新智力模式在數學學習上的應用

(三)

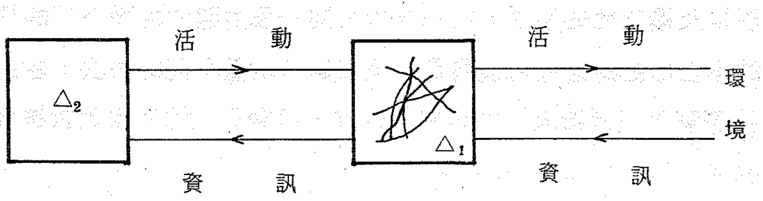
日　期：民國七十二年十一月十八日
翻　譯：林福來（國立臺灣師範大學數學系）

壹、Schema 的建構

新智力模式中有兩個導向系統$\triangle_1$和$\triangle_2$。$\triangle_1$作用在實際的環境；$\triangle_2$作用在$\triangle_1$上。$\triangle_2$有兩個主要的功用：

1. 建構許許多多的認知圖於$\triangle_1$內。
2. 以建構好的認知圖，來擬定計畫供$\triangle_1$進行活動。

現在我們先來討論，$\triangle_2$是如何進行它的第一個功用，即如何建構認知圖？



建構（construction）的意思是指建築（building）和檢驗（testing）兩種步驟。比如說砌牆時，把磚塊和水泥疊起來是建築，利用鉛垂線來測是否垂直，或平不平是檢驗。建築與檢驗兩種步驟交互進行，牆才能砌的漂亮。

Schema 的建構也包括建築和檢驗兩種步驟。這兩種步驟進行的方式各有三種，剛好一種建築方式對應於一種檢驗方式，列表說明如下：

Schema 的建構

建築 ——— 檢驗

方式
(mode)

建築		檢驗
實際經驗 (experience)	←→ ①	預測，實驗 (prediction experiment)
溝通 (communication)	←→ ②	討論 (discussion)
創造 (mental creativity)：探索 (extrapolation)、想像 (imagination)、直觀 (intuition)	←→ ③	內在的一致性 (internal consistency)

以實際經驗進行建築，也就是利用從環境中直接輸入$\triangle_1$的資訊來建築；檢驗的方式是實驗，實驗的進行依據的是事前的假設與預測。利用探索、想像、直觀等方式進行創造性的建築，所得的新觀念，必須與旣有的知識取得一致，所以要檢驗的是內在已有的知識與新創的概念間的一致性。

利用上述這六種建築與檢驗的方式，來描述智慧的功用；可以普遍地推廣至各種知識的學習。它不僅可以應用在數學的學習上，同時也可以應用在自然學科、語言及日常生活中普通常識的學習。

貳、何謂良好的教學

因爲數學的概念與知識都是經過一再的抽象化後才得到的，具有高度的濃縮性，所以我說過數學的學習是智慧作用的一個重要特例。因爲數學的抽象、濃縮性以及應用時特別有效力等等特性，所以數學的學習特別有問題。除非我們能提供良好的教學，否則學習問題就無法解決。

所謂良好的教學，就是要幫助學習者自己發揮他們的$\triangle_2$的作用，讓$\triangle_2$的作用順利進行，當然這不是說老師要取代他們的$\triangle_2$的作用。

學習者最需要的幫助，就是要老師提供他們好好利用上述六種建築與檢驗的方式來學習的機會，而不是只能透過差勁的溝通來學習。一般老師對學生的單向溝通，往往只告訴學生一些規則，而不說明為什麼。

等一下時間允許的話，我想介紹一些我們設計的學習活動的例子，讓我們來看看學生們是如何透過這六種方式來進行他們的學習。

我們在英國的研究計畫的目標，就是要設計學習活動，提供學生透過六種方式來學習每一個數學概念的機會。

参、認知圖的本質

比介紹學習活動更要緊的是，認知圖的本質的精密檢驗。首先讓我們把認知圖看成是我們對外在世界經驗的智力模式。

哲學家Heraclitus 曾說過：“我們不可能以完全一樣的方式踏入同一河流兩次”。現在的經驗中的一部分有時會學起來，那就成為過去的一部分，完全一樣的經驗是不可能再重複經歷的。我們可以利用過去所學的知識來預測一些未來可能發生的情況，然後將這些情況擺在眼前來思考。因此，一個有用的智力模式，模式本身就要能表現過去許多經驗的共通性；使我們在將來，也還能辨認這些共通性；模式並不是要把千萬種個別的事件一一獨立地表現出來。過去經驗的共通性的智慧表現，就是我所謂的**概念**；概念的形成過程，通常以術語**抽象化**來表示。

概念並不是表示孤立的經驗，而是各個孤立經驗抽象化後的**常規**（regularity）。因為我們所處的環境，並非是變化多端，反覆無常的，而是相當有秩序的，所以任何一種學習都有可能達成。

智慧式的學習就是要去發現這些常規，然後把這些常規組織起來成為**概念結構**（conceptual structures），概念之間有次序並且有層次。這些概念結構，也就是Schema，跟認知圖很像，只是更大更複雜而已。

我們可以把概念結構看成是認知圖族（cognitive atlases）；先打個比方來說明它的特性，在我前來亞洲前，台北市對我而言只是世界地圖上的一個大點而已，等我到了台北市，台北這個點對我就漸漸擴張成一張台北市的街道圖，圖中師大分部是一個大

的點；師大分部這個點又可擴張成師大分部的校園圖，其中我們現在的演講廳B 101室又是一個大點；B 101室這個點又可擴張成這演講廳的立體建築圖。換句話說，概念結構，或 Schema ，也跟認知圖一樣，不過圖中的點都具有**內部可擴張性**（interiority ）。這種 Schemas 就是$\triangle_1$ 這系統的智力模式，這是一種非常有效力的儲藏與組織資訊的方式。它可以提供足夠多的資料，讓我們的意識，對於各種特定的作業都知道如何產生對策。

這種更一般化而且更抽象的認知圖，從現在起我將以術語 Schema 來稱呼它。爲了避免混淆，我想先說明一下， Schema 這術語最先是由英國劍橋大學的心理學教授 Bartlett 引進心理學的；皮亞傑及其著作的翻譯者也使用 Schema 這術語，不過涵義跟我現在用的不一樣。

肆、數學的Schema

數學的概念結構就是這種Schema 。每一樣數學知識，我們一方面可以將其擴張來看它的內部結構，另一方面也可以將其濃縮成一個點，使它成爲大的數學結構內的一個點。這是特別抽象的一種 Schema 。

進一步談數學的 Schema 之前，我們先區分兩種建構知識的方式。

第一種方式，是我們直接從實驗經驗中形成概念。比如說，觀察蝴蝶的外觀，可以歸納出很多不同類的蝴蝶。此種概念，小孩子透過實際的經驗就可以學會，所以比較簡單。像我的小孩，當他 10 歲的時候，就能告訴我各種不同的摩托車。直接從實際經驗習得的概念，我們稱它爲初級概念（ primary concept ）。

第二種方式，像數學知識，是從初級概念中找出其共通性，形成第二層次的概念（2 nd order concept ），再從第二層次概念的共通性形成第三層次的觀念，繼續抽象化，而得各個層次的概念。

數學概念不只是我們的實際經驗經過一次抽象化就形成的初級概念，往往是好幾層的抽象化才形成，這就是爲什麼數學的 Schema 特別地抽象的道理，同時數學概念間也具有**層次**（ hierarchy ）。

伍、數學的學習

在第一天的演講（註：十一月十五日）裏，記得我曾說過，要瞭解一件新的事物，就是要把它跟一個既有且適當的Schema連接起來。

以數學的學習爲例，這就是說要獲得一個新概念，學習者的心中應該已經瞭解跟這概念有關且較低層次的概念了，如此適當的Schema才存在。

如果有些相關且較低層次的概念還不瞭解，那麼就找不到可以跟要學的新概念連接的Schema，而關係性的瞭解（relational understanding）自然就無法達成。學習者對此新概念最多只能達成機械性的瞭解（instrumental understanding）。

我們當老師的工作，就是要避免學生發生這種掛不上勾的情形。

要保證學生學習數學時不會產生此種斷層現象，當然不只是親自到教室上課的老師的責任而已，另外像課程研究委員、教科書的編者，設計學習活動的教育工作者都有責任。爲了避免學生學習新概念時，有脫層現象，我們需要很仔細地分析各個槪念之間的內在相關性，亦即給定一概念，要分析它跟那些較低層次的概念有關，這件工作是很繁重的。

概念間內在相關性分析的結果，稱爲**相關性網路**（dependency network）；由於此關係是一種偏序（partially ordered）關係，所以也叫做**偏序Schema**。

如果我們要設計一連串的數學學習活動，想知道活動與活動間如何連接，或者想瞭解學生學習前所具有的預備知識，那麼概念的相關性分析的結果，是一分不可或缺的資料。

例如，位值概念的相關性網路，就如投影片所示（註：沒有記錄，無法翻譯），需要從分類（sorting）與集合（set）學起，然後往上抽象化而得此複雜的表，如果我們期望學生對位值的概念達成關係性的瞭解，此表是必需的參考資料。

目前我所從事的研究中，欲將小學數學的每一概念都建立起它的相關性網路，這工作讓我對小學數學概念的複雜性大開眼界。

我進一步想知道的是：

(1) 數學是既難又抽象的知識，我們希望小孩子學的是什麼？

(2) 如果有良好的教學，小孩子能學的又是什麼？

陸、數學學習活動的實例

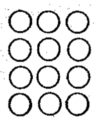
以下的學習活動實例，是星期一（十一月十四日）早上在台北市幸安國小進行的。參加的學生有8人，從六年級某班徵求自願參加的學生8名，4男4女。

活動進行時將學生兩兩配隊，兩隊一組共兩組，同一組圍坐在一起。開始時，我坐到某一組的桌邊，要另一組的同學圍站在此組同學的旁邊，然後開始解釋活動的進行方式。此次的教學活動有兩個，兩活動間有連貫性，使用的教學媒體都是一種圓形算子，就像小型的圍棋子一樣。

第一個活動：

師（指SKEMP，以下同）：同學們，這些算子每一個都代表一個點，它們可以在桌面上自由移動，很方便。當然也可以用筆在紙上畫點，不過這就需要擦來擦去，反而不方便。

1.° 師問：這是什麼圖形？



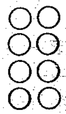
生答：長方形。

師問：有多少個點？

生答：12個。

師說：我們就稱12是一個長方形數。

2.° 師問：這是什麼圖形？



生答：長方形。

師問：有多少個點？

生答：8個。

師說：所以8也是一個長方形數。

3.° 師問：你們能不能告訴我另一個長方形數？

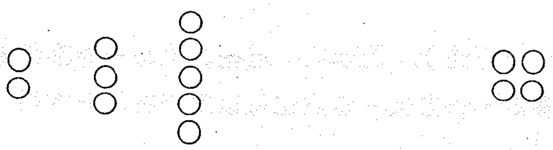
生答：15。

師問：你們對什麼是長方形數知道了嗎？需不需要我再給一些例子？

通常學生很快就會獲得長方形數的概念，如有需要還可以再給幾個例子。

4° 師說：現在我們都知道什麼是長方形數了。我給你們每隊 25 個算子，請每隊將 1 到 25 中的所有長方形數列出，寫在紙上。

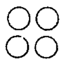
說明：從老師給的少數例子中，學生已發現了關於長方形數的共通性，而建立了長方形數的概念。他們利用老師給的 25 個算子，自己正在進行探索（ extrapolation ），準備建構更多的長方形數。探索的過程還相當依賴實際的經驗，可以把算子排看看以確定某數是否爲長方形數。同時，因爲是兩人一起列出一張答案，所以列答案時，同隊的兩人需要一再討論，比如說：2、3、5 這些數，用算子排出來，圖形如下：



它們是不是長方形數呢？

還有，4 是不是長方形數呢？

這些討論，很容易可以觀察得到。

5° 當 4 隊都決定好他們的答案之後，老師要同一組的兩隊一起對照他們所列的長方形數。這時，他們在**檢驗**他們自己建構的知識。如果兩隊的答案有些不一樣，比如說，有一隊列出除了 1 以外的所有數，從 2 到 25 ；有一隊沒列出 4 ， 9 和 16 ，有一隊則列了。此時，他們隊與隊之間還需**討論**，這是學生與學生的討論。有時像 4 到底是不是長方形數，同學們委決不下，有的說  是正方形不是長方形，有的說也是長方形，這時就需要**跟老師討論**來**檢驗**了。老師以適當的說法讓同學同意 4 是長方形數。當同學們在討論某數是否爲長方形數時，一方面還可進行實際**實驗**來**檢驗**。

根據我在Warwick 大學教書的經驗，我的學生一直都感覺從他們同儕間的討論所獲得的知識，絕不比從我的演講裏學的少。我本人也常常跟同事一起討論來學習。

第二個活動：

開始說明時，我只對一個學生說明，其餘同學圍在旁邊聽。

師說：我們來玩一種遊戲，如果你能用這些算子（ 6個 ）排出一個長方形，你就可得1分。排看看。

生排出：
○○
○○
○○

師說：好，你得一分，記下來。現在換你給我一些算子，如果我可以用它們排出一個長方形，我就得1分，否則你得1分。

生給師5個算子。

師說：雖然我是一個教授，可是我也沒有辦法排出5個點的長方形。你很聰明，又得1分了。你已經得了2分，我還沒得分呢！

說明：當學生給我5個算子時，事前他已作了**預測**，即5不是一個長方形數。另外，一般的教學，有種錯誤的觀念，好像因爲老師比較聰明，所以負起教的責任；反之，學生好像是比較笨，所以才需要學。事實不然，只是學有先後而已，弟子不必不如師。爲了糾正此種錯誤的觀念，我特別告訴學生，他很聰明，事實上也如此。

遊戲繼續進行，還有一個規則。

師，給出12個算子後，說：現在如果你可以排出一個長方形，你可得1分，但是如果我也能再排出另一個長方形，那麼我也可得1分。

生排出：
○○○○○○
○○○○○○

師說：很好，你得1分，共3分。

師接著將它改排成下圖：

○○
○○
○○
○○
○○
○○

師問：你同不同意我也得1分？

此時，需要討論有些同學會同意我得 1 分，通常總有學生說兩個長方形只是旋轉一下就一樣，不能算是兩個長方形，不同意我得分。如果沒有同學看出這點，就需由老師說明了。

師，將 12 個算子排成 3 × 4 的長方形後，同學同意我得 1 分。

到此，我只得 1 分，同學共得了 3 分。

如此，遊戲規則說明完畢，每隊拿走 25 個算子自行玩去了。

在上面這兩個教學活動中，我們看到學生們一直在討論，討論的內涵都是數學的。比如說，學生們討論 ○○ ○○ 是否為長方形時，他們所談的不只是實際的操作，而是已相當抽象化的概念，已觸及正方形是不是長方形的分類問題。另一個例子，像 ○ ○ ○ 是不是長方形的討論，通常我會提醒小朋友每個算子是一個**點**，你認為 • • • 是不是一個長方形，小朋友馬上就接受這不是。

星期一，我很高興有機會跟 8 位中國小孩玩這些遊戲。我發現，中國小孩跟美國、英國、南非、加拿大的小孩都一樣，很喜歡這些遊戲。小孩就是小孩，凡是遊戲都喜歡。

星期三（十一月十六日），我又跟這 8 位小朋友在板橋教師研習中心，玩另外接續的三個學習活動，旁邊有 30 位師專的教授在參觀。對我而言，這是很大的冒險，因為我不知道小孩子們會不會專心地進行學習活動。還好，當小朋友進行智慧式的學習時，他們毫不在乎旁邊有人在參觀，活動進行的非常順利。

對老師而言，此類學習活動，事前準備的工作較多，不過比起直接的師對生的溝通方式，學習效果是不能相提並論的。