抽 屜 原 理 演 繹

彭志帆

國立臺灣大學數學系

在知道什麼是抽屜原理之前，請回答下面數問：

(1) 九個籃子放十個蘋果，則其中必有一個籃子，至少有兩個蘋果，爲什麼？

(2) 某校有學生三百六十七人，其中至少有兩人同一天生日，爲什麼？

(3) 31人排成2隊，則其中必有一隊，至少有16人，爲什麼？排成3隊，其中必有一隊，至少有11人，爲什麼？排成5隊，其中必有一隊，至少有7人，又爲什麼？

抽屜原理：如果$n+1$個或多於$n+1$個元素分別屬於n個集合中其中一個，則其中必有一個集合，至少含有2個元素；一般地，如果$n\times m+1$個或多於$n\times m+1$個元素分別屬於n個集合中其中一個，則其中必有一個集合至少含有$m+1$個元素。這就是抽屜原理（ the Dirichlet drawer principle ），又叫做**鴿巢原理**（ the pigeonhole principle ）。

利用抽屜原理，能解決很多數學問題。舉例如下：

定義1：假設m和n都是整數，如果m整除n，我們記作$m\mid n$；否則，記作$m\nmid n$。例如$3\mid 15$，$4\mid(17-5)$，但$5\nmid 41$。

【例1】任取6個正整數，則其中必有2個數a和b，使得$5\mid(a-b)$。

證明：把自然數分爲五類：

(a) $1,6,11,16,\cdots,5n+1,\cdots$

(b) $2,7,12,17,\cdots,5n+2,\cdots$

(c) $3,8,13,18,\cdots,5n+3,\cdots$

(d) $4,9,14,19,\cdots,5n+4,\cdots$

(e) $5,10,15,20,\cdots,5n,\cdots$

顯然，同一類中任何兩數相減，必被5整除。

現任取6個數，根據抽屜原理，其中必有兩數同屬於上述五類中其中一類，得證。

容易推出一般情形：任取$n+1$個正整數，則其中必有兩個數a和b，使得$n\mid(a-b)$。

【例2】110是2的倍數，1110是3

的倍數，11100是4的倍數，111000　是6的倍數，……。證明：存在形如1…10…0的數，使得它是n的倍數。

證明：考慮數列1，11，111，…，$\overbrace{11\cdots11}^{n+1\text{個}1}$，根據抽屜原理，其中必有兩數$a$和$b$，使得$n\mid(a-b)$，其中$(a-b)$是形如1…10…0的數，得證。

【**例3**】在邊長爲1的正方形上任取5點，其中必有2點，它們之間的距離不超過$\sqrt{2}/2$。

證明：把正方形分爲四個相等的小正方形（圖1）。在正方形上任取5點，根據抽屜原理，其中必有2點落在同一個小正方形上，而小正方形上以對角線兩端點的距離最遠，並且等於$\sqrt{2}/2$，得證。

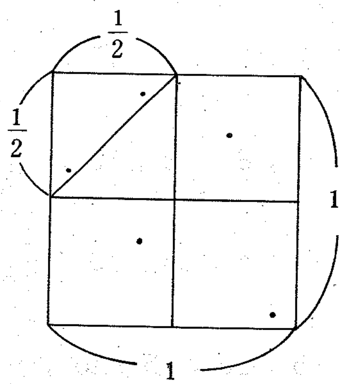

圖1

定義2：我們用$n!$表示$n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$。

【**例4**】$5=1^2+2^2$，$13=2^2+3^2$，$17=1^2+4^2$，$29=2^2+5^2$，…。

證明：形如$4k+1$的質數可以用兩個整數的平方和表示。

令P是形如$4k+1$的質數，我們有

引1：$P\mid\left[\left(\dfrac{P-1}{2}\right)!^2+1\right]$

證明：由威爾遜定理（Wilson's theorem）（註①）$P\mid[(P-1)!+1]$不難推出

$$P\mid\left[(-1)^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{P-1}{2}\right)!^2+1\right], \quad (1)$$

由於P是形如$4k+1$的質數，所以$\dfrac{P-1}{2}$是偶數。由$\dfrac{P-1}{2}$是偶數和(1)式，立即推出引1。

引2：如果$P\nmid a$，則存在兩個正整數x和y，使得$x<\sqrt{P}$，$y<\sqrt{P}$，並且$P\mid ax+y$或$P\mid ax-y$。

證明：令m是不超過$\sqrt{P}$的最大整數。由於P是質數，所以$\sqrt{P}$不是整數，故有$m<\sqrt{P}<m+1$。當x_i和y_i分別通過0，1，…，m時，ax_i-y_i取$(m+1)^2$個值，由於$(m+1)^2>P$，所以根據抽屜原理，存在兩個數ax_j-y_j及ax_k-y_k（$0\leq j\leq m$，$0\leq k\leq m$），使得$(ax_j-y_j)-(ax_k-y_k)=a(x_j-x_k)-(y_j-y_k)$被$p$整除，其中$x_j-x_k\leq m<\sqrt{P}$，$y_j-y_k\leq m<\sqrt{P}$，令

$$\begin{cases} x=x_j-x_k\,,\quad y=y_j-y_k \\ \text{如果}(x_j-x_k)\text{與}(y_j-y_k)\text{同號} \\ x=x_j-x_k\,,\;-y=y_j-y_k \\ \text{如果}(x_j-x_k)\text{與}(y_j-y_k)\text{異號} \end{cases}$$

代入上式，立即得證。

例 4 的證明：取$a=(\frac{P-1}{2})!$。由於$P\nmid a$，所以由引 2 知道，存在正整數x和y，使$P|ax+y$或$P|ax-y$，故有$P|(a^2x^2-y^2)$，再由引 1（$P|a^2y^2+y^2$），故有$P|a^2(x^2+y^2)$，由於$P|a^2$，因此$P|x^2+y^2$，所以$kP=x^2+y^2$，其中k是正整數，由於$x^2<P$，$y^2<P$，所以$k=1$，證畢。

【例5】如果d不是平方數，我們把方程

$$x^2-dy^2=1 \tag{+}$$

叫做佩爾方程（Pell's equation）。證明：佩爾方程有無窮多組整數解。

引3：存在一整數k，使方程

$$x^2-dy^2=k \tag{*}$$

有無窮多組整數解。

證明：見註②。

例 5 的證明：x可依被k除後所得的餘數分爲k類，同樣y亦可分爲k類，因而方程(*)的整解數（x，y）可分爲k^2類，由於方程(*)有無窮多組解，所以根據抽屜原理，其中必有一類至少有兩解，不妨設爲（x_1,y_1）及（x_2,y_2），則$k|(x_1-x_2)$及$k|(y_1-y_2)$。可以證明

$$x=\frac{x_1x_2-dy_1y_2}{k},\quad y=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{k}$$

都是整數，且是方程(+)的一組解；如果（x，y）是方程(+)的一組整數解，則對於任何大於 1 的正整數n，由

$$X+\sqrt{d}\,Y=(x+\sqrt{d}\,y)^n$$

決定的(X,Y)，也是方程(+)的整數解。（見註②）

【例6】在邊長爲 1 的正立方體內任取 9 點，證明：其中必有兩點，距離不超過$\sqrt{3}/2$。

【例7】在數列 1，2，3，…，$2n$中任取$n+1$個數，證明其中必有兩個數互質。

定義3：假設c是一條閉曲線，用直線連接c上任何兩點，如果直線的中點恒在c中，則我們說c是凸曲線。

【例8】在$x-y$平面上以原點爲對稱中心的凸曲線c，如果面積大於 4，則在曲線c上及其內部，必含有兩異於原點的格子點（即x,y都是整數的點）。

例 6、7、8 的證明留給讀者。

附　　註

註①：Hardy & Wright, An introduction to the theory of numbers, 5th edition, Oxford, 1981, p. 87.

註②：數論導引，凡異出版社，p. 286.

［作者系國立臺灣大學數學系學生］