

學 數 學

Mathematics Tomorrow

Learning Mathematics

Anneli Lax and

Giuliana Groat 原作

石厚高譯

臺北市立建國高級中學

前 言：

一年前我們著手為文學院一年級新生設計數學課程，這些學生在入學前所受的數學教育都很差，這種現象並不是只有本校如此，遍及全國的同行也在作類似的嘗試，對於這種新任務有關的問題，他們也同樣的缺乏經驗，例如學習心理學，小學與中學的教育，評鑑學生、老師與課程的方法。

由於我們在讀大學時一些必修課程的關係，我們對蘇格拉底（Socrates）、盧梭（Rousseau）、蒙特梭利（Montessori）、杜威（Dewey）與皮亞傑（Piaget）的思想甚為熟悉；不過我們並沒有接受他們或其他人的特殊教育理論。我們中的一個有幸見過庫朗（Courant）與波里亞（Pólya），他試著分析此二人教學法成功的秘密；我們的結論是他二人教學法與其他傑出的老師是一樣的不能分析也不局限於一域的。最後一年我們讀了很多有關數學教學的資料，發現很多肯定性的貢獻，不過並沒有真正新的構想。一項可能的例外是最近的腦部研究以瞭解成

人與兒童在學習方式，以及一般思想處理性質上的差異。雖然如此，我們最近的想法以及我們在教學、指導與觀察大學生的豐富經驗，導致我們形成強烈的意見。

這篇文章的目的是要把我們的觀點與發現來與下列諸君共享：他們正要幫助準備不夠的中學畢業生順利地銜接大學學業，或者是那些要改進他們大學的學前教育或訓練的教育工作者。我們不是要在這裏對整個問題作說明，也不是要介紹某一種特殊方法。因為有效的計畫不能從一校移植往另一校；學生人數與來源也都有所不同，而每種計畫也似乎都與設計人的個性有密切的關連。

傳統上，大學教授被要求繼續研究以及訓練學生作更上層樓的工作。他們可能會很高興的介紹各種不同的知識領域給學生，指導他們並參與他們的研究，可是一般來說他們並不認為替學生整理功課以建立必須的基礎是他們的責任，也不給漠不關心的學生高度引起動機的談話。這並不是詔上驕下的說法；只不過他們不認為這是份內的工作，也不知道該怎麼作。可是一旦成為他們該作的事，有些人也會作得很好；因為他們至少都具備好老師的一項先決條件：深入而具體的瞭解他們的訓練目標；可是他們不能完成他們的首要功能。所以，當學生們準備好了，大學的教學與研究齊頭並進的時候，學生能作的與大學所能提供的會分道揚鑣，隔閡愈深。最後，解決這種困境最有效的辦法就是加強大學的學前訓練；同時這種隔閡必須在大學中努力消除。

大學的教學與研究齊頭並進的時候，學生能作的與大學所能提供的分道揚鑣，隔閡愈深

今天進入大學之門的學生這麼多，而對語文及數學的運用能力如是貧乏，面對這個事實我們有了爭執。無疑的愈早給學生接觸面較廣而較具

體的訓練，學生對未來世界的適應與決定方向便更具選擇性與彈性。無論如何，我們的大學似乎是變成了供應社會需要的工具，那些人須要那種證書與執照以備將來雇用。大學學位變成了進入各行各業不可或缺的條件，而學校參與了這種分類的處理。今天，社會、經濟與文化的需求在不斷改變中，教育應該提供一個較寬廣的心智與課程基礎的時候，而教學却採用標準化的多重選擇題的短期目標措施。這樣便犧牲了數學的主題，對全體學生都很重要的思維過程亦無餘力作充分關注。

標準化的多重選擇測驗……既不能規定標準也不能維持標準

既然 SAT 與 GRE 等措施是用來衡量學生程度，同時也影響到教育決策，那麼我們應該問：這些測驗可信賴以鑑定學生的長處與弱點嗎？我想不能。標準化目標的多重選擇測驗是原始而又荒唐的衡量措施。它們既不能規定標準也不能維持標準，而只標準化了（就大量生產方面而論）技巧的獲得，也不能客觀的讓受測人不受教育背景的影響。例如：爲了儘量減少在語文方面的依賴，有些數學測驗避免文字問題——數學能力的一種重要表現工具——而代之以數學的專門用語。這些專門用語是在參加考試前碰巧學過的人才可能瞭解。參加考試的人可能會瞭解這種數學觀念而不瞭解這個數學專門用語，這種差距由測驗的成績是永遠看不出來的。我們無法阻止有天份的學生儘量考高分，他們用老練的數學思想與估計發展一套參加考試的策略。我們孕育了一種數學技巧，勿寧說是一種相當狹窄的技巧。

數學是個威脅

爲什麼在學校教的各種科目中，數學對這麼

多的學生構成特殊威脅？個中原因有來自它本身特性者，它的古老根源，它的快速成長，普遍應用的要求。也有來自數學老師者，他們自己對課程的領會，官僚的學校行政施於他們的壓力以及他們對於訓練學生使合乎社會需要這個角色的認識。最後的一項因素則是學生在學校中對數學的態度的問題。讓我們把它逐一的仔細道來。數學是一種思維方式，它須要相當的專注。它的古典結果的發展曾耗時數世紀之久，並已表成邏輯形式的嚴謹層次。所有人類的追蹤方式——常識、直覺、猜測、錯的起步——皆已滅跡。此外，很熟練的掌握了它的基本技巧後，就像學習演奏樂器一樣，須要運用特殊符號把數學的運算作很多次演練。它的說明須使用相當特殊的非會話的語言：有定義的新名詞，也有已知的名詞而用在數學語言中它的意義受到限制或完全改變。這種精確表示的語言在現實生活中甚少強調，因爲它所表示的事物是抽象的與教室外的生活鮮有關連。

教師愈是焦急，他就愈走上記憶公式與固定程序解題的道路

多數大學學前教育的數學教師發現數學是困難的。他們被一些不能澈底瞭解的主題所困擾。也有一些老師對學生所問問題，學生很快的掌握並應用一個新觀念，或解釋一種策略而與老師解題方式不同而感到受威脅。教師愈是焦急，他就愈走上記憶公式與固定程序解題的道路。除此之外，他受到趕進度的壓力而無時間傾聽學生所慣用的不清楚的解釋，更談不上鼓勵班上的學生尋求解決問題的方法或探討各種規則的來源。畢竟上級可以由學生考試的表現來評鑑教師。這些老師不知道多一份觀察，對學生不同的想法與學習方式多一份密切關注，提供一個學生敢於發表他們的想法的環境，最後都可能導致學生表現得更好些，甚至在簡單的考試中亦復如是。他觀察到

多數學生對清楚的表達自己與瞭解簡潔敘述有困難，可是他並不用他的數學課對學生作所謂的語文訓練。即令老師一開始就作這種教導方法，在官僚的學校行政制度下，也會碰到困難。保持跟得上時代的應用甚至須要更大的努力。很多老師經驗到面對數學家在工廠或大學工作時的“用時方恨少”的感覺與日俱增。這些老師逐漸從他們的訓練中孤立起來。他們所教的東西也與外面世界隔絕，並且彼此也孤立。數學被分成代數、幾何、三角、微積分等；彼此間少有聯繫，學生忘了上學期所學過的東西是很平常的。由於過份強調結果而不注意處理過程，這些課程間一項最自然的聯繫被忽略了，那就是思考的過程。在這種情形下，數學的功力與快樂無法受到鑑賞。

當然，也有些最優秀的老師與行政人員，他們並不依樣畫葫蘆。我們見到不平凡的數學老師正在行動中；我們遇到受過最優異訓練、學習慾強烈的學生刺激了整個班級的氣氛。在很多中學有活躍的數學俱樂部；同校教師間訂有研究計畫；有科學展覽會與數學競試，以鼓勵大家努力合作創造。很多這種熱烈活動都是在一位熱情的老師指導下。不過，當狹窄目標的訓練在這一行越來越多時，這些熱心的人會稀少，倒是個大危機。

問題與答案

學生在數學上的表現可以由他作對問題正確答案的百分比來決定。數學比其他科更清楚而且更容易定義、正確答案！然而很不幸的導致正確答案的處理過程彼此往往無關。如果教學的工作是在導出正確答案的路上鋪上很多要記憶的規則，學生發現他們的創造能力無用武之地。他們不知道數學必須要用思維；而他們把數學聯想成一堆要記憶的公式與運算法。他們感覺到數學用來評估學生比其他科目的次數多得多，那些不善於

根據強記的規則來運用符號的學生，結果都未能達到合格標準。於是很多學生對他們自己的能力開始發生懷疑。學生所顯示最容易受到的傷害是心理障礙與恐懼，這些傷害常由老師的影響而加劇，而老師也受到相似的焦慮和恐懼。

每一科的老師都鼓勵學生在比賽中得高分出類拔萃，在數學中能匆匆一瞥就得到正確答案的被視為“伶俐”，其他都是“笨蛋”，在老師的眼中後者都須要“輔導”。爲了不作同儕輕視的犧牲者，不懂的學生在教室中就不問問題。（這種表現並不限於在數學課中。我們常聽說小學一年級的學生就有這種現象，有的能讀，有的不能；後者感到自卑就想法掩飾他的不懂，最後難免被淘汰。）

學數學不問問題有特別不良的後果。同一論題後面要講到的課程可能就要用到那些原來聽不懂又不敢問的題材，那他就註定了不能瞭解這個論題的全部系列——令人沮喪的經驗。此外，他的迷惑之源不像其他科目，少有可能在教室外弄清楚，因為通常教的數學與普通活動鮮有關連；疑點無法澄清。不問問題的另一後果是在解題時全班學生被剝奪了互相合作以練習弄清楚問題與答案。我們不能疏忽講解清楚的藝術，這就是讓他人如何學習數學的思路歷程，也是我們爲了達成教學目標所應加以組織的工作。（學習把一種方法作清楚的口頭敘述，有一項附帶好處是：在設計電子計算機程式時，寫出清楚的指令將無困難。）還有，收獲最少老師或許就是那些對對話失去了勇氣而不用它來增強思維以及有效使用語言的人。即令有足夠的語言訓練，我們也會聽到由數學能力強或差的學生最普通的抱怨：“我不會作文字題”。

數學的嚴格結構在時間壓力下，支離破碎的教育使多數學生相信只有一種方法才可得到某種結果。如果另有一種膽大的思維方式，他或她就

懷疑那一定錯了。很少有學生對他們的解法充分確定或充分明白的為它辯論說服別人。所以“就是這種作法”佔了優勢，讓數學有了“笨的、死的、無創作力的人才加以演練”的名聲。

運動與反應

最近數十年有很多有希望的發展，如在課程上的改革，在診斷及處理心理障礙，在人工智慧及教育工學，特別是電腦輔助教學等。

最激烈的課程改革是近三十年的事，通常稱為“新數學”。它主要的努力包含強調數學中一些結構，希望瞭解某些重要原理與他們的結論，以深入的洞察力取代愚笨的例行訓練，逐漸導致全面推廣以及心智的挑戰。新數學的一項最有益的副產品，是在於導致很多老師孜孜不息的研究數學，至少是暫時性的。對學校系統來說，新數學所帶來的最大傷害都加諸在那些沒有完整數學知識的老師們身上。對那些熱心而有充分準備的老師來說，他們無法計及年輕學生尚未具備抽象模式所須具體經驗，學童們看不出來有任何必要去證明那些看起來非常明顯的事。這種新的努力常用一種賣弄而誇張的語言來措辭，結果把數學與外在世界的連繫拉得愈遠。抽象與實際間的裂痕無法提供具體應用作為橋樑。有很多的例子顯示，傳統的教法都被使用新辭彙的新教法所取代。以前在算術中提供給學生像遊戲般的反覆練習活動都已經放棄了，結果是很多學生變得沒有計算能力。有的學生喜歡先學遊戲的規則，再問因為，發現遊戲中的變化，才準備思考它們。對這些學生來說，新數學都無法提供足夠的彈性來適應他們。

最近的“返回根本”運動，主要的趨勢是刪除一些不必要的與無意義的內容，要學校開始集中精神於數學課程之正常方向。它提出了有關對

新數學的許多批評。這個運動的部份主張是堅持學校應提供一個完整而面廣的常識基礎，使學生對以後專業化的研究有較多的自由選擇，這種主張是受到支持的。這項運動的另一項主張，是堅持恢復某一部份舊教材與教法，這種看法卻會使基礎教育與它所服務的社會拉開了。

具有解析性與啟發性的思考所產生的交互作用，對我們是很有利的，特別是人們學會了在甚麼時候去應用它

我們相信，讓學生受到下列兩點的洗禮是很重要的：由邏輯順序訓練所得的嚴密結構，以及潛心於蒐集多量具有彈性的參考架構資料並不斷修正這些參考架構的活動。具有解析性與啟發性的思考所產生的交互作用，對我們是很有利的，特別是人們學會了在甚麼時候去應用它。狹而縱方向的數學課程結構帶給學生的大危機是基礎不穩。當根基不好時，以後所學的每一片段他們都不能瞭解。

那些數學題材應該在小學中講授，一般人似乎都很有默契。經驗使得教育工作者了解，在小孩的發育過程中，學習某種題材的最佳時刻應該是在那裏。不過，他們並沒有利用到這種知識。例如，大家都知道的小孩學外國語言沒有土腔（這項才能到了青年期就會喪失），而且只要再加以練習，就能保持這種成果；可是到現在為止，語言很少在最適當時期教學。算術一般來說是在適當時期去教，如果基本計算技巧沒有成為兒童本身能力的一部份，又如果他必須較遲學習這種技巧，那就大不相同了；他費的勁兒將會更大，而且更容易忘掉。

中學應該講授那些題材，以及其次序應該如何安排，看法則大有出入。有些九年級的課業輔導老師的作法是學“普通數學”，而把代數撇在一旁（特別是對女生），這種指導下的犧牲者，

不論在大學內外，他們都無法去瞭解與使用符號。在大學的準備教育中，學生所讀的課程，是代數、平面幾何與三角，這些科目都是分開講授的。很多學校開了微積分的課，也有些選擇了機率、矩陣代數、布爾代數與集合論等論題以提高學生興趣。解析幾何、立體幾何、射影幾何、球面幾何與非歐幾何幾乎全部放棄；而過去在十年級講授的歐氏幾何的綜合處理方式也大幅刪減。對學科學的學生而言，College Boards Advanced Placement Program 中所設計的中學微積分課程是一門非常適當的課程。對學校的數學老師來說，這門課程的推出也是一種刺激。同時，對於學生未來的研究所或專業研究工作來說，高中的微積分課程乃是他一系列訓練的良好開始。反對高中設置微積分課程者的著眼點有二：其一是很多學生在高中微積分課程上的表現是瞭解標準技巧，例如，基本函數的微分，可是却無法瞭解它內涵的觀念，結果是使他們自以為已經浸淫於大學分析課程的初等部分。一旦真正學到分析，須要更多的技巧與智慧，這些學生很多都要遙遙落後。其二是——特別是當微積分是高中數學唯一選修課程時——它取代了這些優美而重要的內容像複數、圓錐曲線、多項式、數論與組合理論。這些論題可以擴充為中學一年半的標準課程，以開拓學生的視野並提供數學觀念與方法的綜合，否則他或她也許會永遠接觸不到。

焦慮治療法

阻礙了人們學數學的心理障礙，最近受到心理學家與數學家的更多關注，他們合作來對抗“數學焦慮症”與“數學恐懼症”。在學生求助時，有經驗的心理學家能找出與追蹤這種障礙之源。導致這種焦慮的創傷通常是在人的早年發生，它破壞了受創者的自信心。有意的或潛意識的她

或他發展了自我保護的策略，不去助長學數學的意願。這種學生在中學畢業的時候，拒絕的情緒就已經根深蒂固了。如果早年的創傷可以防止，大學就不須要我們目前所作的大規模的補救工作。未再繼續升學的人也許可以享受到較多的數學上讀與寫的能力了。

或許說最有效的補救工作，是把婦女與其他受創者帶入與數學有關的行業中來。介紹的數學題材如果與學生以往所痛恨的數學無關時會特別有益（例如圖形理論或組合理論）。然而也有些學生只有在確實學會並掌握那些曾使他們嚇得半死的技巧後才會感到成功，對他們來說要另採別種方式較為有效。年輕兒童可能是他們的生理發展暫時限制了某類心智活動；而對有數學恐懼的成年人這些限制通常是有心理的因素。不管是那一種情形，先由易於探索的心智途徑開始，再尋求更可能的更廣面的瞭解是有幫助的。

有數學焦慮的每位學生似乎是對這種老師反應熱烈——他們相信他們的學生能學到某種程度的數學。某些老練的數學教師具有學生對他們的信心，可是他們不能澈底瞭解某些新生在最基礎的數學道理上的困難，例如數學的符號。除非是同事或老師的協助，這些老師會開始懷疑他們的教學能力或失去學生對他們的信心，或二者兼而有之。這不是一種罕見現象，很多基礎的大學數學課程的進行都受到傷害。

有些老師誤把人們的一般焦慮看作數學焦慮。我們留意到數學焦慮的程度問題，很多數學能力強的學生是儘可能的答覆有高度的數學焦慮。當他們與數學接觸愈多，他們的表現有了改進，其他方面的焦慮（例如由於時間的壓力或競爭而導致的）可能減輕。我們發現的危險是有些求好心切的老師在數學焦慮問題上不知所措，他們疏忽了數學從誘導觀點著手可以領導學生從神經過敏中走向坦途。數學知識不夠的老師本身受過數

學焦慮的傷害，特別傾向於誇大他們的困難，用焦慮治療法來代替數學教學法。如果這種情形變得普遍，那可能會導致不幸的數學焦慮的反作用，抵消了很多正面的努力。

腦的研究

面對一個數學問題時，我們以及我們的學生該如何思考，對這個問題有興趣的人都會被最近有關腦部功能的研究所吸引。我們懷疑目前的大腦的研究是否能提供一些數學的教學方法，而這些方法可以用直觀來引導那些有領悟力的老師。例如，很多論題能夠用解析方法介紹，再用幾何方法說明，最後經由某些與學生經驗有關的其他模式作詳盡說明。那些從第一種介紹就瞭解的可以從不同的角度再看一次而不生厭，而第一次沒有聽懂的也有另一次好機會去掌握內涵。當新的論題應用於不同情況時，所作的概念統整可以擴大學生儲存有用工具以解決問題的潛力。

1980年3月30日紐約時報第一頁的一篇文章題是“內陸城市的新教學法升起希望”的文章提到“精通學習法”是一種“新教學法，它否定了學校教育不可避免地會失敗這個假設”。接著它報告這種成功的教學方法（不論任何科目），是把第一次介紹某個論題時不能瞭解的學生施以“另一招”，給他第二個機會。第一次解釋就能瞭解的學生叫作“快學習者”，他們被給了另一批“補充教材”；而第二招是施予那些所謂的“慢學習者”。一位老師報告說他讓那些“快學習者”幫助“慢學習者”，結果他們之間的溝通比老師作得更有效。報告說，在“精通學習法”的教學下，“學生獲益多，更喜歡學校，而出席人數也增加了”。

我們的驚訝是上面這種把貓剝皮的方法被叫作“新”。也感到不可思議的是為什麼只用兩種

方法，為什麼從第一、二種方法學習的人分別被叫作“快”與“慢”，那只不過是兩種不同的方法，被任意的冠以“一”、“二”而已。我們不懂為什麼“內陸城市”被挑選出來作“精通學習法”的目標。數學課使用“精通學習法”須要老師能把一個論題用一種以上的方法介紹；我們希望這種需要不致阻礙了該計畫的進行。我們本身的經驗證實了同學間的教導對講解者與傾聽者都有極大價值。我們覺得不可思議的是為什麼要這麼小題大作。

在一份教育雜誌上，最近發表的一篇文章中，作者討論腦部研究對於算術的教學有何影響。這篇論文認為那些在算術上有非常大的困難的兒童，似乎是腦部的遲緩發育而蒙受傷害，所以他們應該分開來接受適合本身需要的教學。此外，作者把學習方式分成不同等級而使兒童有了差別待遇，結果剝奪了他們熟悉他人思考的方法與模擬這些不同處理的交互作用。

教師與教育工學

電子計算機輔助教學有很多好處，也有很多壞處。程式設計作得好，電子計算機可以減輕老師命題與改正練習的時間。學生對某老師反應不佳，可求助於電子計算機；它不帶火氣的作教學，並且提供立即的、公正的答案。不管學生對一個錯誤重複多少次，它都不會有不耐煩的表示。電子計算機的最大好處是它強迫學生作一個主動的參與者。

所有的視覺輔助器材與模式——幼稚園的積木、數線、討論數學的電視錄影帶與電視螢幕——都是非常有價值的，可是我們以為如果學生能自己創造自己的想像與模式，他們必能學到更多東西。他們這方面的能力表現全靠自身的經驗。某些教具像“Papert”教授的烏龜（幾何），既可

供給經驗亦可鼓勵模式製作。

有許多文章都報導了小學使用電子計算機很成功的例子，主要是在加州。事實上，兒童的主動參與以及他們能很快的（比多數成年人快）學會與電子計算機溝通的技巧可以說是重要資產。無疑的，那些能寫出美好程式的人值得讚美。爲了把這類教學能大規模地推廣到各小學，所須要的是必要的經費，設備以及一組優秀工作人員，以獲得使用人與電子計算機交互作用的最大效益。

在大學內，電子計算機正被用作某些數學課程的補救教學，特別是在“按自己進度進行”的一方面。它們也被用在一般的數學課程，主要是在初等微積分。如果有能幹的電子計算機工作人員，知道如何使用電子計算機，以增強學生的思維能力，那在這方面的教學就可以做得很好（例如，Ohio State University 的課程）。

有些教育心理學家希望藉微電子計算機之協助來決定學生的學習形式，並診斷其學習困難。腦部功能的研究再加上人造智慧可以導致教與學方法的改進；如何獲致這些改進？那當然是在我們進行研究誰用那種方式學習、那種心智練習將會建立新的學習方式時給予客觀支持。就這一方面而論，我們認爲一個優秀、善於觀察的老師所作的判斷，仍然凌駕由腦部發展研究，腦部功能研究以及電子計算機輔助教學之上。可是我們並不懷疑最近研究的進展，對教學將有深深的衝擊，我們希望研究者與教師能多談談。

數學心智能力的獲得與演練是令人喜悅的，動人的，使人能專注忘我的。

無疑的極多人力與物力都集中在數學程度差的學生，程度差的原因，以及進行補救的方法上。我們發現正在進行的多種努力都是強調數學對其未來職業以及消費決策方面的重要性來吸引一般人學習數學，而未曾指出我們研究這門學科的

強而有力的理由是什麼。數學是一種思維的方式能使學生從不同資料來看一個整體的模型以及分析複雜情況。數學心智能力的獲得與演練是令人喜悅的、動人的，使人能專注忘我的。如果我們與學生同作數學練習，能讓學生看到這些優點；如果他們能從這種參與的實在價值中得到些許暗示，那麼他們就會學到一個極重要的教訓：他們就只用了人類天賦的思維與留心，就可以瞭解一些數學的來龍去脈，而且能使他們的工作做得更好；教育不但是在現成的世界中生存與成功的一種方法，它也是一種逐漸的連續變換——結果仍然是它自己——幫助學生們成長且終身不斷的學習；不論他們面臨任何環境，都有能力爲他們自己或人類留下雪泥鴻爪。

我們調查學生學識不夠的可能原因以及防止這種不夠的可能性時，接觸面遍及我們自己的學生以及一般中學畢業生，使我們比以往更相信讀寫能力與計數能力對不進大學的人也是同樣的重要。他們一樣的不但有權接受良好學校教育以致致經濟利益，也應享受到教育所應提供的樂趣。

讓我們回到出發點的疑難來作結論，那就是爲中學畢業生所應準備的數學教育問題。我們所要作的結論是：這項任務最困難的部份是要在明顯的正反相對之點取得平衡：幫助學生對抗他們的恐懼並改進他們的自我想像，讓他們參與作數學而不僅是反省與治療法；找出如何使每個學生學得最好的方式並給予個別關注，要他準備適應那些使用另一種教學方式的教授與教科書的作者；要學生得到並享受機械技術的熟練使用，卻不是把一切設計妥當要學生去執行；堅持清楚的思考與正確的口語辯論而不陷於枯燥無味的賣弄；展示我們的訓練結構，但儘可能的與具體經驗建立更多的聯繫；發揮學生的個人天才與力量，但要記住社會與職業的需要以及來自我們學生的期望。