凸函數與其應用實例

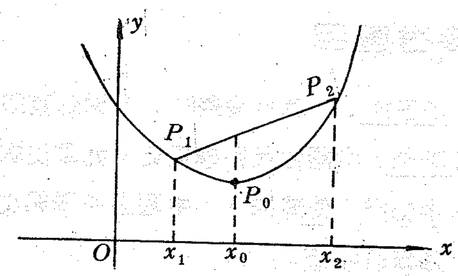
何景國

台北市私立延平中學

數學傳播第六卷第二期中，王教授曾指出：數學問題不是孤立存在的；數學學習者不可以專注重於問題本身的演練，及只講求問題的演算，推導，求證等等的技巧，而要著重問題的關連與發展，以及其方法的應用與改進，王教授且在文中提及凸函數與不等式的關係。本文即就函數圖形之凹凸性談凸函數，進而就不等式的範圍例舉幾個凸函數在不等式上的應用例子，下面就是引發出凸函數概念的一個定義。

設 I 爲實數線上一任意區間，且 f 爲定義在 I 上的函數。所謂凸函數就是指函數 $y=f(x)$ 的圖形是上凹的，亦即是這個函數 $y=f(x)$ 具有下列性質：

如果對任意 $x_1, x_2 \in I$，且 $x_1 < x_0 < x_2$ 時，則圖形 $y=f(x)$ 上三點 $P_i(x_i, f(x_i))$，$i=0,1,2$ 恒滿足：點 P_0 會在 $\overline{P_1P_2}$ 線段之下方。（見圖示）：



自上述定義易知下面的凸函數的解析定義。

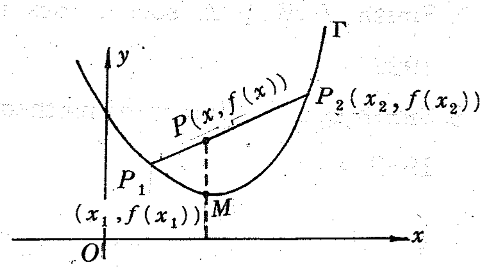
若對任意 $x_1, x_2 \in I$，下列不等式恒成立：

$$f(m_1x_1+m_2x_2) \leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2),\ m_1, m_2 \geq 0,\ m_1+m_2=1,$$

則稱這個函數 f 爲在區間 I 上的凸函數。

分析與證明

在具有上凹性之函數圖形 Γ 上任取兩點 $P_1(x_1, f(x_1))$，$P_2(x_2, f(x_2))$ 與在 $\overline{P_1P_2}$ 線段上取一點 $P(x, f(x))$，且從 P 作 x 軸的一垂線交圖形 Γ 於點 M。得一參數向量式：



$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OP}_1+t\,\overrightarrow{OP}_2$$

其中 $t\in[0,1]$。

因爲函數圖形 Γ 爲上凹的，故得

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)-f((1-t)x_1+tx_2)\geqq 0$$

令 $m_1=1-t$ ；$m_2=t$ 則上式變成：

$$f(m_1x_1+m_2x_2)\leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2),$$

上面式子就是用來當作凸函數的解析定義。如果上式中的不等號反向，則稱 f 爲在區間 I 上的凹函數。

一般地，我們有下面的 Jensen 不等式。

Jensen 不等式

若 f 爲凸函數，$m_i\geq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}m_i=1$ 則有下列不等式成立：

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n}m_ix_i\Big)\leq\sum_{i=1}^{n}m_if(x_i)$$

設 $n=2$ 時，則得最簡單情形：

$$f(m_1x_1+m_2x_2)\leq m_1f(x_1)+m_2f(x_2),$$

此時，只不過是凸函數的定義。今假設 $n=k$ 時上式成立。

當 $m_i\geq 0$ ，$\sum_{i=1}^{k+1}m_i=1$ ，則有下列不等式：

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k+1}m_ix_i\Big)=f\Big(\sum_{i=1}^{k-1}m_ix_i+m_kx_k+m_{k+1}x_{k+1}\Big)$$

或

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k+1}m_ix_i\Big)=f\Big(\sum_{i=1}^{k-1}m_ix_i+(m_k+m_{k+1})\Big(\frac{m_k}{m_k+m_{k+1}}x_k+\frac{m_{k+1}}{m_k+m_{k+1}}x_{k+1}\Big)\Big)$$

若 $m_k+m_{k+1}>0$ ，則由題設知 m_k , m_{k+1} 中，至少有一不爲零，因此得：

$$f\Big(\sum_{i=1}^{k+1}m_ix_i\Big)\leq\sum_{i=1}^{k-1}m_if(x_i)+(m_k+m_{k+1})f\Big(\frac{m_k}{m_k+m_{k+1}}x_k+\frac{m_{k+1}}{m_k+m_{k+1}}x_{k+1}\Big)$$

而其中

$$f\Big(\frac{m_k}{m_k+m_{k+1}}x_k+\frac{m_{k+1}}{m_k+m_{k+1}}x_{k+1}\Big)\leq\frac{m_k}{m_k+m_{k+1}}f(x_k)+\frac{m_{k+1}}{m_k+m_{k+1}}f(x_{k+1})$$

故
$$f\Big(\sum_{i=1}^{k+1}m_ix_i\Big)\leq\sum_{i=1}^{k+1}m_if(x_i)$$

因此 Jensen 不等式對任何自然數 n 恒成立。

對於滿足上述的 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ ，我們稱 $m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n$ 爲 $x_1,x_2,\cdots,$

與 x_n 的凸組合。由向量坐標幾何知，凸組合與凸集合及質量中心的向量解釋有著重要的關係，因此可以推論到更多的性質。

定理 1

設 $P_i(m_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$ 爲點集合 Γ 中任意一組質點。若點 G 爲該組質點的質量中心，則 Γ 爲一凸集合的充要條件是點 G 亦屬於集合 Γ。

分析與證明

(1) 充分條件：

在凸集合 Γ 中任取兩質點 P_1 與 P_2，且其質量分別爲 m_1，m_2。若點 G 爲兩質點 P_1，P_2 的質量中心，則下式成立。

$$m_1\overrightarrow{GP}_1+m_2\overrightarrow{GP}_2=\overrightarrow{0}\qquad(\text{式中}\ m_1\geq 0,\ m_2\geq 0,\ m_1+m_2=1)$$

或

$$\overrightarrow{P_1G}=\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{P_1P_2}$$

由於實數 $\dfrac{m_2}{m_1+m_2}\in[0,1]$，因此得知點 G 落在 $\overline{P_1P_2}$ 線段上。亦即有

$$G\in\Gamma$$

成立。

今假設有一組 $n=k$ 個的質點 $P_1,P_2,\cdots,P_k$ 的質量中心 G' 爲集合 Γ 的一元素。

令 $m_i\geq 0$，$\sum\limits_{i=1}^{k+1}m_i=1$ 則兩質點 P_{k+1} 與 G' 的質量中心滿足下列式子：

$$\overrightarrow{G'G}=\frac{m_{k+1}}{(m_1+m_2+\cdots+m_k)+m_{k+1}}\overrightarrow{G'P_{k+1}}$$

且因爲 $\dfrac{m_{k+1}}{(m_1+m_2+\cdots+m_k)+m_{k+1}}\in[0,1]$，故點 G 落在 $\overline{G'P_{k+1}}$ 線段上。亦即有

$$G\in\Gamma$$

因此對任意一組 n 個質點的質量中心恒爲點集合的一元素。

(2) 必要條件：

設 P_1，P_2 爲點集合 Γ 中任意的相異兩點，則線段 $\overline{P_1P_2}$ 上任一點 P 會使下式成立：

$$(1-t)\overrightarrow{PP}_1+t\,\overrightarrow{PP}_2=\overrightarrow{0},$$

其中 $0<t<1$。

若令 $m_1=1-t$，$m_2=t$ 則有

$$m_1\overrightarrow{PP}_1+m_2\overrightarrow{PP}_2=\overrightarrow{0}$$

上述式子說明了兩質點 P_1，P_2 的質量中心爲點 P，而 P 亦是 Γ 的一元素，因此集合 Γ 爲

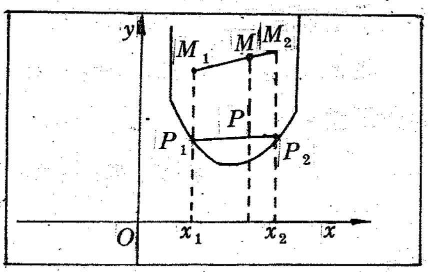
一凸集合。

故定理 1 得證。

定理 2

設 $f(x)$ 爲定義在區間 I 上的函數，且點集合 $\Gamma=\{(x,y)\mid x\in I,\ y\geq f(x)\}$。則函數 $f(x)$ 爲一凸函數的充要條件是集合 Γ 爲一凸集合。

分析與證明



設 $M_1(x_1, y_1)$, $M_1(x_2, y_2)$ 爲 Γ 中的兩點，而 $P_1(x_1, f(x_1))$, $P_2(x_2, f(x_2))$ 爲 $y=f(x)$ 的圖形上兩點。設 $M(x,y)$ 爲線段 $\overline{M_1M_2}$ 上一點，則必有 $m_1\geq 0$, $m_2\geq 0$, $m_1+m_2=1$，使得

$$\begin{cases} x=m_1x_1+m_2x_2\,, \\ y=m_1y_1+m_2y_2\,。\end{cases}$$

於是，得

$$y=m_1y_1+m_2y_2\geq m_1f(x_1)+m_2f(x_2)\geq f(m_1x_1+m_2x_2)=f(x),$$

故 $$M(x,y)\in\Gamma$$

即點集合 Γ 爲一凸集合。

反之，如果點集合 $\Gamma=\{(x,y)\mid x\in I,\ y\geq f(x)\}$ 爲一凸集合，則由定義易知函數 $f(x)$ 爲一凸函數。

故定理 2 得證。

根據上述分析，凸函數的解析定義可以確定函數的凸性，但是函數的凸性與函數的可導微性及可積性是密切關連的。對凸函數的研究，下面幾個定理有相當的應用性。

定理 3

設凸函數 f 是可二次導微，則下面五個條件是等價的。

(1) f 爲凸函數。

(2) f 滿足下列不等式：

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} m_ix_i\Big)\leq\sum_{i=1}^{n} m_if(x_i)$$

式中 $m_i>0$ 且 $\sum_{i=1}^{n} m_i=1$, $i=1,2,\cdots,n$。

(3) $f''\geq 0$。

(4) f' 爲遞增函數。

(5) $y=f(x)$ 函數圖形恒在其切線的上方。

定理4

(1) 若兩函數 f 與 g 爲凸函數，則函數 $(f+g)$ 及 (αf) 均爲凸函數，其中 α 爲一純量。

(2) 設函數 f 與 g 分別爲定義在區間 I 與 J 上的凸函數，且 f 的值域 R_f 包含於 J 內。若 g 爲遞增函數，則函數 f 與 g 的合成函數 $(g_0 f)$ 爲定義在 I 上的凸函數。

分析與證明

(1) 本定理容易驗證，故從略。

(2) 設 $x_1, x_2 \in I$，且 $m_1 m_2 > 0$，$m_1+m_2=1$，則由下列不等式知 $(g_0 f)$ 爲定義在 I 上的凸函數。

$$\begin{aligned} g(f(m_1x_1+m_2x_2)) &\le g(m_1f(x_1)+m_2f(x_2)) \\ &\le m_1g(f(x_1))+m_2g(f(x_2))。\end{aligned}$$

定理5

設 f 與 g 均爲定義在同一區間 I 上的正值凸函數。若 f 與 g 同爲遞減函數（或遞增函數），則積函數 $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ 亦爲凸函數。

分析與證明

設 $x_1<x_2$，且 $m_1>0$，$m_2>0$，$m_1+m_2=1$，則依題意得：

$$[f(x_1)-f(x_2)][g(x_2)-g(x_1)]\le 0$$

或

$$f(x_1)g(x_2)+f(x_2)g(x_1)\le f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2) \cdots\cdots\cdots(1)$$

又因爲

$$h(m_1x_1+m_2x_2)=f(m_1x_1+m_2x_2)\cdot g(m_1x_1+m_2x_2)、$$

所以，得

$$\begin{aligned} h(m_1x_1+m_2x_2) &\le [m_1f(x_1)+m_2f(x_2)][m_1g(x_1)+m_2g(x_2)] \\ &\le m_1^2f(x_1)g(x_1)+m_1m_2[f(x_1)g(x_2) \\ &\quad +f(x_2)g(x_1)]+m_2^2f(x_2)g(x_2), \end{aligned}$$

故由(1)式得

$$\begin{aligned} h(m_1x_1+m_2x_2) &\le m_1^2f(x_1)g(x_1)+m_1m_2[f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2)] \\ &\quad +m_2^2f(x_2)g(x_2)\le m_1f(x_1)g(x_1)+m_2f(x_2)g(x_2) \end{aligned}$$

即有下列不等式：

$$h(m_1x_1+m_2x_2)\le m_1h(x_1)+m_2h(x_2)$$

因此知 $h(x)=f(x)g(x)$ 爲凸函數。

爲了闡明凸函數與不等式的關係，我們舉數則不等式的例子如下：

論例 1　高次平均不等式

設 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲 n 個正數，而 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 爲狹義凸性係數，即諸 $m_i > 0$，$\sum m_i = 1$，$i = 1, 2, \cdots, n$，若

$$\begin{cases} \mu = m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n, & (\text{稱“加權算術平均”}) \\ g = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}, & (\text{稱“加權幾何平均”}) \\ \dfrac{1}{h} = \dfrac{m_1}{x_1} + \dfrac{m_2}{x_2} + \cdots + \dfrac{m_n}{x_n}, & (\text{稱“加權調和平均”}) \end{cases}$$

則
$$h \le g \le \mu 。$$

解

設 $f(x) = -\log x$ 爲定義在 $I = (0, \infty)$ 上的函數。

因爲
$$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$$

所以
$$\log(m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n) \ge m_1 \log x_1 + m_2 \log x_2 + \cdots + m_n \log x_n$$

又因 log 爲遞增函數故：

$$m_1x_1 + m_2x_2 + \cdots + m_nx_n \ge x_1^{m_1} \cdot x_1^{m_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n} \cdots\cdots\cdots(1)$$

即
$$\mu \ge g 。$$

再分別以 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n}$ 代入(1)式中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，可得下列不等式

$$m_1\left(\frac{1}{x_1}\right) + m_2\left(\frac{1}{x_2}\right) + \cdots + m_n\left(\frac{1}{x_n}\right) \ge \frac{1}{x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \cdots \cdot x_n^{m_n}}$$

故得
$$h \le g \le \mu$$

註說

若諸 $m_i = \frac{1}{n}$ 則 μ, g, h 分別稱爲諸正數 x_i 的算術平均數，幾何平均數及調和平均數。

論例 2

設 $x_1, x_2 > 1$ 則下列不等式成立。

$$\log\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{\log x_1 \cdot \log x_2} 。$$

解

考慮定義在 $I = (1, \infty)$ 上的函數 $f(x) = -\log\log x$，因爲 $f(x)$ 的一階導微函數 $f'(x) = \frac{-1}{x \log x}$ 及 $f(x)$ 的二階導函數 $f''(x)$，

$$f''(x)=\frac{1+\log x}{x^2(\log x)^2}>0\ ,$$

所以 $f(x)=-\log\log x$ 爲定義在 $(1,\infty)$ 上的凸函數。

故得
$$-\log\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leq\frac{-\log(\log x_1\cdot\log x_2)}{2}$$

或
$$\log\log\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geq\frac{\log(\log x_1\cdot\log x_2)}{2}$$

又因爲在區間 $I=(1,\infty)$ 上，log 爲遞增函數，所以得：

$$\log\frac{(x_1+x_2)}{2}\geq\sqrt{\log x_1\cdot\log x_2}\ 。$$

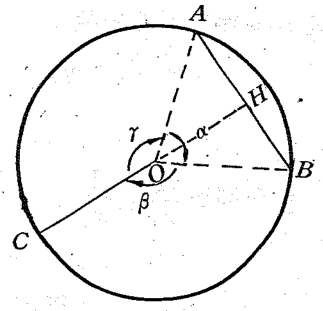
論例３　　極值與凸函數

試證明：在所有圓內接三角形中周界最長者（或面積最大者）爲正三角形。

解

設三角形 $\triangle ABC$ 的外接圓的圓心爲 O，半徑爲 R。

（見右圖）



如右圖示令 $CH\perp AB$ 於 H，且 $\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，$\angle COA=\gamma$，則得

$$\begin{cases}\overline{AB}=2R\sin\dfrac{\alpha}{2}\\[2mm]\overline{BC}=2R\sin\dfrac{\beta}{2}\\[2mm]\overline{CA}=2R\sin\dfrac{\gamma}{2}\end{cases}\qquad 其中\ \alpha+\beta+\gamma=2\pi$$

因爲
$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\left(\frac{2\pi-\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

故 $\triangle ABC$ 的周長爲

$$p=2R\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

設函數 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}+2\sin\dfrac{\pi}{4}$。

則在區間 $I=[0,2\pi]$ 內易知 $-\sin\dfrac{x}{2}$ 爲一凸函數，故得下列不等式：

$$m_1=m_2=\frac{1}{2}\ ;\quad x_1=\alpha\ ,\ x_2=\beta$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)\leq\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$$

故得
$$f(\alpha+\beta)\leq\sin\frac{\alpha+\beta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$$

於是，得
$$p\leq 2R\cdot f(\alpha+\beta)$$

再因為
$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{4}\right)=\cos\frac{x}{8}\cdot\cos\frac{3x}{8}$$

而且

$$\begin{cases}\text{當 } x=\dfrac{4}{3}\pi\text{ 時，} f'(x)=0\\ \text{當 } 0\leq x<\dfrac{4\pi}{3}\text{ 時，} f'(x)>0\\ \text{當 } \dfrac{4\pi}{3}\leq x<2\pi\text{ 時，} f'(x)\leq 0\end{cases}$$

我們可以列變化表如下：

x	0	$\frac{4\pi}{3}$	2π
f'	$+$	0	$-$
f	$0 \nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow 2$

因此當 $x=\frac{4\pi}{3}$ 時，取得極大值為 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$。所以，

$$f(\alpha+\beta)\leq\frac{3\sqrt{3}}{2},$$

故
$$p\leq 3R\sqrt{3}\text{。}$$

上述不等式表示說：當 $\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$ 且 $\alpha=\beta$ 時，所有圓內接三角形中周界最長者為正三角形。

參考資料

1. 王中烈：從半道高中數學競試題談起—兼淺談不等式與凸函數的關係，數學傳播第六卷第二期71年。
2. 王中烈：你相信你的眼睛嗎？數學傳播第六卷第一期71年。
3. 夏文侯：凸函數之初等證明法，數學傳播第四卷第三期69年。
4. 何景國：高中數學科教材研究，數學傳播第三卷第二期67年。
5. A. WAYNE ROBERTS/DALE E. VARBERG：CONVEX FUNCTIONS 協進圖書66年。
6. J. BASS：Cours de Mathématiques Masson & Cie Paris 1969.

日本第33屆全國科教會議簡報

董有蘭

國立臺灣師範大學化學系

日本第33屆全國科學教育會議，於今年（1983）8月25—27日在沖繩島那覇市舉行。會中發表論文有兩百多篇，分爲十大類。㈠師資訓練。㈡科教趨勢。㈢科學課程。㈣教育評量。㈤科教理論。㈥理化教育。㈦生物教育。㈧地科教育。㈨教學研究。㈩教育工學（教學媒體的研究）。各類論文分別在不同教室或禮堂舉行。每篇論文宣讀、講解、討論共15分鐘。決不允許拖延。聽了幾十篇，未見有一拖延時間者。教室黑板上訂着一疊疊的講題，每講一篇，撕去一張，故不論何時走進教室，舉目一看便知正在進行何種討論。又不論用的是幻燈機，或是投影機，顯現的圖片字幕，都非常清楚，眞是一目了然。

會議期中也有廠商參加展覽各種教學媒體，品質精良，價錢公道。例如一套套兒童看圖做實驗的設計，十分活潑有趣。試管、小瓶、攪拌棒，都是色彩艷麗的塑膠做成。操作方便安全，又玲瓏可愛，每套日幣200元，約合台幣卅多元。這些精心設計的儀器，更顯出日人對科學教育的努力，是全國性的。