# 記數法——算術發展的起步

**趙文敏**

**國立臺灣師範大學數學系**

算術這個名詞，係由英文字 arithmetic 或拉丁字 arithmetica翻譯而得，而這兩個字則是由希臘字 αριθμητικ'η轉變而來；但是，古希臘人用 αριθμητικ'η 這個字，其所指的意義却與我們所指的算術不相同，他們所稱的 arithmetic，乃是現代數學中的數論；至於我們所稱的算術，希臘人稱之爲 λογιστικ'η（轉成拉丁文就是 logistica ，轉成英文就是 logistic ），logistic這個字的意義是計算或推理，古希臘人用這個字來表示交易和商業方面所需要的各種實際的計算。

在近代數學中，arithmetic 這個字的用法事實上還沒有統一，例如，德國人把古希臘的 logistic 稱爲Rechnen ，而他們的Arithmetik乃用來表示有關數的理論性探討，換言之，仍是表示數論的意思。被譽爲數學史上三大數學家之一的Carl Gauss（1777～1855）是很著名的一位數論學家，他在數論方面的一部名著就是Disquisitiones Arithmeticae ，所用的書名中就有 arithmetic 這個字。從這位名家所寫的名著的書名，不難看出 arithmetic 乃表示數論這件事實了。

至於 logistic這個名詞所指的「實際計算」，在數學史上也曾出現許多意義相近的字，其中較重要的是 algorithm。當西元十二世紀的歐洲數學家翻譯阿拉伯代數學家Mohammed ibn-Musa al-Khowarizmi （780～850）的著作De numero indorum 時，由於不小心，不僅把 al-Khowarizmi 在書中所介紹的印度數字誤以爲是 al-Khowarizmi 所創，而且把該書寫成Liber Algorismi （ the book of al-Khowarizmi ），因此而創出了一個新字 algorism或 algorithm ；這個字所被賦予的意義乃是指與現代數字（即印度數字）有關的計算，有時候甚至指四則運算本身，甚至也指利用算盤的計算；因此，在意義上與 logistic 有些相似。早期的義大利作者們，像Cataneo（西元十六世紀），則因爲 logistic 意指實際的計算，而也使用 practica 這樣的字眼來代替。文藝復興時期的拉丁作者們像 Cuthbert Tonstall （1474～1559）則以 arte supputandi （ art of computing ）來代替 logistic

。西元十六、七世紀的荷蘭作者們則使用 ciphering 來代替 logistic 。西元十五世紀的義大利人則稱 logistic 爲minor art ，而把數論與代數稱爲major art 。

以希臘人所說的 logistic來說，它的內容應該包含記數法的演變，計算方法的改善，以及計算器械的演進等題材，探討這類題材，不僅可以看出人類數學思想發展的蛛絲馬跡，也可以觀察各個古老民族在基本計算工具的發展方面所具備的特色。本文中我們先介紹各種記數方法；因爲記數法乃是算術發展的第一項工作。

## 一、數之概念的形成

數的概念與計算的方法，早在有歷史記載的時期之前就已開始發展，所以，要探討人類的祖先如何發展出數的概念，基本上就有著困難存在；不過，歷史學家們却對亞洲、歐洲、美洲、澳洲、非洲等地的古老部落從事研究，然後從所得的了解中來“臆測”人類的祖先是如何地邁向文明。在這類研究中，人類的祖先如何發展出數的概念，自然是一個研究的重點。

舊石器時代（ Old Stone Age 或Paleolithicum ）的人類，居住洞穴，靠漁獵爲生，他們對數學所討論的“形”或許有所接觸，然而對於“數”方面的了解可能很少。此種現象可能持續到新石器時代（ New Stone Age 或Neolithicum ），當覆蓋歐、亞大陸的冰層融化、人類由遊牧時期進入定居、由漁獵進入農耕之後，由於交易行爲的出現，使得人類開始發展一些關於數的簡單語言。澳洲、美洲、非洲的許多部落，直到他們開始與白種人接觸時，還停留在這個階段。在這個階段中所使用的語言都是用來表示很具體的物品而很少有抽象的概念。

蘇格蘭經濟學家Adam Smith（ 1723～1790 ）曾經說過：數的語言——這種用來表現人類心靈所能形成的某些最抽象觀念的工具——它們的發展及使用是非常遲緩的。最初，數的概念只是定性的（ qualitative ）而不是定量的（ quantitative ），因爲人類的祖先最初只會分辨“不同性”，如一隻動物與許多隻動物在數量上的不同，小魚與鯨魚在大小方面的不同，圓的月亮與直的松樹在形狀上的不同等。然後，才從許多雜亂的經驗中發現了“相同性”，就在這類相同性的了解之後，人類文明中的數學與科學才開始萌芽。首先，人類可能是從一個人與許多人、一隻動物與許多動物、一棵樹與一座森林等之間的不同，而進一步發現一個人、一隻動物、一棵樹等之間有某種相同性——唯一；更進一步地，利用一一配對的方法，又發現兩隻手、兩隻脚、兩隻眼睛、兩隻耳朶、兩個鼻孔等之間的相同性。由這些發現而進展到得出一與二這種抽象概念，在數學的發展史上已經邁出了一大步；根據史學家的考證，這一大步可能在數十萬年前人類懂得用火的時候就邁出去了，而且這一大步既不是某一種族更不是某個人的成果，它是長久的經驗累積逐漸演進而得的。關於這一點，可以提出

來的證據至少有一項——語言（或文字）：有些語言如捷克語、芬蘭語、希臘語中名詞的單複數有三種型態，分別用在一種事物、兩種事物、及超過兩種事物的情形；而多數的現代語言則只有單數及複數兩種情形。這種情形顯示出人類的祖先最初只會計算一及二，超過二的情形則歸成一類：許多。另一種現象是：許多語言中的二與一半之寫法完全不同（如英文是 two 與 half ；法文是 deux 與 moitie ；俄文是 dva 與 pol ；匈牙利文是 ketto 與 tel ），但是從三開始則都具有某種相同性（例如，英文的 three 與 third ， four 與 fourth ， five 與 fifth 等）。這個現象或許可以說明人類先有一及二，而後有了倒數的概念，等到三以上的數命字之時，它們的倒數也一起命字了。如果再比較一與十一、二與十二的英文字，再比較三與十三以上的字（大抵上都是後面加上 teen ），更可以用來支持上面的說法了。

數學史家們認為人類的祖先是由「一一配對」抽象化而得出數的概念，這種看法並不完全是因為「一一配對」的方法較為具體且較直觀因而視為當然，根據考古學家在歐洲、非洲等地所發現的古物中，他們找到一些數千年前的野獸骨頭，上面刻有許多凹槽，數學史家們認為這些凹槽乃是先民們刻來做為計數之用的；換言之，當他們有了「一一配對」的觀念後，在計算物品的個數時，每數一件就刻一道凹槽來表示。當然，刻凹槽並不是唯一的辦法，堆小石子、在繩子上打結等都可以代替刻凹槽。

有了前面所介紹的計數方法之後，下一個步驟應該是選用一些提供人際溝通時所需的工具——語言及文字（或記號）。在語言及文字兩者之中，應該是語言比文字為早，因為“說”比“寫”更為需要。如此一來，人類才發展出“數的唸法”以及“數的寫法或表示記號”了。

## 二、數基或進位法

當人類發展出數的唸法及寫法之後，自然會發現表示數的語言及文字都需要很多，如果所有的數都要有完全不相關的唸法及表示記號，那就太不容易記憶了。於是，先民們就把數加以分群，然後用簡單的規則來決定各數的唸法及寫法。在史學家所接觸的未開化部落中，非洲赤道附近的矮小黑人（ Pygmies ）把 1，2，3，4，5，6 分別寫成

a，oa，ua，oa-oa，oa-oa-a，oa-oa-oa，

澳洲東南部Murray 河的土著把 1，2，3，4 分別寫成

enea，petcheval，petcheval-enea，petcheval-petcheval，

澳洲Kamilaroi 的土著則把 1，2，3，4，5，6 分別寫成

mal，bulan，guliba，bulan-bulan，bulan-guliba，guliba-guliba，

Magellan海峽（智利南端）南側的Tierra del Fuego群島上有一些稱為Yahgan Fuegian的土著，他們把1，2，3寫成

kaueli，kombai，maten，

而6則寫成akomaten，其意為另一個三（the other three）。南美洲有一部落所使用的計數方法為一，二，三，四，四和一，四和二，等等。

前面所舉的例子，或許可讓我們推測出一個結論：人類的祖先為了計數方便起見，把數分群時可能也用過以二為數基（即二進位），以三為數基，或以四為數基。

選用數基時，五、十、二十都是很容易被選上的，因為這些數與生俱來地出現在絕大多數人的身上：一隻手有五隻手指，兩手共十隻手指，手指與腳趾合計共二十隻。我們應該可以肯定地說，選用五、十、二十為數基的，他們都是以手指及腳趾來做「一一配對」的一方而演化出來的。南美洲某些部落所用的“五”字，其意義就是“手”。巴拉圭的一種方言中，“五”的意思是“一隻手的手指”，“十”的意思是“兩隻手的手指”，“二十”的意思是“兩隻手的手指與兩隻腳的腳趾”。即使在英文中，0，1，…，9等稱為digit（數字），digit這個字的原意正是“手指或腳趾”。在法文中，八十的寫法是quatre-vingt，其意義是四個二十（four-twenty）；九十寫成quatre-vingt-dix，其意義是四個二十及十（four-twenty-ten），甚至在較古老的法文中以six-vingt表示一百二十（six是法文的六），sept-vingt表示一百四十（sept是法文的七），huit-vingt表示一百六十（huit是法文的八）等，這些例子可說明二十曾經被選為計數時的數基。除了法文之外，在英文中，以score表示二十的用法是很普遍的，例如，八十七寫成four scores and seven，這應該也可以作為二十曾被選為數基的另一證據。

西元1937年，考古學家在捷克中部的Moravia挖掘出一根數千年前的小狼橈骨，約7吋長，上面刻有55道凹槽，分成兩部分，一組有25道凹槽，另一組為30道，中間以兩道較長的凹槽隔開，這些凹槽乃是分成「每五道一群」的方式，顯見是採用以五為數基的方法。

有許多證據顯示十二也曾被選為數基，這或許是因為一年大略有十二次月圓，也可能由於十二有許多“因數”，總之，時至今日，以十二做為單位的計數法仍然很多，例如，一呎有十二吋，古時的一磅有十二兩，英國幣制中一先令是十二便士，鐘面上是十二小時，一年有十二個月，更何況“十二個為一打，十二打為一籮”這種用法中，有dozen及gross這種專用字。

古巴比倫人以六十為數基，這是有案可稽的；即使是現代，計算時間及角度中的分與秒

，都還是以六十來進位。

## 三、手指記數法

除了發展出數的讀法以及數的寫法之外，先民們還發展出一種以手及手指的各種姿勢來表示數的方法。事實上，根據史學家們的看法，這種手指記數法比任何一種數的符號及數的名稱出現得更早。因爲當交易的雙方語言不通時，如果雙方有一種共同的手指記數法，那麼，交易仍然可以達成。除此之外，在計算過程中，利用手指記數法可以幫著“記住”一些必要的數。

這種手指記數法，自然要經過長久的時間才能發展完成。根據希臘歷史學家Herodotus（484～425 B. C.）的說法，當時的希臘人對這種手指記數法都很熟悉而且普遍地使用。事實上，這種記數法流傳甚廣，希伯萊人及阿拉伯人的文獻都有這方面的記載。後世對這種記數法的了解，最早是來自中世紀的一位英國僧侶Bede the Venerable（673～735），Bede在他的著作De loquela per gestum digitorum 中介紹了五十種手指記數符號，表示的數中最大的是1000000。 不過，關於這種手指記數法的介紹，最爲完善的應推義大利數學家Luca Pacioli（1445～1514）在西元1494年的著作Summa 以及德國人J. Aventinus在西元1522年的著作Abacus。

圖 1

右面的圖1乃是西元1140年在馬德里出版的一部名稱爲Biblioteca Nacional中抄錄Bede 之作品中的一個手指記數圖，圖中的人像所指示的數是2000：

圖2中的三十六個手指記數圖，乃是Pacioli 的Summa 中的一部分，其中所表示的數是1，2，…，9，10，20，…，90，100，200，…，900，1000，2000，…，9000：

圖3中的二十四個記數圖，乃是Aventinus的Abacus 中的一部分，其中所表示的數是5，6，7，8，9，50，60，70，80，90，500，600，700，800，900，5000，6000，7000，8000，9000，10000，20000，100000，200000；100以下的數都只用左手，而且其表示法與Pacioli 的寫法相同：

這類手指記數法，在數字的表示記號簡化，計算方法愈精密之後，自然逐漸被淘汰。目前爲聾啞者所設計的手語，其中的數字表示法也與這類手指記數法不相同。

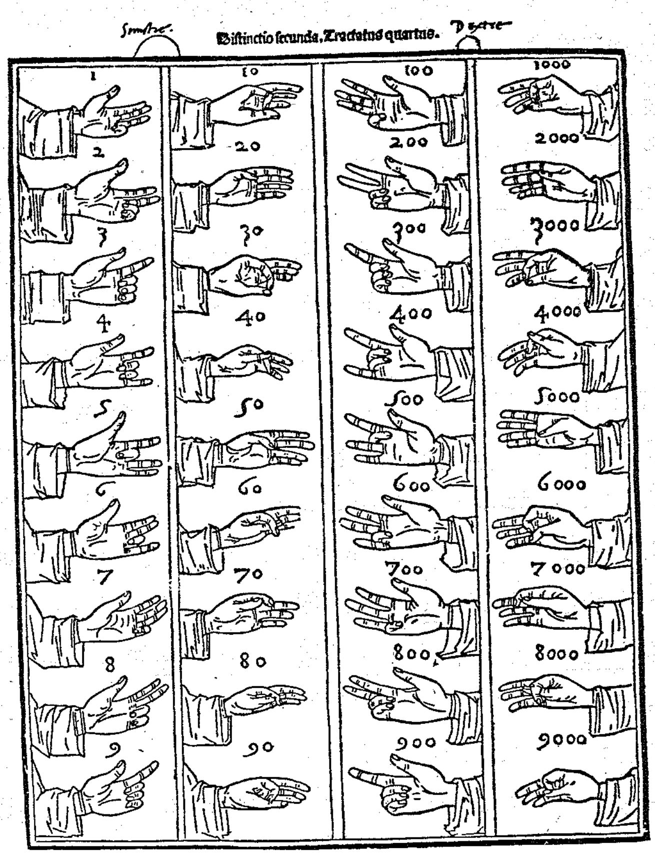


圖 2

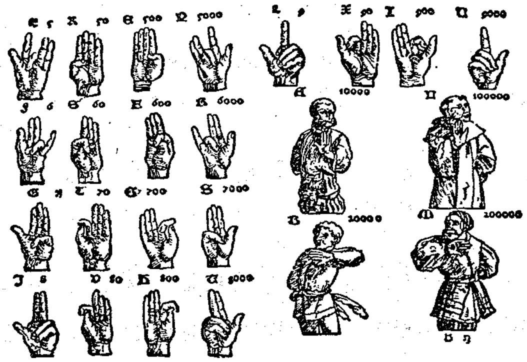


圖 3

## 四、巴比倫人的記數法

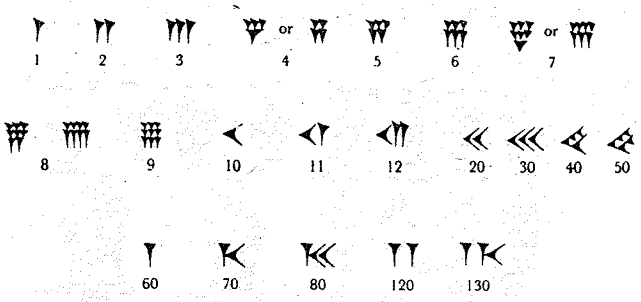
大約在紀元前3000年左右，在現代伊拉克境內的Tigris河與Euphrates河流域間的肥沃彎月形地帶，出現了人類最早的高度文明，這個地區，古人稱為Mesopotamia，原意為「

兩河之間」；這個被稱爲「文明的搖籃」的地區所發展出來的文化，或稱兩河文明，或稱西亞文化，或逕稱爲巴比倫文化。

後世對於巴比倫人的文明及數學的了解，大都依賴考古學家所挖掘出來的一些“瓦片”，這類瓦片都是由黏土在太陽下或爐子中烘乾而得的，當黏土還軟著時，巴比倫人利用一種尖筆在上面刻出各種資料，烘乾後這些資料就保存下來，只要瓦片沒有斷裂，其上的資料就不會被磨掉而很易保存。由於巴比倫人所刻出來的字都呈楔形，所以，巴比倫人的文字通常稱爲楔形文字（cuneiform）。由於這類瓦片不易損壞，所以，後世挖掘出來的瓦片相當多，單單在古Nippur 城邦之所在地就挖出了五萬多片。美國的Columbia, Pennsylvania，及Yale 等許多大學圖書館都藏有許多這類瓦片，其中有些的內容是數學。

雖然考古學家所挖掘出來的巴比倫瓦片數量甚多，然而巴比倫人的楔形文字之謎，却到西元1870年左右才被Grotefend 及Rawlinson 解開。當時由於發現了一處稱爲Behistun Cliff 的峭壁，峭壁上用波斯文、米總文（Medean）、亞述文（assyrian）刻著Darius 戰勝Cambyses的事蹟，由於亞述文與古巴比倫文頗有關聯，而波斯文則已爲部分學者所知；由此機會，後世才了解巴比倫人的楔形文字。不過，由巴比倫瓦片中翻譯整理他們的數學成就這件工作，主要的進展却是二十世紀三、四十年代的事，其中很重要的兩人是德國的Otto Neugebauer 與法國的Fr. Thurean-Dangin。

在巴比倫人的算術方面，以Akkadian 人的發展最爲突出，使用的數字記號如下：




這些記號其實並不完整，因爲表示1的記號，其實也用來表示60，3600等屬於$60^n$之形式的數；表示10的記號也用來表示600，36000等屬於$10\cdot60^n$之形式的數；通常都要依賴上下文來決定所表示的數是那一個。例如，上表中表示80的那個記號，也可能表示3620。

關於巴比倫人的數字記號，我們可以提出下面幾項特點：

(1)　1與10的表示記號是最基本的，由1到59的各數都是由這兩個基本記號拼在一塊來表示，例如，16表示成。

(2)　巴比倫人的記數法是一種相加記數法，也就是說，出現的各數字記號依其所表示之值相加所得就是整個記號所表示之值，例如，(1)所舉之記號有一個表示10的記號及六個表

示 1 的記號，故其值爲 $10+1+1+1+1+1+1=16$。

(3) 巴比倫人創了一個“減”的記號  ，例如， 表示 $40-3=37$。

(4) 巴比倫人的記數法中已有位值，所謂位值，乃是指不同位置的數字所表示的意義不同。以現代記號來說明，11 中左邊的 1 表示 $1\times 10$，而右邊的 1 則只表示 1。由於巴比倫人在數學及天文的計算上都採用六十進位，所以，像 59 這個數總共用十四個記號（五個 10 的記號及九個 1 的記號），爲了指出這些記號需要合併成一個數，巴比倫人通常都儘量把這些記號擠在一起，而當有位值的意義存在時，則把代表不同位值的數字記號留出一些空隙來隔開。例如，當他們寫  時，是表示 2，可是，寫成  時，則是表示 $2;2;2=2\times 60^2+1\times 60+2=7322$。

(5) 巴比倫人位值表示法中原本沒有零的記號來表示缺項，只是隔一段空間，這種做法當然很容易引起誤解，不過，在敍利亞王國統治的時代，他們創了一個分隔用的記號，例如

 表示 $1;0;4=1\times 60^2+0\times 60+4=3604$。

(6) 巴比倫人創了一些特殊分數的記號，例如， 表示 $\frac{1}{2}$， 表示 $\frac{1}{3}$， 表示 $\frac{2}{3}$。

(7) 數基方面並非絕對地使用六十進位，除了數學與天文的計算外，在時間、面積、重量、幣制方面也使用 24，12，10，6 等進位法。例如，他們以 me 表示一百，如 2 me 25 是指 225，又以 lîmu 表示 1000。

一般言之，巴比倫人的記數法中有著許多模糊不清之處。

## 五、埃及人的記數法

在古埃及文明的發展過程中，除了曾有Hyksos 人的短期入侵以及跟巴比倫文化的少許接觸之外（考古學家曾在Nile 河谷挖掘出一些大約紀元前 1500年流傳下來的楔形文字瓦片，稱爲Tell al-Amarna 瓦片），埃及的文明可以說是土生土長的。

古埃及人發明的文字是一種象形文字（hieroglyphic writing），亦即依照事物的形象來制定文字，這與我國的文字創始有類似的地方。不過，象形文字有如繪畫，書寫常感不便，後來逐漸力求簡化，大約在紀元前 2500年，遂產生了僧侶體（hieratic writing）以及通俗體（demotic writing）。在這些字體中，數字的表示記號也不相同。

古埃及人的書寫方法與巴比倫人不同。由於Nile 河中生長一種稱爲紙草（papyrus）的植物，埃及人將這種水草的莖葉取下，接疊而成“紙張”，用墨汁在這種紙草上書寫。由於這類紙草易於乾枯而碎裂，因此，除了刻在石頭上的象形文字之外，古埃及的資料流傳下來的非常少。這種紙草可說是西方最早的書寫工具，所以，英文中的paper（紙）也是由

papyrus 一字轉變而得。

埃及的象形文字，後世發現得比巴比倫的楔形文字要早。西元 1799 年，當 Napoleon 遠征埃及時，法國人在 Alexandria 附近的 Rosetta 發現了一塊石頭（現稱之為 Rosetta Stone），上面的資料是用三種文字寫成：希臘文，古埃及象形文字，及古埃及通俗體文字。於是，古埃及的象形文字才在一些懂得希臘文的學者們努力下翻譯出來。

埃及象形文字中的數字記號，是以十為數基，其中 1 以及 10 的乘冪之記號為

 表 1　　豎棒

 表 10　　脚跟骨

 表 100　　捲繩

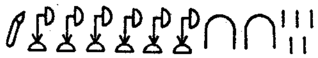
 表 1000　　蓮花

 表 10000　　手指

 表 100000　　蝌蚪

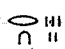
 表 1000000　　受驚的人

利用這些數字記號而採用相加記數法，就可以表示七位以下的所有正整數，例如，下面的記號表示 16025：



由於 10 的每個乘冪都有完全不相同的記號來表示，所以，排列順序就變得無關緊要，有時候左右排列，有時候上下排列，而且大小順序也可倒過來排列。因此，沒有位值的觀念。

除了正整數的表示記號之外，埃及的象形文字中，還有一個特殊記號用來表示正整數的倒數，他們的作法就是在一個整數記號上註一個卵形 （唸成 ro），這就表示這個整數的倒數，例如，

 $=\frac{1}{5}$　　 $=\frac{1}{10}$　　 $=\frac{1}{15}$

另外，他們還有幾個特殊記號表示幾個特殊分數： 表示 $\frac{1}{2}$； 表示 $\frac{2}{3}$；× 表示 $\frac{1}{4}$。

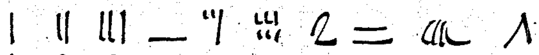
刻在石頭上的埃及象形文字所提示的數學，大抵上都屬於天文方面的計算與測量，有關古埃及數學的了解，只好借助紙草上的資料。後世所發現的古埃及紙草並不太多，就數學而

言，較重要的是Ahmes紙草（或稱Rhind紙草）及Moscow紙草，其他則如Kahun紙草，Berlin紙草，Rollin紙草，及Harris紙草。

Ahmes紙草是西元1858年蘇格蘭考古學家Henry Rhind在Nile河附近一座城市買到的，長18呎，高1呎，因此，稱之爲Rhind紙草；又因這卷紙草是紀元前1650年左右Ahmes依據古埃及中王國時代的資料抄寫流傳下來的，因此，也稱爲Ahmes紙草。這卷紙草中有85道附解答的問題，使用僧侶體文字，是後世對古埃及數學之探討上最重要的一份資料。現存於大英博物館。

Moscow紙草是西元1893年在埃及買到的，它是紀元前1850年左右流傳下來的，有18呎長，3吋寬，其中有25題。現存於Moscow。

埃及人的僧侶體文字中，數字記號與象形文字中的數字記號不相同，由1至10的僧侶體數字記號如下：



1　2　3　4　5　6　7　8　9　10

至於分數，則是把象形文字中的卵形改成一點。

## 六、印度人的記數法

約在紀元前2000年左右，Aryan人入主印度，其後的一千年間，印度尚無文字，也沒有歷史記錄；後來才由西亞傳入字母而發展出梵文（sanskrit）。所以，現代史家對印度上古史無法作系統的敍述，至於有關這段時期的數學成就更是無案可稽。其後則是依賴許多宗教著作才得以了解有關古印度文明的一些片段消息，除了這些宗教著作之外，提供古印度文明之資料的重要著作是孔雀王朝（Maurya dynasty, 321～184 B.C.）時期所留傳下來的兩大史詩Mahabharata與Ramayana。

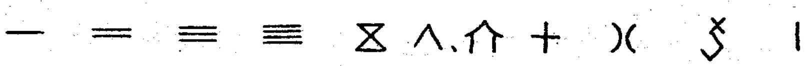
在文明的發展過程中，印度受到許多外來的影響，波斯人、希臘人、阿拉伯人都曾經攻入Indus河流域；大月氏人甚至在印度北部建立過Kusha王朝。在文明的影響上，中國人在印度扮演過很重要的角色，東晉高僧法顯在印度的Gupta王朝間赴印度取經；唐太宗時高僧玄奘也赴印度取經，這次取經的使命促使了中、印兩國互派使節，往還密切。西元647年（唐太宗貞觀二十一年），唐使王玄策平定印度宰相Arjuna之亂，而使我國對印度的影響到達最高峯，一直到唐玄宗時代，印度對我國朝貢不絕。

在印度的現代梵文中，1，2，⋯，9，0的表示記號依序如下頁所示：

驗，都刻在龜甲或獸骨上記錄下來。由於這類記錄的內容大都與占卜有關，所以後世把這類記錄稱爲卜辭。

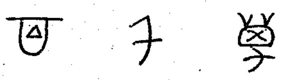
在卜辭中，常常記載著戰爭中殺掉或俘獲敵人的數目、狩獵時獵得禽獸的數目、祭祀時宰殺牲畜的數目等等，例如，「八日辛亥允戈伐二千六百五十六人」，意思是說，八日辛亥那一天，在戰爭中殺死了二千六百五十六個人。又如，「五百四旬又七日」，意思是五百四十七天。這些詞句已經告訴我們一件很重要的事，那就是：在甲骨文所記載的年代裡，中國人就以十爲數基，或者說，採用十進位法。因爲甲骨文中的卜辭是商朝後期的記錄，所以，我們可以說，至少從紀元前一千四百年起，中國人就採用十進位法；而後代的算學典籍又告訴我們，從那個時代起就沒有改用其他的進位法。不過，在甲骨文中，「2656」並不是像現代寫成或讀作「二千六百五十六」等七個中國字，而是採用合寫的方法，我們介紹於下。

在甲骨文中，一至十的象形文字大致如下：

甲骨文：

現代文：一　二　三　四　五　六　七　八　九　十

甲骨文中最大的數目是三萬，百、十、萬的寫法如下：

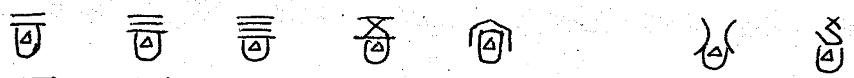
甲骨文：

現代文：百　千　萬

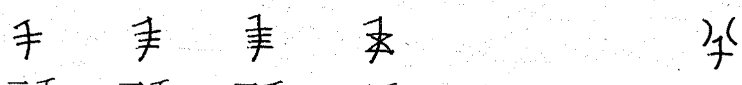
二十、三十、…、二百、三百、…、二千、…、三萬等數目，合寫如下：

甲骨文：

現代文：二十　三十　四十　五十　六十　七十　八十

甲骨文：

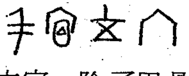
現代文：二百　三百　四百　五百　六百　八百　九百

甲骨文：

現代文：二千　三千　四千　五千　八千

甲骨文：

現代文：三萬

例如，二千六百五十六在甲骨文中記作。

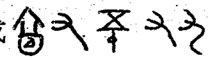
保存下來一直流傳至今的中國古代文字，除了甲骨文（紀元前十四世紀至前十一世紀）

之外，還有一種鑄商青銅器上面的文字，這種文字稱爲鐘鼎文或金文。據考證，鐘鼎文大致是紀元前十世紀至前三世紀（周朝）所用的文字。其中有關數字的記法大都與甲骨文的記法相似。不同的地方有下面幾點：

(1) 十寫成。

(2) 四除了寫成之外，還可以寫成或。

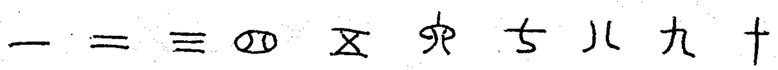
(3) 九的形狀略有改變，由變成。

(4) 千、百、十、個之間，都以“又”隔間。例如，六百五十九寫成，即六百又五十又九。

(5) 二十、三十、四十也分別可以寫成。

(6) 五十、六十、八十、九十等字採用合寫法時，代表十的記號寫在下側。例如，八十爲。

到了漢朝以後，記數方法中的“又”字不再使用，二十、三十、…等的合寫法也取消，換句話說，記數方法與現代中文方法相同。字的形狀也與現代漢字大致相同。例如，一至十的寫法如下：

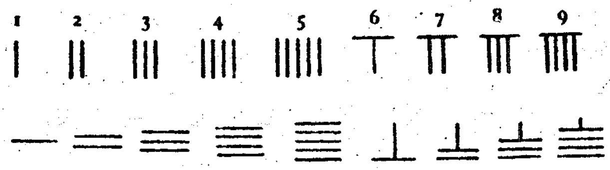


至此，中文記數法可以說大致定型了。

除了前面所介紹的記數法之外，在中國算學史上還有一種很重要的記數方法是與計算工具有關的。在明朝以前，中國人都使用算籌來表示各種數目，以及進行各種計算。由於算籌乃是一些小竹棍，所以只能擺出直的線紋。事實上，以算籌來表示一至九（或者說寫成算籌字體），其方式有下述兩種：

縱式：

橫式：



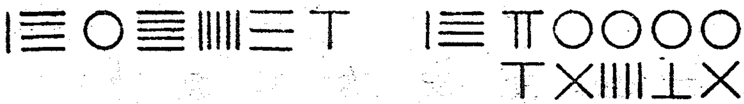

利用這種字體來表示數目時，其方法則像孫子算經上卷中所說的：「其算之法，先識其位。一從十橫，百立千僵。千十相望，百萬相當。」在夏侯陽算經上卷中的說法則是：「夫乘除之法，先明九九。一從十橫，百立千僵。千十相望，萬百相當。滿六以上，五在上方。六不積算，五不單張」。後面四句的意思是說，從六開始各數的表示法中，不要用累積的方式以六根竹籌代表六，而是把一根竹籌擺在上方來“以一當五”，但五這個數本身却不能用一根竹籌來表示。至於前面所說的「一從十橫，百立千僵」，其意思是：個位、百位、……等

$10^{2n}$的位，以縱式寫法來表示；十位、千位、…等$10^{2n-1}$的位，以橫式寫法來表示。例如，378表示成  。顯然地，這種表示法也是根據十進位制。

觀察前面兩種記數法，可以發現古代的中國記數法中也沒有零的表示法。事實上，古代算書中，通常都把零省略不寫。例如，唐朝王孝通所著緝古算經（西元七世紀）中第十六問中就有「四千三十六五分之一」，其中 $4036\frac{1}{5}$ 中的零就省略未寫。至於算籌的表示法，則在需要零的地方空出一格。以圈○來表示零的做法，是從何時開始，已不可考。但印刷物中最早出現○的，是西元1247年南宋秦九韶所著的數書九章，其中有一個例子是將

$$1470000-64464=1405536$$

表示成



有人以爲中國人使用的零（○）是由印度傳入中國的，不過，却找不到證據；因爲中國數學家們也可能由北宋理學大師周敦頤的太極圖假借而創出零的記號。

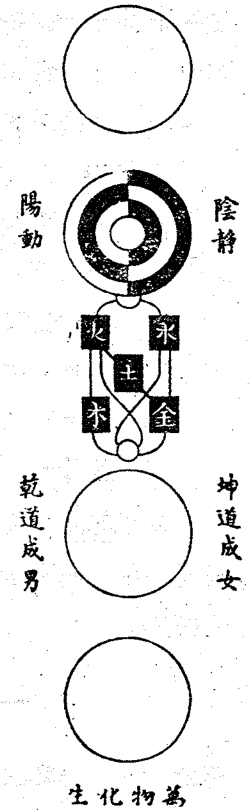
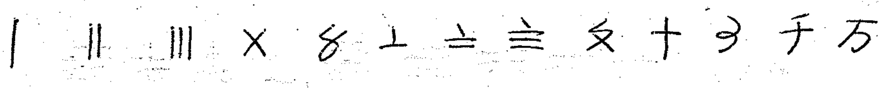



圖 4　周敦頤的大極圖

除了標準記數法與算籌字體之外，中國人表示數字的方法還有兩種，其一是大寫的國字:

壹（弌）貳（弍）叁肆伍陸柒捌玖拾佰仟

另一則是商用字碼：



前者不僅典雅，而且不易竄改，所以，從漢朝（紀元前一世紀）以來，就逐漸被社會所採用，但數學書籍却沒使用。至於後者，乃是商場中習用的數字，據說是唐朝流傳下來的，可能係脫胎於算籌字體。

## 八、希臘人的記數法

希臘人最早向腓尼基人（Phoenician）學到一些只有子音的字母，然後加上母音而成希

臘字母。他們的數字記號則引用字母來表示。

希臘的記數法，有兩個主要的系統，一個是Attic（或稱Herodianic）記號，另一個是Ionian系統（或稱為字母系統）。Attic系統可能出現得較早，後世發現的碑銘中，使用Attic數字的，最早是454 B.C.，最晚是95 B.C.。不過，在亞歷山大文化的初期，Attic數字就逐漸被Ionian系統所取代，一直到現代通用的印度－阿拉伯數字通行歐洲之前，Ionian系統都是希臘人所使用的記數法。

在Attic系統中，希臘人使用六個記號而依相加的原則來表示五位以下的正整數，這些記號如下：

(1)　1的表示法與中國算籌字體的縱式寫法相同。

(2)　5在希臘文中是ΠΕΝΤΕ（當時希臘只有大寫字母），乃取其第一個字母Π的古老寫法Γ表示5。

(3)　10在希臘文中是ΔΕΚΑ，乃取其第一個字母Δ表示10。

(4)　100在希臘文中是HEKATON，乃取其第一個字母H表示100。

(5)　1000在希臘文中是XΙΛΙΟΙ，乃取其第一個字母X表示1000。

(6)　10000在希臘文中是ΜΥΡΙΟΙ，乃取其第一個字母M表示10000。

除了這六個基本記號之外，代表5的Γ可以與Δ、H、X、M等結合成𐅄、𐅅、𐅆、𐅇，而分列表示50、500、5000、50000。利用這些記號，根據相加原則，五位以下的正整數都可以表示。例如，45678表示成

MMMM𐅆𐅅H𐅄ΔΔΓIII

Ionian系統中，數字全都以字母表示，從1至9、10、20、…、90、100、200、…、900共有二十七個數，但希臘字母却只有二十四個，所以，他們又選出三個更古老的字母來湊成二十七個（下表中表示6、90、900的三個記號就是新添的），這二十七個字母所表示的數如下：

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Α | Β | Γ | Δ | Ε | F | Ζ | Η | Θ | Ι | Κ | Λ | Μ | Ν |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| Ξ | Ο | Π | Ϙ | Ρ | Σ | Τ | Υ | Φ | Χ | Ψ | Ω | Ϡ | |
| 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | |

當希臘人有了小寫字母之後，他們改用小寫字母來表示數，如下表所示：

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| α | β | γ | δ | ϵ | ϛ | ζ | η | θ | ι | κ | λ | μ | ν |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
| ξ | ο | π | ϙ | ρ | σ | τ | υ | φ | χ | ψ | ω | ϡ | |
| 60 | 70 | 80 | 90 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | |

例如，888表示成$\omega\pi\eta$。這種表示記號只能用來表示一位、二位、及三位數，希臘人另創一招來表示千：在表示1至9的九個字母左側加上一撇時，就表示該數乘以1000：

| ,α | ,β | ,γ | ,δ | ,ε | ,ς | ,ζ | ,η | ,θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 | 6000 | 7000 | 8000 | 9000 |

例如，8888表示成$,\eta\omega\pi\eta$。上萬的數怎麼辦呢？希臘人又想了一招：由1至9999的任何數，寫在M上方或後面時，就表示該數乘以一萬，同時在千位與萬位之間以一點隔開。例如，88888888表示成M$,\eta\omega\pi\eta\cdot,\eta\omega\pi\eta$。這麼一來，八位以下的數都可以表示了。

## 九、羅馬人的記數法

在歷史舞臺上，羅馬人的勳業是值得大書特書的。可是，在數學方面，羅馬人却毫無貢獻。值得一提的學者只有西元六世紀的Boethius，他的數學著作有一本討論算術，另一本討論幾何。不過，其中並沒有創新的內容，算術部分乃是Nicomachus之Introductio的轉述，幾何部分則以Euclid之Elements爲基礎。他的重要貢獻應該是將希臘人的著作轉譯成拉丁文這件工作上。

羅馬人所用的記數法與希臘人的Attic系統非常相似。他們的記號如下：

(1) I表示1；

(2) V表示5；

(3) X表示10；

(4) L表示50；

(5) C表示100；

(6) D表示500；

(7) M表示1000；

表示一個數時，由左向右書寫，如果沒有4、9、40、90、400、900這些數，則採用相加原則，且大數在左、小數在右。例如，2367表示成MMCCCLXVII。但是，4看成5－1，而表示成IV，同理，9表示成IX，40表示成XL，90表示成XC，400表示成CD，900表示成CM。例如，1249表示成MCCXLIX。

## 十、馬雅人的記數法

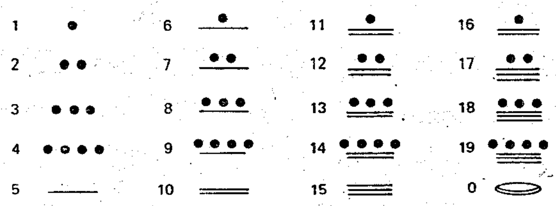
在墨西哥東南方有一個稱爲Yucatan的半島，西元1517年，西班牙探險家Francisco de Cordoba在這個半島登陸，發現這個半島上殘留著馬雅（Maya）人高度文明的遺跡，半島

上的居民馬雅人已在前個世紀多次戰爭中死亡殆盡。這塊土地很快就被當時正努力擴張海權的歐洲人所佔領。西元1565年，有一位名叫Diego de Landa的人，他原是在Yucatan北方一個叫做Merida（今屬墨西哥）的城市中擔任主教，寫了一本關於馬雅人的歷史書Relacion de las Cosas de Yucatan（西元1864 年出版），有關馬雅人在歐洲人入侵前的史實才流傳下來。不過，有些學者却以爲早在紀元前三千多年，馬雅人已在Yucatan半島上定居。

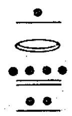
馬雅人所使用的記數法相當別緻。基本上是二十進位法而且有位值的概念。不過，却不像十進位制中，各位值所表示的數依次是 $1$，$10$，$10^2$，$10^3$，$10^4$，…。馬雅人的“二十進位制”中，各位值所表示的數依次是 $1$，$20$，$18\times20$，$18\times20^2$，$18\times20^3$，…。換言之，若有一數從高位值至低位值的數字依次爲 $6$，$0$，$14$，$7$，則此數以十進位表示的值爲

$$6\times18\times20^2+0\times18\times20+14\times20+7=43487$$

由於數基爲二十，所以，由1至19都需有特定記號。馬雅人的記號如下：




以橫線表示5，在中國人的縱式算籌字體中也使用過；而以點來表示1，則是他們所特有的（顯然這不是由手指引出來的構想）；0的記號更是與衆不同。此外，還有一個不同點：馬雅人寫其他數時，不是採用自左而右，而是由上往下。例如，前面的43487以馬雅人記數法表示，乃是



## 十一、印度數字的西傳

印度人的數字記號何時開始傳到其他地方，已無法考證。後世可考的最早記錄，是西元662年一位敍利亞主教Severus Sebokht所流傳下來的作品，其中他提到東方的印度人有卓越的計算方法，而他們所作的計算都是利用九個記號。可見在西元七世紀中葉，Mesopotamia 地區的修道院人士已經了解印度的數字記號。

第二個可考的記錄，則是西元773年左右，al-Fazari將印度數學家Brahmagupta（西元七世紀）的天文著作Brahmasphuta Siddhāntas由梵文譯成阿拉伯文，從這時期起，印印數字就傳到巴格達。

阿拉伯的著名代數學家Mohammed ibn Musa al-Khowarizmi（780～850）在一部稱爲De numero indorum（Concerning the Hindu Art of Reckoning）的著作中，將印度數字做了詳盡的介紹，對印度數字的傳遍歐洲，功勞甚大。或許因爲如此，使得後世誤以爲這種數字是源自阿拉伯，而不知其實是源自印度。De numero indorum一書，主要是根據前段所提的Siddhāntas寫成的，其阿拉伯文本已失傳，只有拉丁文譯本流傳下來。

印度數字傳入東阿拉伯之後，其形式略有改變。其後，由阿拉伯人傳入西班牙（當時的西阿拉伯帝國），形式又再改變，西班牙人把這種數字稱爲Gobâr數字或沙土數字，這個名稱可能因爲它們都是在鋪上沙土的算盤上進行計算的緣故。

在阿拉伯帝國轄區以外，最早了解並傳授印度數字的歐洲學者是法國人Gerbert（940～1003，從999年至1003年間，他成爲教皇Sylvester 二世）。他接觸到印度-阿拉伯數字的可能原因，是他在西元967年到過西班牙，才有機會學到這種數字。Gerbert之後的兩百年間，印度-阿拉伯數字並沒有在歐洲盛行，印度-阿拉伯數字能夠逐漸取代其他數字，義大利數學家Leonardo Fibonacci（1180～1250）之功不可沒。

Fibonacci出生於Pisa，幼年曾向一位回教徒老師學習數學，年長後又到埃及、敍利亞、希臘等地遊歷，這些經驗使他精通阿拉伯的代數方法以及印度-阿拉伯數字。西元1202年，Fibonacci寫成Liber Abaci一書，其中介紹阿拉伯人的記數方法，並指出其較羅馬數字優越之處，他極力鼓吹拉丁人使用印度-阿拉伯數字。由於西元十三、十四世紀的歐洲商業大都掌握在義大利人手裡，爲了與阿拉伯國家通商方便起見，原本對印度-阿拉伯數字稍有接觸的義大利商人，就逐漸採用這種數字。大約在西元十三世紀中葉，印度-阿拉伯數字就已在商場上通行了。

印度-阿拉伯數字能在歐洲學術界中通行，另一部著作也必須一提。西元十三世紀在西班牙境內有個稱爲Castile的小國，國王Alfonso十世（1223～1284）人稱其爲智者（the Wise），他在西元1252年左右根據阿拉伯人觀察的資料，製成許多天文用途的表。這部稱爲Alfonsine Tables的著作，發行甚廣，同時又以印度-阿拉伯數字寫成，對於這種數字被引進歐洲科學界，亦有其貢獻。在西元十三世紀末葉，歐洲科學界人士都已熟悉了印度-阿拉伯數字，到了西元1400年，大部分科學著作都使用這種數字來書寫了。

下圖可以看出印度-阿拉伯數字字形的改變，一般而言，在西元十五世紀以後，其字形就與現代所使用的字形相同了。

950年左右印度所用的數字

東阿拉伯帝國所用的數字

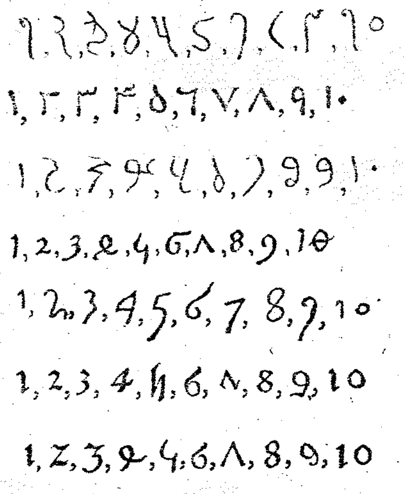
1100年左右阿拉伯的Gobar 數字

1385年左右出現在德國的數字

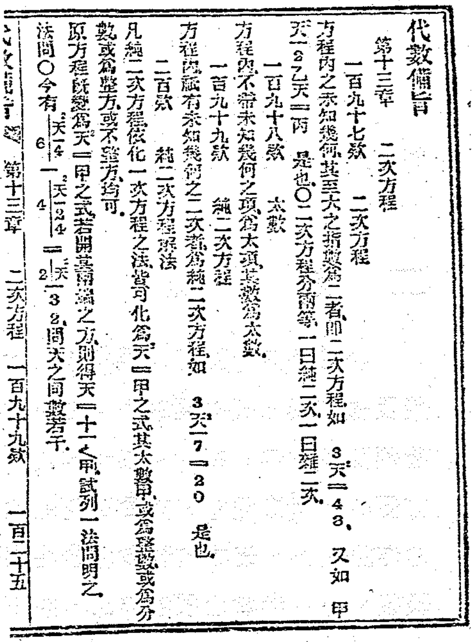
1400年左右出現在歐洲的數字

1480年出現在歐洲的數字

1482年出現在蘇格蘭的數字



至於東方的中國，阿拉伯數字出現在國內數學書籍中，已是西元1880年以後的事。當時官、私立學堂與教會學校所採用的數學教科書，像筆算數學、代數備旨、形學備旨、八線備旨、代形合參等都是由英文轉譯成中文，阿拉伯數字都沿用在譯本之中。參看下圖5。



代數備旨

第十三章　二次方程

一百九十七款　二次方程

方程內之未知幾何其至大之指數爲二者，即二次方程，如 $3天^2=48$，又如 $甲天^2+2乙天=丙$ 是也。○二次方程分兩等，一曰純二次，一曰雜二次。

一百九十八款　太數

方程內不帶未知幾何之項，爲太項，其數爲太數。

一百九十九款　純二次方程

方程內祇有未知幾何之二次者，爲純二次方程，如 $3天^2-7=20$ 是也。

二百款　純二次方程解法

凡純二次方程，依化一次方程之法，皆可化爲 $天^2=甲$ 之式，其太數甲，或爲整數，或爲分數，或爲整方，或不整方，均可。

原方程既變爲 $天^2=甲$ 之式，若開其兩端之方，則得 $天=\pm\sqrt{甲}$。試列一法，以明之。

法問○今有 $\frac{天^2-4}{6}-\frac{天^2-24}{4}=\frac{天^2}{2}-32$，問天之同數若干。

代數備旨　第十三章　二次方程　一百九十九款　一百二十五

圖5　代數備旨書影

## 參考文獻


1. 李子儼：中算史論叢㈢，台灣商務印書館發行。
2. 李儼：中國古代數學簡史，九章出版社。
3. 李約瑟（瀋傳譯）：中國之科學與文明，第四冊，台灣商務印書館發行。
4. Ball, W. W., A short account of the history of mathematics, Dover (reprint), 1960.
5. Boyer, C. B., A history of mathematics, 1968.
6. Eves, H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and company, Inc., 1953.
7. Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, 1972.
8. Smith, D. E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publication, Inc., 1953.