關係性的瞭解與機械性的瞭解

(二)

日　期：民國七十二年十一月十七日
翻　譯：呂溪木（國立臺灣師範大學數學研究所）

Faux Amis

“ Faux Amis ”是法國人用來敍述在兩種語言中，字形相同但字義不同的一些字的名詞。從世界上不同地區所使用的英語之間，我們可以看到“ Faux Amis ”。英國人所謂的“ biscuit ”是美國人的“ cookie ”，而美國人所謂的“ biscuit ”是英國人的“ scone ”。一個人若不察覺他所使用的字是一個“ Faux Amis ”，他可能會造成很多不方便與錯誤。然而，如果在同一種語言、同一個國家、同一種內涵中使用一個具有兩種顯然不同的意義的字時，那麼我們可以預期很嚴重的混淆。

在數學裏我們也可找出這樣的兩個“ Faux Amis ”，而且附在每個字上有很多不同的意義。我們相信這些不同的意義就是造成今日數學教育的很多困難的根源。

這兩個字之中的一個就是“ 瞭解 ”。幾年前，Bergen 大學的 Stieg Mellin-Olsen 教授提醒我注意到這個字的兩種不同的意義。他把它們區分為“ 關係性的瞭解（ relational understanding ）”以及“ 機械性的瞭解（ instrumental understanding ）”。前者是本人，也是多數讀者，所指的“ 瞭解 ”，即“ 知其然且知其所以然 ”；而後者，在此之前我根本都不認為它是“ 瞭解 ”，它是我在過去所謂的“ 毫無理由的規則 ”。我竟未意識到有很多學生以及教師擁有這些“ 毫無理由的規則 ”並能使用它們，而這就是他們所謂的“ 瞭解 ”。

假使一位老師提醒班上的學生說：「長方形的面積等於長乘以寬，即 $A = L \times B$ 」，一名學生因為當時不在場而不瞭解，老師就按剛才的說法又給這名學生解釋道：「這個公式，$A = L \times B$，告訴你，用長方形的長乘以寬就得到它的面積。」學生說：「哦

！我明白了」，並開始做習題。倘若我們向這名學生說：「你以為你已經瞭解了，其實不然！」，他將很不以為然地說：「我當然瞭解囉！你瞧！我的答案全都對啊！」，他也將對於我們貶低他的學習成就感到不高興。以他對於“瞭解”的看法，他認為他已經瞭解了。

我們都能想出很多這種例子：把退位減法想成 借1當做10”；把分數的除法想成“顛倒相乘”；把等量加法公理看做“移項後變號”。我們也可以從被廣為採用的教科書中找到很多其他“機械性解釋”的例子。這裏有兩個例子是從一所很有水準的學校所採用的教科書中找出來的：

分數的乘法：兩分數相乘時，以分子的乘積為分子；以分母的乘積為分母。例如：

$$\frac{4}{5}\text{的}\frac{2}{3}=\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{4\times 2}{3\times 5}=\frac{8}{15}\ ;$$

碰到“$\frac{4}{5}$的$\frac{2}{3}$”這樣的情形時就把其中的“的”用乘號“×”代替它。

圓：圓周大約等於它的直徑的3倍。任意圓的周長約等於它的直徑乘以3.1416，或大約等於直徑乘以$3\frac{1}{7}$。3.1416，$3\frac{1}{7}$ 這些都不是眞確值，它的眞確值不能表成分數或小數，而以希臘字母π來表示。例如：

圓周$=\pi d$ 或 $2\pi r$

面積$=\pi r^2$

我們敦促讀者試著從各種教科書或教學當中找出“機械性解釋”的例子。這樣做有三點好處：

(1) 像我本人，或大部分的讀者，可能都難以相信廣泛存在著機械性的方法；

(2) 重複的例子有助於強化“機械性的瞭解”與“關係性的瞭解”這兩種對立的概念；

(3) 它是我們將來對這兩種概念作一般性區分的好準備。

如果我們同意學生和老師當中，他們的目標可以區分成“關係性的瞭解”與“機械性的瞭解”等兩類的話，那麼我們就會提出下列兩個問題：第一、這樣有什麼關係呢？第二、那一類的比較好呢？多年來，我本人一直毫不加思索的對這兩個問題有簡明扼要的答案：不錯！有很重大的關係，而且“關係性的瞭解”當然比“機械性的瞭解”好。

然而，在反對的陣容裏居然有很多有經驗的教師以及暢銷的教科書，迫使我懷疑自己爲什麼持這種觀點？就這樣，在我從直覺反應轉變成思索判斷的過程中，我學到很有用的東西。

上面所提出的這兩個問題並不是完全獨立的，但在這段裏我將盡可能集中探討第一個問題：這樣有什麼關係呢？這裏的問題就出在錯誤的“搭配”。只要有“Faux Amis”的情形，就會很自然的形成錯誤的“搭配”，而且這和甲或乙的意義中那一個是正確的角色無關。假想：甲校派一個球隊到乙校比賽“足球”，但兩隊都不知道有兩種不同的“足球”，一種是“足球”(soccer)，另一種是“橄欖球”(rugby)。甲校玩的是足球而從未聽過橄欖球；乙隊玩的是橄欖球却從未聽過足球。當球隊開始比賽後，每隊很快就認爲對方若不是發瘋了便是有很多犯規的球員。甲隊認爲乙隊使用形式不當而兩頭“尖銳”的球，並且屢屢犯規抱著球走。除非兩隊都停下來談談到底他們在進行那一種比賽，互相溝通，否則比賽會不歡而散，而每隊都將發誓再也不跟對方比賽了。

雖然很難想像這種情形會發生在足球賽中，但是把它作爲今日數學課中所發生的種種現象的比擬却一點都不牽強。在數學課中和比賽足球之間有一個很重要的區別，那就是在數學課中，其中的一方不能拒絕“比賽”，它所牽涉到的學生是強迫性的，每週五天，每年三十六週，超過十年或整個童年，他們都得參加“比賽”。

在數學課中有兩種錯誤的“搭配”可能發生：

1. 以機械性瞭解爲目標的學生受教於想要完成關係性教學的老師；
2. 以關係性瞭解爲目標的學生受教於使用機械性教學的老師。

第一種錯誤的搭配會造成學生較少且較短期的困擾，但將使老師心灰意冷。學生對於老師仔細的解說以及爲他們將來學習所作的準備硬是不加理會，他們所要求的只是一些能立即得到答案的規則。一旦他們取得了這些規則，他們就馬上把學習之窗關上，再也不關心其他的了。如果老師問了一個不能套用那些規則以求得答案的問題，他們就會答錯。下面這個例子是在Coventry 教育學院作教學實習的一位學生Peter Burney先生所提供的：

當他在教面積時，他懷疑學生根本不瞭解他們自己在做什麼，所以他就問學生：「一塊寬20公分，長15碼的場地的面積是多少？」得到的回答是：「300平方公分！」。他問：「爲什麼不是300平方碼呢？」，回答的是：「因爲面積的後面經常都是平方公分啊！」。

以上是機械性教學所產生的典型例子。如果要防範學生犯如此的錯誤，那麼就必須

再告訴學生一些新的規則：求面積的時候，兩個向度的單位都要一樣。如此，一個規則之後，又加上另一個規則。這將是我要用來攻擊機械性瞭解的例證之一：它牽涉到一大堆零碎的規則而不是少數具有一般性的原理。

老師想說服學生，只記憶一些零碎的規則是不夠的這件事情，是很難的。大多數的學生都無法接受。俗語說：「很好是比較好的敵人」，如果學生能用慣用的想法、零碎的規則而得到答案，他們就不認爲應該嚐試其他更一般性的方法。然而，在學生當中，當然會有一些願意跟隨老師的做法的學生。我認爲只憑這一點，老師就應該試一試讓學生做到關係性的瞭解。

第二種錯誤的搭配就是學生試著要做到關係性的瞭解而老師使他不可能。這是更具傷害性的一種。在我的記憶中有一個例子。鄰居的小孩，當時七歲，是很聰明的小男孩，他的 I.Q. 是140。他在五歲時就能閱讀時代雜誌，但到了七歲時却經常爲數學作業所困而痛哭流涕。他的不幸際遇是由於他想做到關係性的瞭解而老師的教法却不然。我之所以如此想是有證據的。當我親自用關係性的方法並配合數學積木作爲教具來教他時，他就很輕鬆愉快的迎頭趕上了。

一個比較不明顯的錯誤搭配是發生在教師與教科書之間。假設有一位老師對於瞭解的概念是屬於機械性的，而因爲某種原因却採用了一本以提供學生關係性瞭解爲目標的教科書。要改變一位教師的教學形態並非易事。過去我曾經訪問過一所採用我所寫的教科書的學校，我注意到有些學生把一個問題的答案寫成

{所有花}的集合

當我把這件事告訴這位任課老師時，他要全班的學生注意，並說：「你們之中，有些人的答案寫的不正確，要注意看這個習題面前那個例子，並確實的把你的答案寫成跟它的一模一樣。

在課程改革聲中多數名爲“近代數學”的課程，只是換湯不換藥，以新的教材細目取代了原來的細目罷了，其教學仍然與過去一樣是機械性的。這種情形是可以預期的，因爲我們難以調適並重新組織已經存在的認知基模（ schema ）。如此一來，由於課程革新而引起的教師與教材目標之間的錯誤搭配使得課程改革的弊多於利。在教材中引進集合、函數、變數這些概念的原因是它們有助於關係性的瞭解。如果學生仍然受教於機械性的教法，那麼傳統的教材細目可能對他們更有裨益。至少他們可獲得一些熟練的數學技巧以爲日後之用，而最近很多科學教師與顧主所抱怨的正是學生普遍缺乏這些熟練的技巧。

在開始的時候，我說在數學裏我們可以找到兩個“ Faux Amis ”，前面我們已討論了一個，即“瞭解”。第二個更嚴重，它就是“數學”這個字。我們所討論的往往不是同一種“數學”教學的好壞。這樣想比較容易明白，正如我們在前所假想的足球賽，球員們並不瞭解對方所玩的是一種不同的比賽，却認爲對方因爲不善於盤球所以才把球抱著走，又使用兩頭呈尖形的球。在這種情形之下，他們或許就沒有興趣再跟對方比賽下去了，而寧願送給對方一個好球並給對方好好上一節盤球課。

我從前以爲所有的數學教師都在教同一種主題，只是有些人教的好些而有些人教的差些而已。我花了很多功夫才發現情形並非如此。我現在相信同樣在“數學”的名下，所教的是兩種截然不同的東西。果眞如此，那麼這種差異遠超過廣受爭論的教材細目的差異。因此，我想再以一個比擬來強調這一點。

假想我們要兩群小朋友學音樂。同樣教他們五線譜、高音部記號、音符、……等等，如你願意可把它們叫做“音樂九九表”。有一群小孩只有這種方式的學習而沒有別的活動配合。假如他們每週五天，每天上一節如此的音樂課，那麼一個學期下來他們或許能寫出諸如“兩隻老虎”這樣簡單的樂譜，指出帶拍與鍵名，甚至於把C調變爲A調。但是，他們會發現這些都是很索然無味的，有很多規則要背，而難以譜出一曲簡單的伴奏。他們將立即放棄學習，並永遠厭惡它。

對於另一群小朋友，以聲音配合紙上的音符敎他們。開始的幾年他們以簡單的樂器產生聲音，久而久之，當他們看到紙上的音符就能想像它的聲音、節拍、音調、……等等。如此一來，需要記憶的東西很少，必須記憶的都以整體的方式呈現在一首歌曲當中，容易牢記於心。譜一曲簡單的伴奏都是他們能力所及的。這群小朋友內心都感到這樣的學習很愉快，並且願意繼續學下去。

爲了目前的目的，我發明了兩種不存在的“音樂課”。但是，這兩種想像的活動之間的差別並不會大於兩種同樣以數學爲名的教學活動之間的差別。

以上的比擬顯然過於偏袒關係性的數學（ relational mathematics ），但這却反應出我個人的觀點。我把它叫做觀點，這表示我已不再認爲它是不需證明而能自明的眞理了。如果還有很多有經驗的教師繼續在教機械性的數學，那麼我的觀點怎麼可能是不需證明而能自明的眞理呢？下一個步驟就要試著盡可能淸楚的、公平的來討論這個觀點的特質，尤其更要討論與自己所持對立的觀點。這就是下一節爲什麼叫做“魔鬼的辯護者”的原因。如此一來，一方面淸楚的敍述了對方機械性瞭解的主張，另一方面也使自己關係性瞭解的主張得到肯定。弄淸楚想像中對立一方的想法是使自己明白爲什麼持

有不同想法的好辦法！

魔鬼的辯護者

既然有這麼多教師在教機械性的數學，莫非它眞有很多優點？我已能想出它的三個優點：

1. 在數學本身的內容當中，機械性的數學比關係性的數學容易得多。例如，分數除以分數時，把除數的分子和分母顚倒之後再相乘；負數乘以負數時，把它們都當成正數再相乘，像這些機械性的規則易於記憶却不易於關係性的瞭解。如果我們所要的是一整頁正確的答案，那麼機械性的數學能更迅速的提供。

2. 機械性的數學能得到立竿見影的效果。學生能得一紙正確的答案是好事，他們的成就感也很重要。最近我訪問了一所學校，某些學生把自己說成是“笨蛋”，老師也用“笨蛋”這個名詞。這些小孩確實需要成功的經驗來恢復他們的自信心，而機械性的數學比關係性的數學更容易，也更快達成這個目標。

3. 正因爲機械性的想法所牽涉到的知識較少，它往往比關係性的想法更快得到正確的答案。這種差異該是夠明顯的，因爲即使是“關係性的數學家”也常常用機械性的想法求出問題的解答。

以上所列出的可能未能包含機械性數學應有的優點，我將樂於知道更多的其他優點。

關係性的數學至少有四個優點：

1. 它更能適應新的課題。最近，當我在幫助一個小男孩學習數學時，我發現他過去所學得的兩位小數相乘的方法是先將小數點去掉，以一般的整數的乘法求出乘積之後再點出小數點，使小數的位數等於乘數和被乘數的小數位數的和。如果知道這種方法的道理，它倒是很方便的方法。然而，他並不懂這種乘法的道理，而却把它應用到小數的除法上面。因此，他得到

$$4.8 \div 0.6 = 0.08$$

的錯誤結果。這個小孩也學到，已知三角形的兩個內角，可以用 180° 減去這兩個內角而求出第三個內角。他把同樣的方法應用於求外角上，而把接著的五個題目全都做錯了。我並不認爲他犯了這兩個錯誤是他的愚昧，他只是把他所知道的推廣而已。但關係性的瞭解，對於某一種方法不但知其然而且知其所以然，應能使他將方法與問題連結起來

，並應用於新的問題上，機械性的瞭解必須記憶某些方法可以解決某些問題，也必須爲新的問題學得新的方法。因此，關係性數學的這個優點導致另一個優點如下：

2. 它易於記憶。我們說它難於學得而却易於記憶，似乎是互相矛盾的。當然，像

$$三角形的面積 = \frac{1}{2} \times (底 \times 高)$$

這樣的事實，學生易於知其然而難於知其所以然。但以機械性的方法來求面積，學生就必須記憶很多面積的公式：三角形、矩形、平行四邊形、梯形等等的面積公式。然而關係性的瞭解能看出這些公式與矩形面積的關係。知道很多個別的公式固然是我們所希望的，然而知道它們之間如何關連在一起能幫助我們以整體的一部記住它們。對於一個問題，除了它的結果之外，尚有很多需要學習，如個別的公式、相互間的關連等等。一旦整體學得之後，就可以記得很久，很少需要重新再學習。因此，長久而言，所費的總時間可能更少。關係性的瞭解也可能牽涉到實際的內容。稍早，我們利用

$$圓周 = \pi d$$

說明機械性的解釋。對於這個問題，關係性的瞭解必須先教比或比例，而教這些概念更費時。但基於比或比例的應用很廣，却也值得教學。在關係性的數學中，這種情形經常發生。對於某一主題的關係性瞭解所需要的概念在其他很多方面也需要，如集合、函數、等價關係。很不幸的，可能從這些概念的教學中所獲得的很多益處却因爲在教學時把這些概念視爲獨立的而給煙沒了。

3. 關係性的知識本身就是一個有效的目標。這是實徵性的事實，見證於以非數學教材所做的實驗結果。它對於外界的獎懲的需要感大大的減小，這讓教師在引起動機方面的工作更容易。這也和下面的這一項有關係：

4. 關係性的基模在本質上是有機體，它會不斷的長大。如果人們從關係性的瞭解得到了滿足，那麼他們不但將主動的探究新的事物，就好像樹根或動物不斷的拓展新的領域以吸取更多的營養一樣。

理論的形成

在一個複雜的情況中導引自己的行動以及把自己努力的結果和別人的協調起來成爲一種理論，沒有任何東西比這些事更具威力的了。所有的好老師都建立起他們自己實徵性知識的寶庫，並從這些實徵性的知識抽取他們可依賴的一般指導原則。但當他們的知

識仍然停留在個人直觀程度的形式時，就無法與別人交換意見並分享共同的概念以資建立概念的結構（基模）（ conceptual struture （ schema ））。假如它是可能的話，那麼個別的努力成果將可整合成一體的知識以供新踏進這個行業的人之用。然而，目前多數的教師却必須從他們自己的錯誤中學習。兩種不同的學習導致關係性以及機械性數學的差異，儘管我個人相信這種差異是很重要的一種，而很多和我討論過的人也持相同的看法，却有一段很長的時間我自己對於這種差異的瞭解也是停留在直觀的程度。當我意識到有把這種差異顯現成一種理論形式的必要時，這迫使我進行兩個平行的研究計畫；而理論的內涵是在最近的一個研討會當中突然得到的。一旦看出它的內涵，整個理論顯得很單純，不禁讓人覺得奇怪爲什麼以前沒想到這一點？但是，有兩種單純性：一種是自然而天眞的單純性；另一種是穿透了表面所呈現的差異而由統合所帶來的單純性。一個好的理論必須提供的是第二種的單純性，這也是比較難以獲得的一種。

我們有必要從一個具體的例子開始。當我第一次住進了某一個城鎭時，我很快的學到了很多路線。我學到了我住的地方和同事的辦公室之間的路線；我住的地方和大學餐廳之間的路線；朋友的辦公室和餐廳之間的路線；還有另外兩三條其他的路線。簡單而言，我學到了有限個固定的策略使我能從一個特別的地點出發抵達一個特定的目的地。

一旦有了空閒的時間，我就開始探險這個城鎭。現在我並沒有特定的目的地，而只想認識週遭的環境，要看看可以遇到些什麼有趣的事物。在這個階段我有個不同的目標：在我的心中建立起這個城鎭的認知圖（ cognitive map ）。

以上這兩種行動頗有差異，然而旁觀者是很難以區別它們的。任何人看我從甲地走到乙地，他若不問我，是很難以知道我正在從事的是那一種活動的。一種活動最重要的是它的目標。在第一種情形中我的目標是乙地；在第二種情形中我的目標是擴大並增強我對這個城鎭的心智圖（ mental map ），它是知識的一種狀態。

一個擁有一組固定策略的人可以找到從一組出發點到另一組目的地的路線。策略的特質是它告訴他在選擇地點（ choice point ）時應如何做：出門後右轉，直走經過教堂，……等等。但是假使他在任何階段弄錯了，他將迷失方向；而且假使他無法找到原路回到正確的路線，他將繼續迷失方向。

相反的，一個具有這個城鎭的心智圖的人，若有需要，他可從這城鎭的心智圖製造出幾乎無限多的路線以引導他從任何一個出發點到任何一個終點，只要這些出發點和終點可從他的心智圖中想像出來。如果他轉錯了一個彎，他仍然知道他所處的位置，並能矯正他的錯誤而不致於迷失方向；甚至可能從錯誤中學習。

以上所說的和數學的學習是很相近的類比。導致機械性數學的那種學習是由不斷增加的固定策略學習所組成的，學生們利用那些策略可從特定的出發點（已知資料）找到終點（答案）。正如具體的例子一樣，這些策略告訴他們在選擇地點時應如何做，而且下一步必須做什麼純粹取決於局部的情況（當你看到郵局時左轉；當你把括號去掉之後就集項）。沒有意識到每一個階段與最終目標之間的全盤關係。在這兩種情形當中，學習者都依賴外在的引導以學到每一個新的“抵達目的地的路線”。

相反的，學習關係性的數學是由建造概念結構（基模）（ conceptual struture （ schema ））所組成的，它的擁有者能（原則上）從它製造出無限多的策略引導他從他的基模中的任何出發點抵達終點（我說“原則上”當然是因為某些路線比其他的路線難以建立）。

上面這種學習與機械性的學習有數種不同：

1. 方法與所要抵達的特定目的地是互相獨立的。

2. 在某一給定的知識領域內建立起一個基模變成是一個內在自足的目標。

3. 學生的基模愈完整，他愈有自信找到新的“抵達目的地”的路線而不必外來的幫助。

4. 但是，基模永遠不完整。當我們的基模加大時，我們所意識到的可能性也隨著加大。因此，這種過程常常是自給自足的。

暫且再扮演魔鬼的辯護者的角色，請問我們到底是在談實質上兩種不同的主題：關係性的數學以及機械性的數學，或只是對於同一個主題的兩種不同的想法？具體的類比中所敘述的兩個活動的過程可視為是認識城鎮的兩種不同的方法；在這種情形下，關係性與機械性瞭解之間所造成的差異勢必成立，但關係性的數學與機械性的數學之間的差異却不成立。

但是，形成數學的並非它的主題而是關於它的一種特別的知識。關係性的數學與機械性的數學的主題或許是同一個：汽車以等速度往來於兩個城鎮之間，塔的高度，自由落體，……等等。但這兩種特別知識的差異却大到讓我們可以把它們想成是不同種類的數學。如果這樣的區別能被接受的話，那麼“數學”這個字對於很多小朋友而言的確是“錯誤”的朋友，因為他們付了代價。

參考資料 （本演講稿摘錄自下文）

SKEMP, R. R. (1976), *Relational understanding and Instrumental Understanding*, Mathematics Teaching, #77, December.