我們都很清楚；我們大家也都知道「瞭解」與「不瞭解」是不一樣的東西。當我們瞭解時，是什麼發生了，這個什麼當我們不瞭解時就不發生，這問題多數的我們大概都毫無所知”。

同一書中，我繼續說，除非我們已知道是什麼促使我們瞭解某事的，否則我們就不夠格去談理解其他的事物。關於此問題，是在我當了多年的中學數學老師之後，才引發我想去探討的動機。

在同一書稍後的章節中，我曾提出下列這問題的答案：“當我們理解時才發生，不理解時就不發生的是什麼？”

緊跟著此問題的是一個更實際的問題，即

“當我們理解時，我們能做什麼？不理解時，不能做什麼？”

這個實際的問題，當時我並沒處理。

杜威⁽²⁾曾說「好的理論是一切事物中最實際的」。這看法我個人完全贊同。因此，我想在數學的領域中，提出三個上述這實際問題的答案。在討論的過程中，我們可以自然地看出，何以理論最抽象的數學，却也扮演最實際的角色（譯者註：即智慧作用的實際例子）。

爲了讓各位先有點概念，我就先將三個答案提出來。當我們理解時，表示我們能做下列三件事：

- (1) 能達成目標；
- (2) 能與人協商（co-operate）；
- (3) 能創造。

這三答案，源自我對一個表面上看起來無關的問題，即**新智力模式的發展**，所進行的研究結果。至於我爲何要選擇這個頗具野心，但吃力的研究課題，有必要稍加解釋。

我一生多半的時間都花在數學的學習心理學的研究上，同時也探討**智慧式學習**（intelligent learning）的心理學。起初我並沒有意識到，後來才漸漸知道，在人類的智力活動中，數學的學習是一個特別清楚，兼具高度濃縮性的例子。

有了這層認識之後，我就渴望能將我的數學學習理論推廣至智慧式的學習理論及教學理論；智慧式的學習理論可適用於任意的學科，而教學理論則可促成智慧式的學習。數學並不是唯一“沒教好”及“病態學習”的學科。教學不良在數學科只是較明顯而已。

在1973年，當我從曼徹斯特大學心理學系轉到渥里克（Warwick）大學的教育系接掌系主任時，我的大膽嘗試就已開始。起初的五年，除了系主任例行工作以外的時間，全都花在此問題的探討上。研究的結果就是此新智力模式的建立。

新智力模式的建立，我並不視它爲我研究工作的總結，最重要的是提出了一種新的方向，讓我們來思考有關智慧的問題。早期的智力模式都是基於智商測驗，即I.Q.。我們利用I.Q.來測量我們的智力，已有70年的歷史。利用I.Q.來測智力效果很好，但是I.Q.無法告訴我們智力是如何作用的，爲何擁有智力是好的，I.Q.測驗也無法幫助學習者善用他們具有的智慧。事實上，在我們往這幾個方向考慮之前，這幾個有關智力的重要問題，不僅沒有答案，甚至問題本身都少有人提及呢！

在我的研究中，我將從另一種新的角度來展視數學的面貌；把數學的學習視爲新智

力模式的重要特例。由於諸位對**新智力模式**都還不熟悉，我需要先摘要地說明一下什麼是新智力模式。我將盡量說的簡明，所以難免有許多部分濃縮了，也有許多部分給省略掉了。

首先，我想區別一下兩種不同方式的學習，即習慣式的學習（habit learning）與智慧式的學習（intelligent learning）。這兩種學習方式跟我的新智力模式有密切關係。

貳、習慣式與智慧式的學習

習慣式的學習包含的只是一些習慣的建立，少有適應調整性（adaptability）。學習的結果只是某些活動力（actions）增強而已，學習是在活動之後才發生。所學到的是活動力，認知的成份（cognitive element）很少。

關於習慣式的學習，在動物中有一個大家熟知的例子，就是**史肯納的箱子**（Skinner box）。將一隻飢餓的老鼠放在一籠子裏。這籠子中有一根棒子水平地從籠子的一邊伸出。當老鼠繞著籠子移動時，偶而會壓一壓棒子，此時就餵它一小片食物。吃掉食物飢餓感就會稍減，每次老鼠都感覺如此。刺激（被關在籠子裏與飢餓）和壓棒子之間的結合，越來越增強。逐漸地，就建立起一種習慣。

習慣式的學習，在人類中也可發現，有一個小男孩，他的父母注意到每當給他餅乾吃的時候，他有個新而令人迷惑的行為。當他吃餅乾時，每咬完一口，馬上就把拿著餅乾的手放在頭頂上。問他為什麼要這樣做，小男孩也不知道，後來他的父親回憶起渡假時，他們跟另一家養著一隻小狗的朋友住在一起，那隻狗叫做潘尼，潘尼也喜歡吃餅乾。追憶至此，他父親才恍然大悟，為什麼他的兒子會有此習慣。這小男孩在不必要避開小狗，以防小狗咬走他的餅乾的時候，防衛的行為仍然保留下來了。另外，強記式的學習（rote learning）也是習慣式學習的例子，這是一種語言習慣的學習。

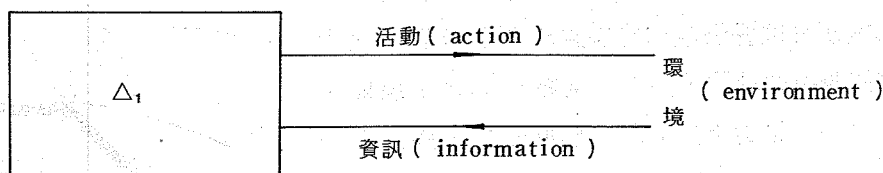
相反地，智慧式的學習主要的特性是發展調整適應能力（adaptability）。行為是目標取向（goal-directed）的，利用預先建構好的具彈性的計畫來引導活動的進行，同時在活動進行中還可修正原計畫。這些計畫可使我們在各種狀態下，也能達成種種目標。尤有甚者，我們可預先設計很多種計畫，在活動前選擇一個最佳的，再按此計畫行動。智慧式的學習通常是活動之前已發生，活動不只是為了達成目標，同時還進行臆測的檢驗。

在習慣式學習的層次上，行為學派的人曾證實我們的行為是深受環境影響的。另一種相反的觀點，是我的新智力模式中的智慧式學習理論，它證明我們自己會調整我們的行為，讓我們在不同的環境中可以達成同一個目標。例如，當我口渴想喝水時，如果我人在家裏，我會到廚房打開水龍頭取水；當我還是小孩時，我會跑到庭院中，壓抽水機；如果在咖啡館，我會跟服務生要；如果我是在露營的營帳中，我會找一條清晰的小河；去年冬天，我家的水管內結冰了，早餐的咖啡是溶雪來煮的。總之，在不同的環境中，就設計不同的計畫，所有的計畫都指向同一目標：解渴。每一種計畫的設計都是根據我們對於環境的認識；而建立認識環境的知識就是智慧的主要功能。活動並不是對於外來刺激的反應，而是取決於每個人心中所想的目標。此時，認知的成份就很重。

參、目標取向的學習與新智力模式

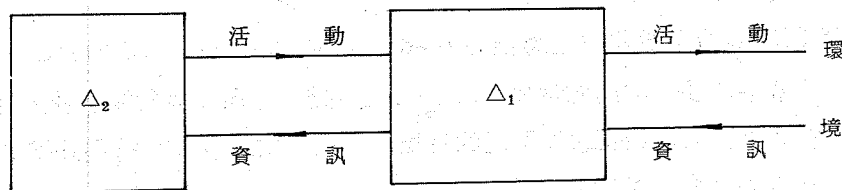
在新智力模式中不只活動是目標取向的，同時學習也是目標取向的。學習是要建築（building）和檢驗（testing）有組織的知識結構。

在新智力模式中有兩個不同層次的導向系統（director system）。導向系統的概念是從人工智慧學（cybernetics）中借用來的。第一層次的導向系統我們稱它為 Δ_1 （delta-one），圖解如下：



也就是說 Δ_1 這個導向系統，直接作用在環境中的實際物體。

第二層次的導向系統叫做 Δ_2 ，圖解如下：



也就是說， Δ_2 這個導向系統是作用在 Δ_1 上。 Δ_2 的功用是將 Δ_1 導至讓 Δ_1 更能發揮其

作用的狀態。 Δ_1 的作用方式有兩種，分述於下：

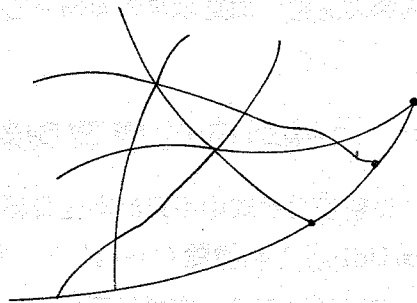
Δ_1 爲了表現它的功用，從它目前的狀態要達成某一個特定的目標，必須有個計畫。如果以 P 代表目前的狀態， G 代表特定目標，那麼上述的計畫可以用單一的路徑連接 P 到 G ，圖示如右。

此種簡單的計畫可能是先天（innate）的反應，也可能是學習得到的。不管是先天的或是學習得到的，這種計畫跟活動幾乎沒有兩樣，並沒有多少調整適應性；往往一離開此路徑，可能就不知如何才能回到原路徑。習慣式的學習就是屬於這一種。

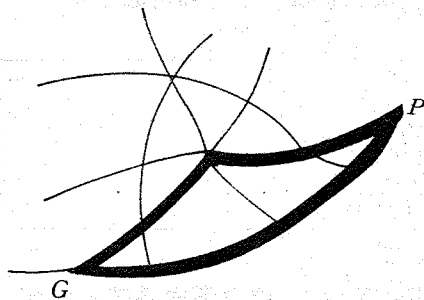


因此，在 Δ_1 內最好有個認知圖（cognitive map），認知圖中可以表現各種目前的狀態（present states）和目標（goal states），如右圖所示：

在認知圖中，從任意的起始狀態（initial state）到任意的目標，可以連接上許多可能的路徑，只要起初狀態和目標可以同時表現在同一個認知圖內即可。右下圖中 P 表示一起始狀態， G 表示一目標，粗線部分表示可能的路徑。



這是一種較有效並且較經濟的學習方式，因為這種認知圖提供我們建構許許多多計畫的潛力。許許多多的計畫，如果不是靠認知圖來儲藏，而是個別地記憶下來，那是不可能的，將是記不勝記。



就是這種方式的學習與智慧才特別相關。雖然它的作用與活動的進行還隔開一步，可是却較可能使活動成功，這是因為它較能適應各種特別的工作（task）。

智慧（即 Δ_2 ）對於調整適應能力（adaptability）有兩方面的貢獻：

1. 建構許許多多的認知圖於 Δ_1 內，以對應於 Δ_1 所要執行的各種工作。
2. 針對不同的起始狀態與不同的目標，導出適當的計畫。這些計畫就可組成前面所述的目標取向活動的基礎。

這兩方面智慧的功用，是不可能靠外人向你直接灌輸而達成的。只能靠學習者自

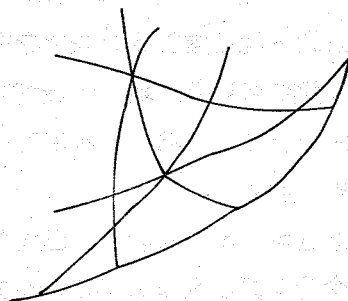
己的 Δ_2 導向系統作用在 Δ_1 上的活動來達成。諸位或許有人已認出這就是建構主義(constructivist)者的觀點。

但是好的教學卻可以幫助智慧式的學習。事實上，以良好的教學來促成智慧式的學習也是必需的，因為在短短的十年或者十五年之內，我們就要學生們學習好幾世紀以來，智慧最優異的人們所創造的知識呢！

肆、理解與不理解

在以認知圖說明的這個模式中，理解力(understanding)怎樣解釋呢？

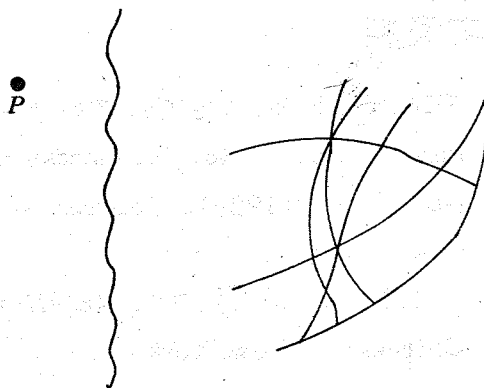
右邊這個圖形可以表示三種不同抽象層次的概念。在最具體的層次上，它可以看成是一張街道圖，如同其外表所示。在稍為抽象的層次上，它可以代表一認知圖，而利用地圖當做它的隱喻也很有用。在最抽象的層次上，它可以代表——Schema* (譯註：Schema 一般心理學上譯成基模，因Dr. SKEMP⁽³⁾用此字時與一些心理學家，如皮亞傑學派的人，意義上不太相同，故



此字只好不譯，視為一專有名詞)，而上述的街道圖與認知圖却是Schema的特例。

街道圖，認知圖與Schema三者之中，我們可以選一個我們較能體會的概念來看上面這圖形，不管我們選的是那一種，對於理解或不理解的說明都能講得通。

Schema是 Δ_2 建構計畫時的資源， Δ_2 建構好的計畫再供 Δ_1 用來執行活動。現在假設有某樣東西，比如右圖中的P點，它跟已有的Schema間沒有路徑相連。這時 Δ_2 就無法擬定計畫將此點連接起來。這點可能是某一起始狀態或一特定目標，或是連接一起始狀態與目標的路徑上的點。



* 有關Schema的定義，請參閱“新智力模式在數學學習上的應用”一文。

如果上圖中右邊的圖形，具體地視為一街道圖，那麼就表示我們實際上已失去 P 這個地方了。

如果將它看成是認知圖或 Schema，那麼這就表示我們的思考迷失了，想不出辦法去活動以達成目標 P 。一般而言，當我們面對某些事物、經驗、情況或概念，而我們無法了解時，那麼上面描述的正是我們的內心狀態。

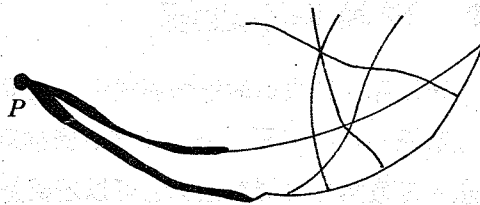
當我們理解時，是什麼已經發生了呢？理解的成就，就是我們能夠把 P 點跟既有的 Schema 連接起來，如右圖所示。

連通後的新狀態再輸入導向系統的範疇中，我們就可以應付此種新狀態。如果以街道圖的比方來說，就相當於我們知道身在何處，知道如何找路到達目的地。這種智慧狀態的

改變，使我們能夠控制一些前所不能控制的狀況。在精神上，可以改變沒有安全感的心態，變成有信心。

上述這種理解力的概念，已經普遍被接受。最後，我們需強調認知圖的概念很有用，這概念是美國心理學家 Tolman 首先介紹的。以認知圖當比喻，可以幫助我們思考極端抽象的智慧式學習的過程以及理解力的問題。利用此比喻也可以發展出嚴密的理論，當然這就要花更多的篇幅。

本週內，我們一定有時間可以一起討論起頭的部分理論。



參考資料

- (1) SKEMP, R. K. (1971). *The psychology of learning Mathematics*, Pengiun Books Ltd, Harmondsworth, Middlesex, England.
- (2) DEWEY J. (1929), *Sources of a Science of Education*, Liveright, New York.
- (3) SKEMP, R. R. (1979), *Intelligence, Learning and Action*, Wiley, Chichester, New York.