計算器械——算術發展的輔助工具

趙文敏

國立臺灣師範大學數學系

自古以來，數值計算的工作，一直是令人厭煩却又無法避免的苦差事。為了減低這項工作的枯燥與繁雜，人類除了在計算方法上力求簡化之外，設計適當的計算器械來做為輔助工具，也是數學發展史上很重要的一項成就。

在現代記數方法尚未完成之前，古老的各種記數方法大都不適合於計算，而且像紙等較方便的書寫工具又是晚期的發明（中國的紙是東漢和帝元興元年（西元 105 年）宦官蔡倫所發明的，西元八世紀傳入阿拉伯，十二世紀才傳入歐洲），記數方法與書寫工具都不方便的情況下，利用其他工具來進行計算，是很必然的現象。

歐洲文藝復興以後，學術更為進步，工商業更為發達，所需的計算也更為精密與繁複，為節省時間與減少錯誤，設計快速而精確的計算器械，更成為人類努力的目標之一。經過數百年的努力，人類終於有了輝煌的成果——發明了電子計算機。

在計算器械漫長的演進史中，有過各種不同的嘗試與努力，其中有些成果目前都還有人使用（像中國的算盤）。本文的目的，就是要介紹人類史上較具價值的計算器械，以提供給有興趣者做為參考。

談到計算器械，我們可以分成下面五類：

(1) 放置式算器；

(2) 移動式算器；

(3) 刻度式算器；

(4) 機械式算器；

(5) 電子化算器。

前面所分成的五類，只是就計算器械的形式大略地加以區分，至於其實際的意義，本文將分

別加以說明。

在討論有關計算器械的主題之前，我們把abacus 這個字的意義稍加說明。abacus 現代的意思是指西洋人教小孩計算用的珠串，或是指東方的算盤。不過，這個字源自希臘文的$\alpha\beta\alpha\xi$(abax)，其意義却是塵土（ dust），所以，後世以爲abacus最早的意義可能專指古代用來計算用的沙盤。

甲、放置式算器

我們所說的放置式算器，乃是指在一個畫上線條的平板上，適當放置小石子、珠子、圓片、籌碼、竹片、木片等，以表示數値的計算器械。在這類放置式算器上，通常都劃定不同的區域來表示不同的“單位”，例如，某一條線代表一，鄰近的一條線代表十，再下一條線代表百，等等；在代表十的線上放置三個籌碼，就表示30 ；在代表百的線上放置五個籌碼，就代表500 。不過，這種放置方式，只是一個例子而已，放置式算器的表現方式，有許多不同的型態。

在古埃及人遺留下來的古物中，有些圖紋看起來就像一個放置式算器，其中以圓圈來代替籌碼。另外，希臘史學家Herodotus（紀元前五世紀）曾經說過“埃及人一面寫上字母，一面以小石子做計算，計算時手由右向左移動，而希臘人却是由左向右移動”。埃及的僧侶體文字是由右向左書寫，後世有些人認爲這種字體與埃及的算器可能有某些關聯。

巴比倫人是否使用過這種算器，後世沒有確實的考證，不過，在Iamblichus（西元四世紀）所著的De Vita Pythagorae 中，曾經提到希臘的放置式算器是Pythagoras（紀元前六世紀）所引進的，他同時暗示說，Pythagoras 對這方面的知識可能是從巴比倫學來的。另外，Radulph of Laon（西元十二世紀）也指出說，西洋文明中的放置式算器可能是巴比倫或其鄰近地區最先使用的。

至於希臘的放置式算器，後世從兩項古物中得出了一些了解。第一個是目前存放在Naples博物館的Darius vase （西元1851 年發現）。這個像鼎的瓶子，共有1.3公尺高，瓶上有二人像，其中之一表示進貢者，另一表示接受者。接受者面前有一張桌子，桌上有M X H Δ Γ O C T等字母，在古希臘的Herodianic記數系統中，這些字母依序表示一萬、一千、一百、十、五、一個obol（古希臘的銀幣）、半個obol、四分之一個obol。進貢者手上拿著一塊板，板上有T A Λ A T A : H等字母，後世認爲這是表示T A Λ A（N）T A HEKATON（ talanta hekaton ，一百個talent，即二十五個obol）。接受者的動作像是在把硬幣或籌碼投擲在桌上，整個圖案表示Darius（波斯國王，在位期間521—485B.C.)時波、希戰爭的故事。後世認爲前述的桌子就是一個放置式算器，其理由是因爲那些代表數字的字母，不過，這個算器上却沒有線條。

第二個古物稱爲Salamis abacus。這個由紀元前四世紀遺留下來的大理石算器，有1.49公尺長，0.75 公尺寬，中央部分斷裂而成兩塊，目前存放在雅典的國家博物館。由於發現的時間還在有確實歷史記錄的時代之前，所以，後世對發現的確實時間與地點都不清楚，只知道是在Salamis 島上發現的，因而稱之爲Salamis abacus 。

圖1 Darius vase

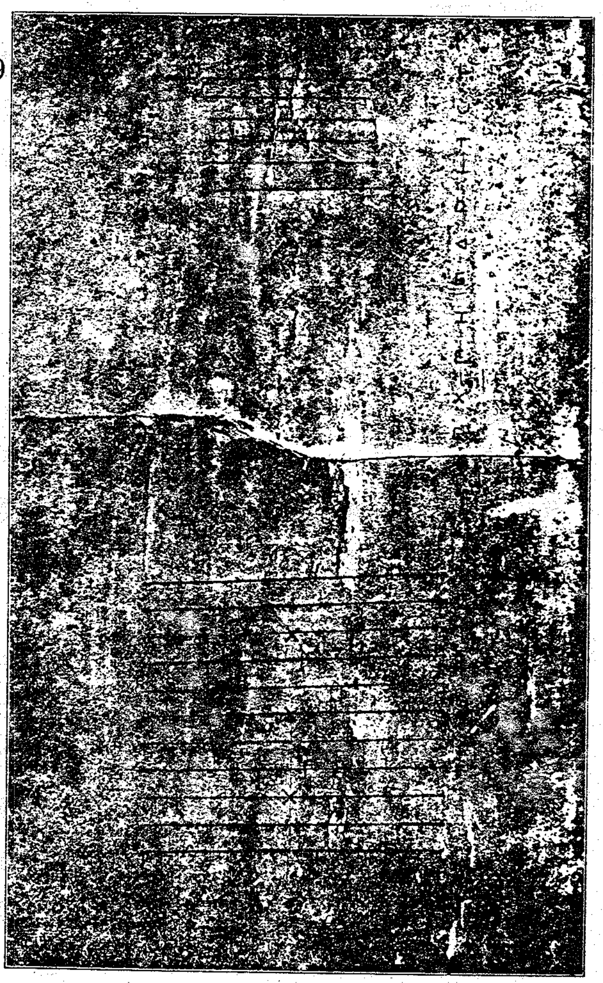


圖2 Salamis abacus

Salamis abacus 的用途，後世也不清楚。不過，這個算器確實是利用籌碼在表示數值，這一點是毫無疑問的。這塊大理石算器上刻有線條，每隔兩條線都刻有一個× 號，左、右、下三側還有希臘Attic 系統的數字記號。

羅馬人也有放置式算器，他們所用的籌碼通常是以石頭做成的，比較講究的人則使用象牙或彩色玻璃所做成的籌碼。他們把籌碼稱爲calculi(意指小石子），這個字就是後來英文中calculus與calculate 等字的起源。

羅馬人後來所使用的放置式算器，型式略有不同。在一塊平板上，刻上若干凹槽（而不是畫線條），利用可以在槽內滾動的小珠子來代替籌碼。目前大英博物館中保存有一個這種算器，上面共十九道凹槽，有四十五顆小珠子，平板係金屬製成。羅馬的Kircherian Museum也藏有一個。

西元十世紀時，Gerbert 對放置式算器有另一種構想。由於他已經了解印度—阿拉伯記數方法，在他的算器上，表示四的方法不是用四塊籌碼，而是用一塊上面標著“ 4 ”的籌碼。例如，2056708 就呈圖4的形式：

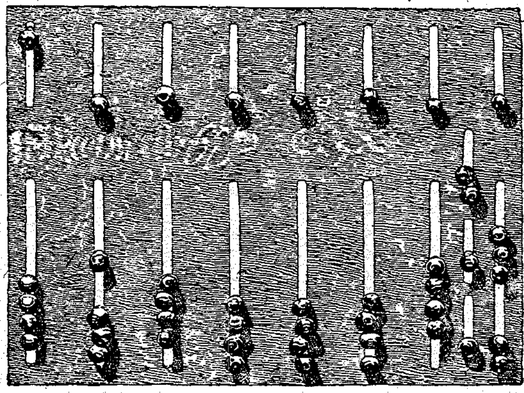


圖 3　大英博物館所藏的羅馬算器

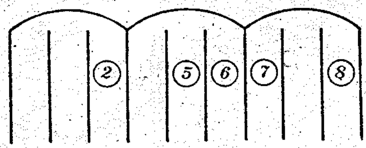


圖 4

Gerbert 從西班牙學得印度—阿拉伯數字，但當時還沒有0的記號，所以該有0的地方只空出一格。這種算器的優點是讀數時很方便，缺點是計算時要花時間找正確的籌碼。由於 Gerbert 在每三格上面用一段弧線連接，來幫助讀數，所以這種算器稱爲 arc abacus。

根據德國數學家 Jokob Köbel（1470 — 1533）在他西元1514年的著作 Rechenbiechlin 中的說法，西歐在他以前的數百年中，最常見的放置式算器是圖5這種形式：

這種算器通常是在桌面上刻下一些水平線條，最靠近使用者那條線代表一，此線上方的空白部分代表五；第二條線代表十，此線上方的空白部分代表五十；其餘仿此類推。圖6是 Köbel 之著作 Rechenbiechlin 的封面。

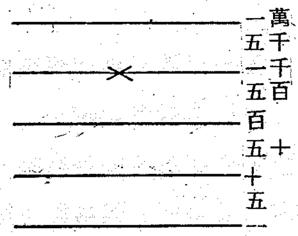


圖 5

在這種算器中，代表一、十、百、千、…的線條上最多只放四個籌碼，代表五、五十、五百、五千、…的空白部分最多只放一個籌碼。因爲當任意線條上有五個籌碼時，可以把其中一個移動（carry）到此線上方的空白部分，而另外四個則拿走。同理，當任意空白部分有兩個籌碼時，可以把其中一個移動到此空白部分上方的線上，而另一個拿走。這種做法就是“進位”的意思，由於進位的“實際”操作起源於此，所以現代英文中，進位就用 carry 這個字。

由於這種放置式算器乃是以那些水平線爲基礎，所以此種算器稱爲 line abacus。不僅如此，在這種算器上做計算，當時的歐洲人稱之爲 reckoning on the lines。會在這種算器上做計算，稱爲 knowing the lines。

這種算器上面代表千、百萬、十億、…的線上，習慣都畫了一個×號，以幫助讀數。這種做法演變成現代人寫數目時每三位一撇的撇節法。

圖 6

圖 7

此種算器何時開始出現，爲什麼羅馬人所用的放置式算器上那些鉛直線會被改成水平線，這兩個問題後世都無法找到答案。

當印度—阿拉伯數字在歐洲通行時，像現代所用的筆算方式自然跟著逐漸普遍，喜歡使用算器的人（稱爲 abacist ）與喜歡使用現代計算方式的人（稱爲 algorist ）之間，曾做了不少競賽。直到西元 1500 元左右，筆算已佔了優勢，而到了西元十八世紀，歐洲就見不到這種放置式算器了。圖 7 是近代第一部百科全書Margarita Philosophica（德國人Gregorius Reisch 所編，西元 1503 年初版，共十二册）中的一幅圖，象徵 algorist 與 abacist 的競賽。

放置式算器中，最完善精妙的應推中國的算籌，這種計算器械不僅在中國使用了將近兩千年，而且東傳高麗與日本，日本人稱之爲算木（ sangi ）。

算籌就是用來計算的一些小竹棍，也稱爲算策。用算籌來進行計算，稱爲籌算。前漢書律曆志說：「其算法用竹，徑一分，長六寸。」根據這種說法，當時的算籌，直徑是長度的六十分之一，好像太過細長，使用比較不方便。所以後來逐漸改變得較爲粗短。例如，北周甄鸞註數術記遺（東漢徐岳所撰）時，曾說：「積算，今之常算者也。長四寸，以效四時；方三分，以象三才。」隋書律曆志則說：「其算用竹，廣二分，長三寸。」

算籌是何時開始使用的呢？後世沒有確實的考證。因為竹籌容易爛掉，不能長時間在地下保存，所以在出土的古物中，都沒有發現算籌。有關算籌的使用，只能從其他方面來尋求佐證。例如，戰國時（480—222 B.C.）所用的錢幣上有算籌數字。根據這個史實，我們或許可以說在春秋戰國時代，中國人已經可以很熟練地利用算籌來進行計算了。而歷代典籍中，提到籌策者甚多，直到明朝末葉，籌策之名才不復見，因為當時的算籌已被珠算所取代。

利用算籌進行計算的方法，孫子算經對乘、除之法有詳細的解說，而開平方法、開立方法，則是九章算術少廣章中說明得較清楚。至於加、減之法，則沒有任何算書做過專題記載，可能是因為加、減法非常簡單，而且在乘、除、開方等方法中，都會使用到加、減法，所以，就不作特別說明了。

孫子算經中所列的乘法法則是這樣的：

「凡乘之法，重置其位，上下相觀。上位有十步至十，有百步至百，有千步至千。以上命下，所得之數，列於中位。言十即過，不滿自如。上位乘訖者先去之，下位乘訖者則俱退之。六不積，五不隻，上下相乘，至盡而已。」

「例題：九九八十一自相乘，得幾何？」

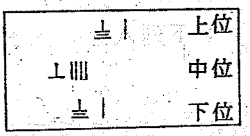
「答曰：六千五百六十一。」

「術曰：重置其位，以上八呼下八，八八六十四，即下六千四百於中位。以上八呼下一，一八如八，即於中位下八十。退下位一等，收上位八十。以上位一呼下八，一八如八，即於中位下八十。以上位一呼下位一，一一如一，即於中位下一。上下位俱收，中位即得六千五百六十一。」

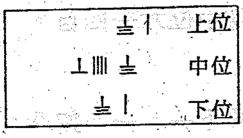
前面這段「術曰」，如果在算籌用的算盤上運作，則可以作圖示如下：

(1)重置其位，上下相觀。

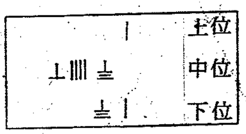
(2)以上八呼下八，八八六十四，即下六千四百於中位。



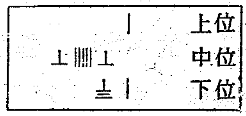
(3)以上八呼下一，一八如八，即於中位下八十。



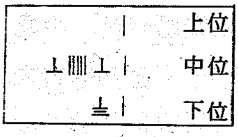
(4)退下位一等，收上位八十。



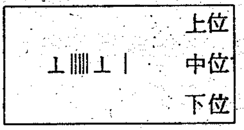
(5)以上位一呼下八，一八如八，即於中位下八十。



(6)以上位一呼下位一，一一如一，即於中位下一。



(7)上下位俱收，中位即得六千五百六十一。



至於除法，其法則如下：

「凡除之法，與乘正異。乘得在中央，除得在上方。假令六爲法，百爲實。以六除百，當進之二等，令在正百下，以六除一，則法多而實少，不可除，故當退就十位。以法除實，言一六而折百爲四十，故可除。若實多法少，自當百之，不當復退。故或步法，十者置於十位，百者置於百位，餘法皆如乘時。實有餘者，以法命之。以法爲母，實餘爲子。」

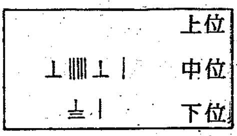
「例題：六千五百六十一，八十一人分之，問人得幾何？」

「答曰：八十一。」

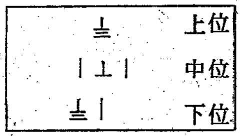
「術曰：先置六千五百六十一於中位，爲實；下列八十一人，爲法。上位置八十，以上八呼下八，八八六十四，即除中位六千四百。以上八呼下一，一八如八，即於中位除八十。退下位一等，即於上位置一。以上一呼下八，一八如八，即除中位八十。以上一呼下一，一一如一，即除中位一。中位並盡，收下位。上位所得，即人之所得。」

前面這段「術曰」，如果在算籌用的算盤上運作，則可以圖示如下：

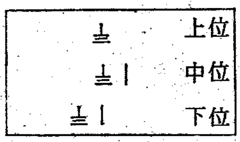
(1)先置六千五百六十一於中位，爲實（即被除數）；下列八十一人，爲法（即除數）。



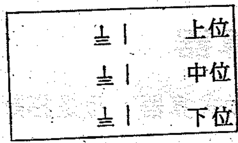
(2)上位置八十，以上八呼下八，八八六十四，即除中位六千四百。



(3)以上八呼下一，一八如八，即於中位除八十。



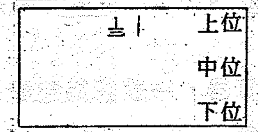
(4)退下位一等，即於上位置一。



(5)以上一呼下八，一八如八，即除中位八十。

(6)以上一呼下一，一一如一，即除中位一。

(7)中位並盡，收下位。上位所得，即人之所得。



從前面的乘法與除法法則，不難看出，中國人很早就已使用現代的方法來進行乘、除法運算了。

算籌經高麗傳到日本，韓國人習慣以袋子來裝算籌，在近代學校中都還使用。他們以算籌表示數時，5、6、7、8、9表示成X、XI、XII、XIII、XIIII，此種表示法與中國人不同。

日本人把算籌稱爲算木（ sangi ），數的表示方法與中國相同。所用的算板則畫上格子，參看下圖9：

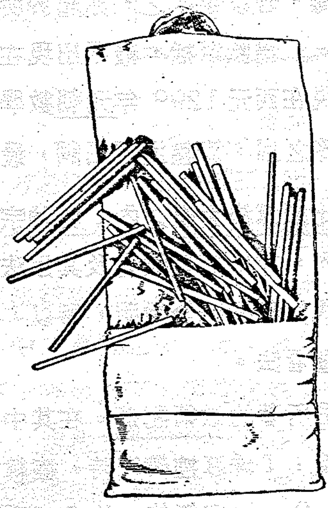


圖 8　韓國人的算籌

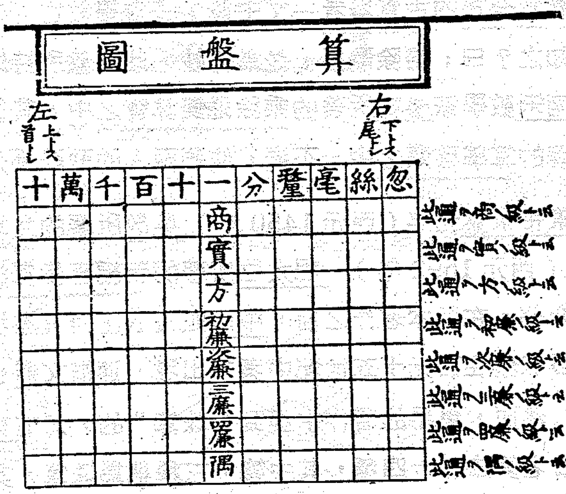


圖 9

在了，所以，如果說珠算起源於西元十四世紀或較早，而盛行於西元十五、六世紀，則應該不會有太大的偏差。

明神宗萬曆三十二年（西元1604年），黃龍吟著有算法指南二卷，其中說：「夫算盤每行七珠，中隔一梁，上梁二珠，每一珠當下梁五珠也。下梁五珠，一珠只是一數。算盤放於人之位次，分其左右上下，右位爲前，左位爲後，前位爲上，後位爲下。凡前位一珠，當後位十珠，故云逢幾還十，退十還幾之說。上法，退法，九歸，歸除，皆從右起；因法，乘法，俱從左起。」換言之，當時的算盤乃是圖13的形式。

關於算盤的東傳日本，有下面這段說法：西元十六世紀末葉，日本人毛利重能奉大將軍豐臣秀吉之命，到中國來學算，後來帶了程大位的算法統宗與算盤回日本，這段故事是否眞實，却無從查考。算盤傳到日本之後，日本人稱之爲soroban，算珠由圓形改爲稜形，梁上由二珠變爲一珠，如下圖：

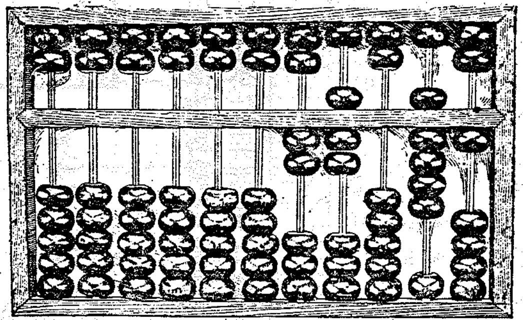


圖13

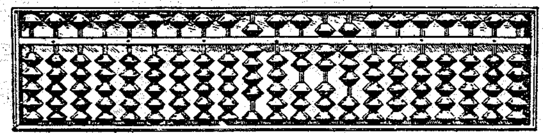


圖14　日本算盤

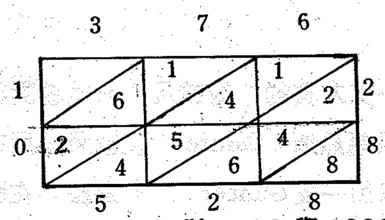
丙、刻度式算器

文藝復興運動之後，歐洲計算器械的第一次重要改進，應推西元1617年的Napier算籌（Napier's rods 或Napier's bones）。John Napier（1550—1617）是蘇格蘭的Merchiston 男爵，從他父親手中繼承了廣大的房地產，他不在愁衣食的狀況下，得以專研他的計算術與三角學。除了這裡所要介紹的算器之外，Napier在數學上最偉大的貢獻是發明了對數。此外，在三角學之中，Napier也爲後人留下許多很好的成果。

Napier算籌乃是根據一種稱爲gelosia method或grating method的乘積計算法而設計的。這種乘積計算法，可能是印度人最先發展出來的，因爲記載這種方法的作品，以西元十二世紀的印度數學家Bhāskara 的Lilāvati爲最早，其後傳入阿拉伯，再傳入歐洲。

我們以376 × 28 爲例來解說gelosia method：因爲376是三位數而28 是兩位數，我們繪一個2 × 3的長方形，分成六個小方格並將右上到左下的全部對角線畫出來。將376的的三個數字自左而右依序寫在方格上方，28 的兩個數字自上而下依序爲在方格右側。將每個方格的上、右兩個數字相乘，乘積的十位數字寫在左上部分，個位數字寫在右下部分

，就可得出下表。將兩條對角線間的各數相加並注意進位，就可得 $376 \times 28 = 10528$ 。



Napier根據這種乘法原理，利用十根竹片做成算籌，每根竹片上都仿照上面的 gelosia method ，標出某個數字與其他九個數字的乘積，下圖左側就是代表 6 的竹片。當我們計算 376×28 時，只要將代表 3 、7 、6 的竹片依序併攏，觀察竹片可得 $376 \times 2 = 752$ 及 $376 \times 8 = 3008$，將 7520 與 3008相加即得乘積 10528。

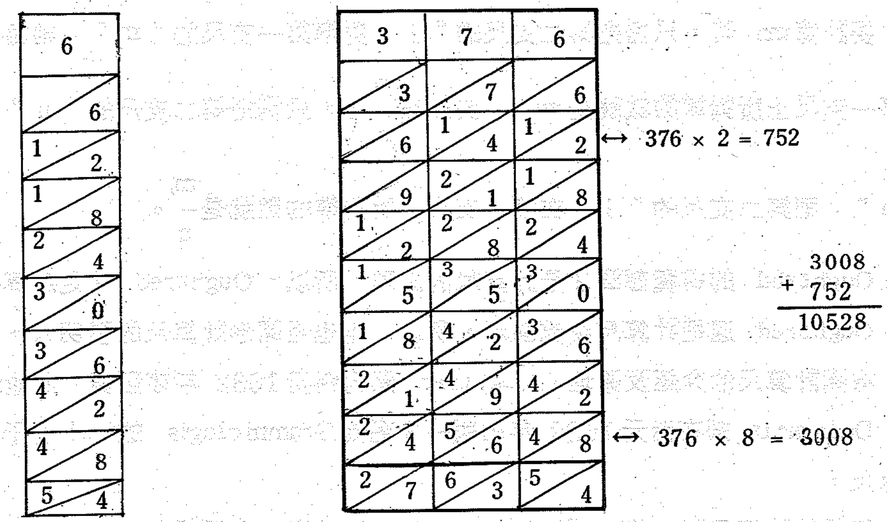
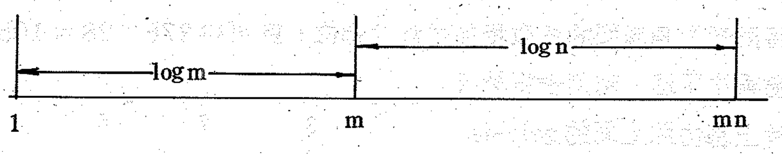


圖 15

Napier 對於其算籌的原理與使用方法，都記載在西元 1617 年出版的Rabdologiae 之中。

對數是西元十七世紀數學上的三大發明之一（另二個是微積分與解析幾何），它所具的“化乘、除爲加、減”的特性，使得計算乘積、商、乘冪、方根（的近似值）的工作省事不少。不過，利用對數來做這些工作，不僅需要經常查閱對數表，也還需要做加、減的運算；如果能將對數的原理應用到一種特別設計的計算器械之中，使得計算工作變成機械操作，那就更爲方便省事了。計算尺（ slide rule ）就是根據這種構想而發明的。

計算尺的原始設計人，是英國Gresham College的天文學教授 Edmund Gunter （ 1581 —1626 ）。他的想法是這樣的：在一直線上，決定出適當的點 P_1、P_2、P_3…，等等，在點 P_n 處寫上“ n ”，點 P_n 的位置是根據 $\overline{P_1P_n} = \log_{10} n$ 來決定的。如此，當我們要計算乘積mn 時，只要從標著“ m ”的點開始，取長度等於 $\overline{P_1P_n}$（即此刻度尺上“ 1 ”至“ n ”的距離）的線段，延長後的終點上所標示的值就是mn。Gunter 根據這種想法，在西元 1620



年製造出一支木質的“對數尺”，這種對數尺稱爲Gunter 尺（Gunter's scale或Gunter's rule）。很顯然地，Gunter 尺也可以用來求兩數的商。

如果只用一支Gunter 尺，那麼，在計算mn 時，需要由“m”的位置延長一段長度爲 $\log_{10} n$ 的線段，在機械操作上顯然不夠方便。西元1622 年，英國數學家William Oughtred（1574 — 1660）提出兩支Gunter 尺並用的方法。兩支尺的刻度部分緊密連接而可以滑動。要計算mn 時，只需把第二支尺的“1”對準第一支尺的“m”，則第二支尺的“n”在第一支尺上所對準的數就是mn 。要計算 $\frac{m}{n}$ 時，只需把第二支尺的“n”對準第一支尺的“m”，則第二支尺的“1”在第一支尺上所對準的數就是 $\frac{m}{n}$。

Oughtred 的這種想法才是計算尺的原理，所以，Oughtred 才是計算尺的發明人。此外，Oughtred 還把計算尺做成圓形，所以，他也是圓形計算尺的發明人。

有關計算尺的介紹及原理，Oughtred 直到西元1632 年才發表，而他的一位學生Richard Delamain 却在西元1630 年出版一本名爲Grammelogia 的一小册子，其中介紹圓形計算尺。

簡易的計算尺問世後，很快地在英國掀起了熱潮。爲了增加計算尺的功用，不斷對刻度加以改進。例如，西元1697 年William Hunt所設計的計算尺，可以在已知直徑時讀出圓面積，已知長軸與短軸長時讀出橢圓周長。西元1722 年，John Warner 設計的計算尺，讀數的平方、立方、平方根與立方根時，特別方便。大數學家Isaac Newton（1642 — 1727）設計一個可以解三次方程式的計算尺。

計算尺之研究改進的熱潮，西元十八世紀時吹進了歐洲大陸（主要是法國，其次是德國），十九世紀末葉，新大陸的美國才被計算尺所吸引。在整個計算尺演進過程中，曾經設計出許多不同型式的計算尺，數學史家Florian Cajori（1859 — 1930）在西元1909 年的一篇論文History of the Slide Rule 中，就列出了256種不同型式的計算尺，他還表示所列的資料可能不完全。事實上，在西元1960 年以前，計算尺可以說是科學家與工程師必備的工具，它的逐漸沒落，乃是由於袖珍電算器的發展所造成的。

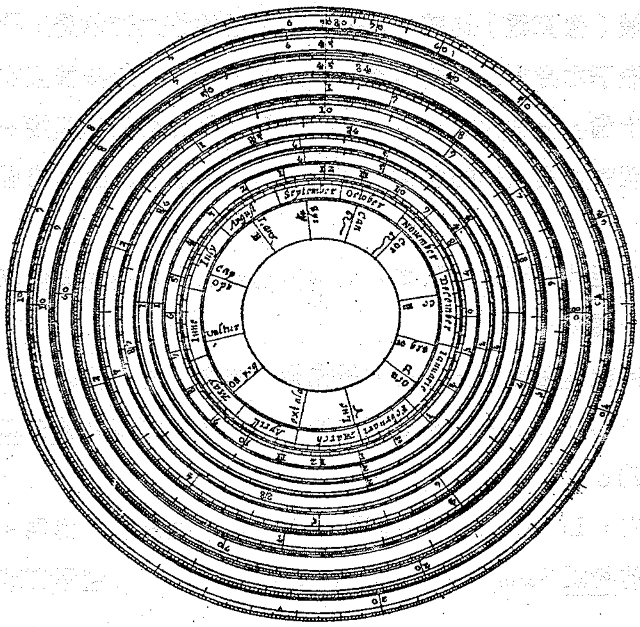


圖 16　Oughtred 的圓形計算尺

丁、機械式算器

正當英國人在熱衷於計算尺的研究與改進時，年青的法國數學家 Blaise Pascal （1623—1662）也在設計一個可以協助做計算的機器。Blaise Pascal 的父親 'Etienne Pascal（1588—1640）也是一位數學家，但他的工作是做稅務稽查，這項工作使他經常要做許多枯燥無味的計算。年青的 Blaise 希望能分擔父親的工作，就着手設計一個可以協助計算的機器，這個機器在西元 1642 年完成（他年僅十九歲），雖然他想幫助父親的心願並沒達到，可是，他却發明了數學史上第一個計算機器——加法器。這種加法器，Pascal 製成了五十多個，目前有些還存放在法國巴黎的 Conservatoire des Arts et M'etiers。

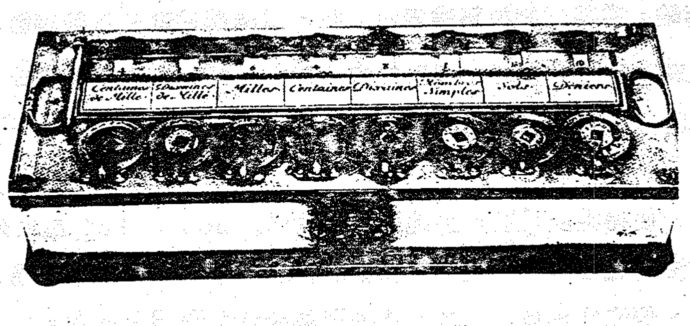


圖 17　Pascal 的加法器

與過去的計算器械（像算盤）比較，Pascal加法器的最大特色是：計算的人不必負責進位，當需要進位時，機器本身可以自動控制。原來在Pascal 加法器上有八個轉輪（參看上圖），每個轉輪上有十齒，分別代表0、1、…、9。每個轉輪都連接一個拉閂，當這個轉輪由9轉到0時，拉閂就帶動右邊的轉輪，使它增加1。這種由機器自動控制進位的做法，是非常重要的。

Pascal 加法器只能計算到六位數字，上圖右起第三個轉輪代表個位數字；主要的功能在做加法（以及減法）運算。

使乘法能與加法同樣地在機器上進行，最先嘗試製造這種機器的人，是英國人Sir Samuel Morland（1625－1695）。但在這方面的成就，我們應該介紹德國大數學家Gottfried Leibniz（1646－1716）。

西元1671年左右，Leibniz 製造一個可供乘法運算的機器，稱為stepped reckoner（參看圖18），目前德國Hannover 地方的Kästner Museum還保存著一部這種機器。

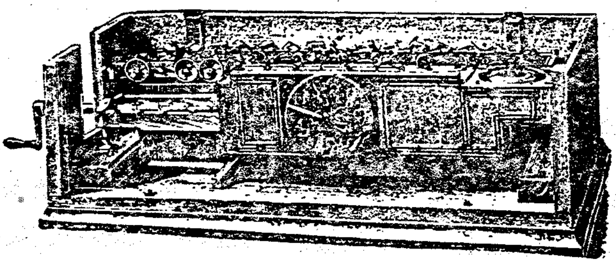


圖18　Leibniz 的計算機

在Leibniz的計算機中，共有三行轉輪。第一行供加、減運算之用，其結構與Pascal 加法器相同。第二行用來表示被乘數，第三行用來表示乘數。當某個被乘數轉輪表示5時，就有5個齒伸出而可以套進對應的加法轉輪之中。另外，每個被乘數轉輪中央都有一個輪軸，以皮帶連接乘數轉輪，當某個乘數轉輪表示4時，這個轉輪就會自動調節成被乘數輪軸的四倍；如果這個乘數轉了一圈，那麼，利用皮帶的帶動，對應的被乘數輪軸（以及轉輪本身）就會轉四圈。不同的被乘數轉輪之間都有皮帶連接，只要任何一個轉了一圈，其餘每一個都會跟著轉一圈。

前面這些結構，使得乘法可以自動地運作。我們以365 × 124 為例來做解說：

(1)　首先將加法轉輪都歸零，被乘數轉輪的百位、十位、個位分別為3、6、5，乘數轉輪的百位、十位、個位分別為1、2、4，則轉輪就呈圖19之形狀。

(2) 乘法運算開始，乘數的個位轉輪轉了一圈。由於這個轉輪是被乘數個位轉輪之輪軸的四倍，所以，被乘數個位轉輪被帶動轉四圈。由於被乘數個位轉輪有五齒伸出，可以套進加法個位轉輪之中，所以，當被乘數個位轉輪轉四圈時，伸出的齒就推動加法個位轉輪前進 $5 \times 4 = 20$ 步。

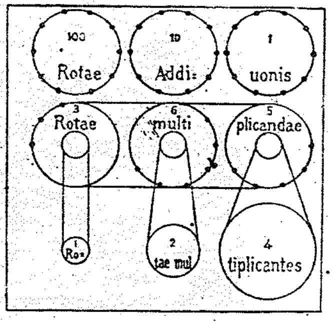


圖 19

(3) 因爲被乘數轉輪彼此連接，所以，當被乘數個位轉輪轉了四圈時，被乘數的十位與百位轉輪也轉了四圈，於是，被乘數十位轉輪伸出的六齒帶動加法十位轉輪前進 $6 \times 4 = 24$ 步；被乘數百位轉輪伸出的三齒帶動加法百位轉輪前進 $3 \times 4 = 12$ 步。

(4) 現在，365乘以 4 的運作完成，加法個位轉輪前進20 步，十位轉輪前進24 步，百位轉輪前進12 步。根據自動進位的結果，個位轉輪歸零，十位轉輪出現 6，百位轉輪出現 4，千位轉輪出現 1，即 $365 \times 4 = 1460$。

(5) 接著是乘數的十位數字 2 進行相乘，加法轉輪全部右移一格（使十位轉輪落在個位轉輪的位置，餘類推），然後，仿前面的過程進行運作。最後要將乘數的百位數字進行相乘時，加法轉輪全部再右移一格，然後進行運作。

這就是 Leibniz 計算機進行乘法運算的原理。

Leibniz 以後，有不少人或新造或改進這類計算機器，例如，西元1820 年，Thomas de Colmer將Leibniz 型的計算機加以改進，使它能做減法與除法運算。這部新的計算機，是西元 1875 年前大多數商用計算機的典範。西元1875年，美國人Frank Stephen Baldwin 設計了一部很實用的計算機，這部計算機可以隨時做加、減、乘、除的運算，不必在換另一種運算時重新開始。目前很流行的許多桌上型計算機，像Friden，Marchant，與Monroe 等，都是根據Baldwin計算機的原理設計的。

在桌上型計算機中，通常有兩個主要部分，一是算術單位，一是控制單位。算術單位處理數字，控制單位則告訴算術單位如何及時處理數字。當機器漸漸自動化時，控制單位就更爲重要，因爲它承擔了更多原來屬於操作者的職務。

在機械式計算機的發展過程中，有一個人必須一提，他就是英國劍橋大學的數學教授 Charles Babbage（1792—1871）。西元1820年左右，Babbage 就決心要製造一個可以計算數學上各種表的機器，稱爲差分機（difference engine）。後來爲了專心於這件工作，他甚至辭去教職。西元 1823 年，他獲得英國政府的補助而繼續他的設計工作，不過，他

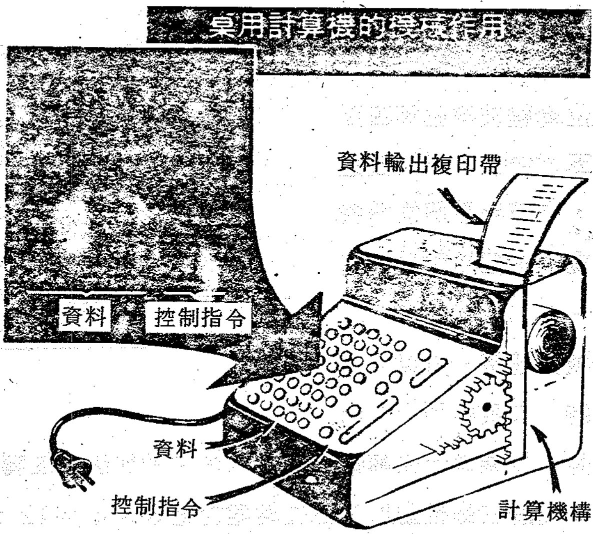


圖 20　桌上型計算機

的成就並沒能令人滿意，十年後他的補助就停止了。可是他的研究工作一直持續到西元 1856 年才結束，而從西元 1842 年起，Babbage 放棄了差分機，而改設計另一部稱爲分析機（analytical engine）的機器。

Babbage 所想設計的分析機，是使用十進位轉輪，在一秒鐘內能完成一個加法運算，這部機器大部分能自動而不需依賴使用者的動作。可惜製造的技術方面問題太多，而且他所得的支援太少，所以，實際完成的機器與理想相差太遠，因而被人諷刺爲 Babbage 的愚行（Babbage′s folly）。然而，Babbage 對自動化計算機的設計構想，却帶給後人很有用的指針。

Babbage 對於自動化計算機的構想，最重要的是他認爲計算機必須具備下面五種單位：

(1) 輸入單位；

(2) 記憶單位；

(3) 控制單位；

(4) 算術單位；

(5) 輸出單位。

對於(1)與(2)，Babbage 認爲如果機器每做完一個運算，都要停下來等待使用者把資料輸入，那就會減低速度。所以，他認爲應該把工作單的任務（儲存資料）以及使用者的任務（將資料交給控制單位），都交給機器，讓機器在需要資料時，自行從記憶單位中取用。這些構想在現代電子計算機中都實現了。

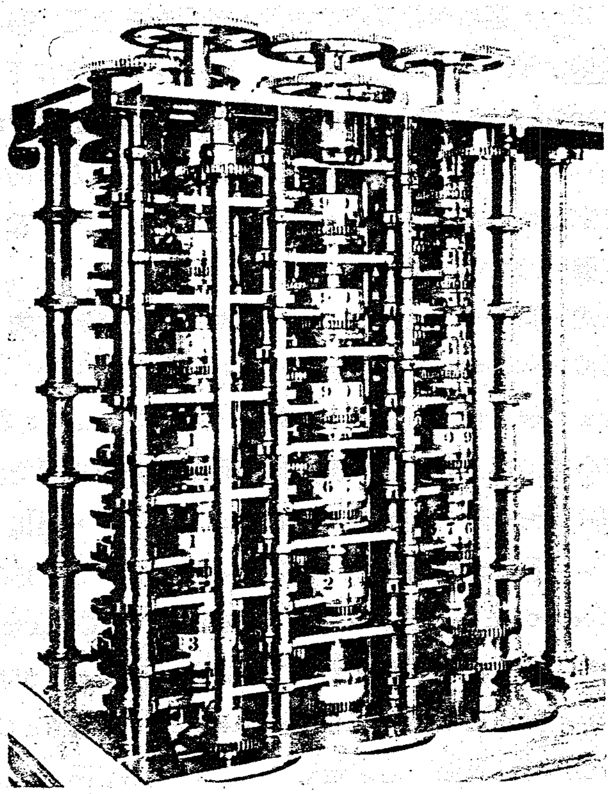


圖 21　Babbage 所完成的分析機

戊、電子化算器

西元 1940 年，計算機器步入了一種新的境界。過去的計算機器中，都是採用機械的計數輪，這種機械裝置，在操作時，容易受到機械啓動、運轉與停止的限制，所以無法達到很高的速度。西元 1937 年，美國Harvard University的教授Howard Aiken 開始設計一部可以自動執行一序列運算的機器，這部機器在西元 1944 年由Harvard University 與 IBM公司共同發展完成。這部機器稱爲Automatic Sequence—Controlled Calculator Mark I（簡記爲ASCC ）。ASCC 重約五噸，51 呎長，8呎寬，其中使用了機械替續器（mechanical relay ）代替計數輪以表出資訊，替續器的速度就比計數輪快得多。ASCC 做了不少事，特別是在計算函數值表方面功勞不小；在第二次世界大戰期間，也幫忙做了一些彈道的計算。

事實上，第一部使用替續器的計算機並不是ASCC ，而是西元 1940 年，Samuel Williams 所領導的Bell Telephone Laboratory 所發展的，主要的貢獻者是George Stibitz 。

不過，前面這兩部機器並不是電子計算機，因爲替續器不是電子元件。電子工業界設計

出來取代替續器的電子電路，應用到計算機的設計，最早要推西元1946年，美國University of Pennsylvania 與美國陸軍的Ballistic Research Laboratory合作下發展出來的Electronic Numerical Integrator And Calculator（簡記爲ENIAC），設計人是Presper Eckert與John Mauchly兩位教授。ENIAC 重約30 噸，需要面積30×50平方呎的房間才能容納得下，其中用了19000 個眞空管來組成所需的電子電路，一秒鐘可以進行五千次加法運算。從此開始了第一代電子計算機，即所謂的眞空管時期。

ENIAC 所需的程式與指令，乃是利用插板的接線或儲存在外部的介物（如打字紙帶或卡片）之中。在那個期間，匈牙利數學家John von Neumann（1903—1957）正在University of Pennsylvania 講學，由於近水樓台的關係，他對於Eckert 與Mauchly在計算機方面的進展情形，頗有心得；而且對於計算機如何應用數值分析也很有成就。此外，他對Eckert 與Mauchly的計算機邏輯詳加闡述，而在西元1945 年，提出了計算機程式與指令應該貯存在內部的觀念。這種觀念使得Eckert 與Mauchly在西元1950年發展了一部內貯程式的計算機，稱爲Electronic Discrete Variable Automatic Computer（簡記爲EDVAC）。不過，第一部內貯程式的計算機並不是EDVAC，因爲英國Cambridge University在前一年（西元1949年）所發展的Electronic Delay Storage Automatic Calculator（簡記爲EDSAC），也是內貯程式的計算機，這才是第一部。EDVAC 與 ENIAC的不同之處，除了內貯程式之外，前者還開始使用二進位來進行算術運算並以數字形式來寫成指令。

前面我們所提的計算機，並不是那個時期所僅有的。它們之所以深具意義，乃是因爲它們都代表著計算機設計方面的重要觀念。這個時期的計算機，都是使用眞空管，體積龐大，速度慢，耗電量大，溫度高，經常故障且不易維護，這些都是第一代電子計算機所共有的缺點。

電晶體（transistor）的功能與眞空管相似，但體積較小，價格較低，發熱少，而且需用電力小。西元1954 年，Massachusetts Institute of Technology的Lincoln Loboratory利用電晶體裝成了TX—0 電子計算機。到了西元1960 年，電子計算機中的眞空管電路幾乎全部爲電晶體電路所取代，這就是第二代電子計算機，也就是電晶體時期。

西元1965 年，IBM 公司生產的IBM360計算機問世，其中的電晶體電路改成積體電路（integrated circuit）。所謂積體電路，乃是將很多的電晶體與電阻等各種電子元件，濃縮在一個晶片（chip）上，這種晶片只有拇指頭的大小。這類電子計算機，體積更小，耗電量更少，而速度則比第二代計算機快了幾十倍到幾百倍。這就是第三代電子計算機，也就是積體電路時期。

現代的電子計算機仍然使用積體電路，但從西元1970 年以後，中型積體電路、大型積體電路、超大型積體電路不斷推出，一個積體電路上就可包含數千個電子元件，計算機的功

能大爲提高，應用範圍更爲廣泛。目前最新的電子計算機，一秒鐘內就可完成二千多萬次加法運算，其速度相當驚人。這就是第四代電子計算機，也就是大型積體電路時期。

前面所介紹的內容，乃是數位計算機（ digital computer ）的大略發展狀況。然而，這並不代表計算機工業的終結，事實上，電子計算機的發展仍然方興未艾，日本人宣稱正在研究一秒鐘可進行三千萬次邏輯推理（不是加法或資料處理）的第五代電子計算機。展望未來，大概沒有人能預料將來的發展會是什麼狀況吧！

本文最後一段，我們回到計算器械這個本題。首先，我們要指出，電子計算機發展之初，雖然以高速而精確的計算爲目的，然而今天的電子計算機，其功能已不是一般的計算器械所可比擬，它能爲人類提供的服務，數值計算只是其中微不足道的一小部分而已。此外，我們還要指出一點，對數學而言，過去的計算器械都不曾對數學思想的發展產生巨大的衝擊。可是，電子計算機所扮演的角色却完全不同，它使得懸疑一百多年的四色問題及其有關理論的探討告一段落，導致了數值分析的積極研究，喚醒了沈寂數十年的矩陣理論，提高了邏輯與離散數學的重要性，甚至產生了像線性規劃、博局論等新的數學領域。總而言之，在過去的一段時期裡，電子計算機對純數學的研究與發展，確實扮演了相當程度的指導角色，在未來的時日裡，這個角色應該還會持續下去吧！

参考書目

1.李子嚴：中算史論叢(三)，台灣商務印書館發行。

2.李儼：中國古代數學簡史，九章出版社。

3.李約瑟（傅溥譯）：中國之科學與文明，第四册，台灣商務印書館發行，民國六十四年九月修訂一版。

4.許照譯：數字計算機的基本原理，徐氏基金會出版，民國五十八年。

5.張時春譯：電子計算機導論，徐氏基金會出版，民國六十七年九月三版。

6.傅溥：中國數學攬勝，幼獅文化事業公司印行，民國六十七年十二月。

7. Eves,H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and company, Inc., 1953。

8. Smith, D.E., A source book in mathematics, vol. 1, Dover Publication, Inc., 1929。

9. Smith, D.E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publication, Inc., 1953。