

英國的新SMP中學數學課程

林福來

國立臺灣師範大學數學系

一、SMP 11—16課程

SMP (The School Mathematics Project) 系列的教科書 (包括小學、中學及高等中學) 是英國多種數學教科書版本中最暢銷的版本。以販賣教科書的利潤為財源的 SMP 基金會，目前正支持一個中學數學課程計畫，名稱是“SMP 11-16課程”，準備重新編寫一套新的中學 (11 歲到 16 歲) 數學教材。

“SMP 11-16課程”的研究總部設在倫敦大學的西田 (Westfield) 學院，不過課程計畫小組跟學院間並沒有任何行政上的關聯，此課程計畫純粹是私立的研究計畫。研究小組是由大約 35~40 位有經驗的中學數學教師所組成，其中有五位是專職人員 (可稱為職業教科書編者)，其餘為兼職。主持人是 John Ling 先生，他曾經也是一位中學老師。

SMP 11-16 課程小組在西元 1978 年成立，經過 18 個月的研究準備，第一份實驗教材於 1980 年 6 月完成。同年 9 月此份教材開始在英格蘭約 40 個中學裏進行實驗。這些學校都是事先參閱過實驗教材，了解研究小組的編寫原則及方向後，志願參加的。實驗的學校，全年級的學生都參加。每份教材預計實驗兩年，今年 (1982) 9 月起，第一學年的教材已實驗完畢，正式出版，進行推廣了。

研究小組在第一份實驗教材完成前，共有十八個月的研究過程。委員們仔細檢驗每一個單元所以要列入中學教材的理由，探討整體的中學數學課程。尤其重要的是研讀各方面所做的數學教育研究的報告。特別是倫敦大學 Chelsea 學院的 CSMS 小組所完成的中學生的數學理解力⁽¹⁾的報告，研究小組更據以為編寫教材的最主要參考資料。中學生的數學理解力中，將五年的中學教材分成 11 個單元，不同年齡群的學生對各單元的理解程度的分佈情形，學生們對各個單元的各種層次的問題的解題模式等都有詳實的統計、分析。SMP 11-16 課程小組宣稱他們編寫教材時，很審慎地參考了此份報告。換句話說，SMP 11-16 將是以學習者為中心而設計的課程。

二、一些原則

SMP 11-16 的教材除了以學生的理解力為依據外，同時還追求一個目標，就是希望數學語言，

像概念、符號、運算和有關的敘述等，都能成為學生日常生活中用語的一部分。做法是每一個層次的學習，都需確定學生是否真正了解，然後再往前學習。數學語言及它的真正意義，學習者需要學後過一段時間才能消化，只要某一部分沒有學好，往後的學習困難就愈來愈多，最後難免使數學的學習變成一種孤立的活動，好像在玩一些奇妙規則的遊戲，而與常識及生活經驗脫節。

在有限的學習時間內，SMP 11-16 寧可學生少學一點，不願意學生們在數學的學習中，只是讓腦中貯存了一大堆的數學符號和奇妙的規則，這些東西又是除了考試以外，一無用處。換句話說，由於數學教材的許多單元間往往具有線性次序的關係，前面的單元沒有弄懂，後面的單元就難入門；所以 SMP 11-16 追求的境界是學生對所學的都要能精，然後再依個人能力看能學多少。

數學學習的質要精，指的是教材中的概念和問題要能真正了解，而不是光會一些技巧、公式。比如說，當我們問矩形的面積是什麼時，學生的回答通常是“長 $\times$ 寬”。對很多學生而言，矩形面積的意思就是長乘以寬。我們知道“長 $\times$ 寬”是求面積的公式，而面積的意義是指矩形所圍的區域的大小，“長 $\times$ 寬”只是求出此大小的方法。然而數學的教學中，卻有個趨勢，即學生們急於做“長 $\times$ 寬”之類的計算練習，而忽略了“所圍區域的大小”的面積意義。像這種專注於技巧、公式的練習及答案的獲得，對於賦予這些練習活動意義的數學概念反而忽略，正是數學教學最危險的現象。

SMP 11-16 希望避免上述教學的偏差。研究小組考慮 11 歲的小孩，認知上正處於從具體操作時期發展為形式操作期的階段。從具體層次的學習，到能吸收抽象化、形式化的教材，需要足夠的時間，透過適當的教具，進行實際的操作。以這些具體的操作所得的經驗為基礎，才能順利達成形式化的學習。利用簡單的教具，進行實際操作來進行學習，是 SMP 11-16 處理中學前兩年教材時最注重的。

三、課程結構

SMP 11-16 課程的對象很廣，包括中學生中，能力最差的 15% 以外的 85% 的學生群。這樣廣域的能力分佈，學生的學習進度，在要求學習的「質要精」的前題下，顯然會有很大的差異。

考慮學習進度的差異，SMP 11-16 課程小組將整套教材畫分成兩段。第一階段的教材，對象是前兩年（11~13 歲）的學生，第二階段的對象是後三年的學生。**第一階段的教材原則上配合自學輔導法的教學；第二階段的教材則是配合三段式的能力分班教學（即好班、中等班、差班）。**第一階段的教材型式是以小單元為主題的學習手冊，每本分別是 8 頁或 16 頁。第二階段的教材型式是班級教學用的教科書。

第一階段的教材共分成數，代數，圖形，空間和統計五個項目。每個項目的主教材又分成四個層次：第 1、第 2、第 3 和第 4 層。第 2、3、4 層的教材中又有充實（extension）教材，分別以符號 2E，3E，4E 表示。此階段的教材結構如下圖所示：

表 一

	第 1 層	第 2 層	2E	第 3 層	3E	第 4 層	4E
數	□-□-□-						
代數							
圖形				□-□-			
空間	□ ┆ □-□ ┆ □						□-□- ┆ □-□-
統計							
冊數	17	22	7	20	16	13	12

其中冊數指屬於該層次的學習手冊的冊數；在第一層數的符號□-□-□-及第一層空間的符號

□

┆

□

┆

□

-

□

 代表各學習手冊間學習時的教材地位關係，即□代表一學習手冊，□-□-□指前後相關。

指兩冊間平行，無學習的前後關係。這些關係在教師手冊中有詳細的說明。各層次的不同項目的教材，學習時沒有一定的前後關係，教師可視學生的實際需要適當地安排。

第一階段的教材型式上不是學習手冊的只有兩個例外；一是屬空間第 1 層的“圖案”，另一是屬於統計第 1 層的“統計”，這兩個單元的教材是學習卡。

除了學習手冊及學習卡外，第一階段的教材還包括：補充練習、答案卡、教師手冊、紀錄手冊及各種教具。每一本學習手冊所需的教具都載明在手冊內。例如，屬空間，第 1 層的“3-維”這本手冊的學習，需教具：方格紙、膠水、剪刀、吸管（吸飲料用的）及紅、藍、綠色筆。

以袖珍計算器做四則運算的操作，已視為學生的必備知識。學習過程中，需要袖珍計算器當教學工具時，同樣在學習手冊中會註明。

第二階段的教材型式是教科書，根據前兩年的學習成就，將學生概分成三種不同的能力群，配合三種能力群編寫三套教科書。因為前兩年的學習進度差異可能很大，所以教科書的選材自然要跟著變化。真正的學習進度，將由教材實驗後得到。課程研究小組這些有經驗的教師，對於程度好、程度中等和程度差三群學生兩年的進度估計是：

程度好（最好的 30%）的學生，第 1 層的教材可以跳過不用學，預計學完第 2 層，2E，第 3 層，3E 和第 4 層的所有學習手冊。4E 的手冊可以學全部或一部分。

程度中等的學生，可以學完第 1，2，3 層的教材，2E 的一部分或全部，或許再學一點 3E 的教材。

程度差的學生只學完第 1，2 層的教材，或許再學一點第 3 層的教材。

第二階段的教科書，就是根據上面的估計，加上實驗後的修正，來編寫。

在程度好的學生群中，有一小部分是數學資賦優異的，將再以學習手冊的方式編寫充實教材供他

們自學用。

程度中等以下的學生，第一階段的學習手冊在前兩年學不完，所以在供程度中等和程度差的學生群使用的教科書中，會分別將未學完的學習手冊中的教材再編入。

四、學習方式

第一階段的學習手冊，編寫的著眼點是要讓學生自己閱讀，自行學習。每個學生都可以按照自己的進度從第 1 層或第 2 層的手冊往前學。前一層次的教材完全了解後，才能前進。學習過程中，遇到符號“▲”，學生就該將所做的練習拿給老師檢查或者跟答案卡對照。學習的品質就是以這種方式來控制。

充實教材 2E，3E 和 4E 的學習手冊，是設計給**足夠程度**的學生用的。這裏不說**程度好**，有它的道理：有些學生，學完第 2 層的手冊後，程度已經足夠學 2E 的教材；但有一些學生，學了第 2 層的教材，可能還不能學 2E 的手冊，等到他們學了第 3 層的部分手冊或全部之後，程度夠了，可再回來學 2E 的教材。換句話說，學習次序可以是 $2 \rightarrow 2E \rightarrow 3 \rightarrow \dots$ ，也可以是 $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2E \rightarrow \dots$ 。不可以將學生以二分法分成可學充實教材和不用學充實教材兩群。

學習手冊是供自學輔導的教學方式使用。在課堂上，可以每人自學，也可以兩人一組，效果可能更佳。當然也不排除全班同時學同一本學習手冊的可能性，不過需要是已經能力分班的班級才適合。

五、教材特色

第一階段的學習手冊目前已全部編寫完畢，正在實驗、推廣中。筆者就手邊的十本學習手冊的實驗本，配合 SMP 11-16 所給的一些資料，來談談這些手冊處理教材的一些特色。

1. 數

「數」這個項目的教材偏重於“數”的意義的灌輸。先建立學生關於“數”的概念，然後才談計算。數線可以靈活地應用來幫助數的概念的培養。例如：

80 英鎊的 73% 是多少？

學生的反應可能不假思索，就直接計算答案。

SMP 11-16 希望學生看到這樣的問題，最先的反應是在他的腦海中出現如下的一個圖形：



並且從圖中得到粗估的答案。接著才進行計算，及驗證所得答案，看看是否跟自己粗估的值很接近。

袖珍計算器將和其他教具一樣自然地使用。不過計算器的使用，不應該影響關於數的基本規則的學習，像九九乘法。過去花在大數的長除運算、小數的除法等的練習時間，倒是可以省下一部分，轉

用來學習數字和運算的意義上。

2. 代數

(a) 變數

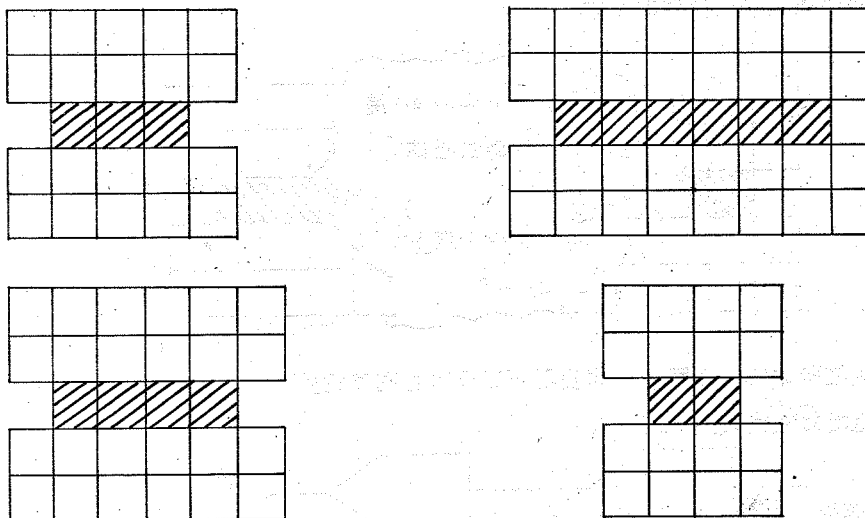
變數是代數入門時的最基本概念。SMP 11-16 對此概念的闡述下了很大的工夫。

給定兩組數據，像右表：

x	y
5	7
10	12
3	5
37	39

讓學生發現 $x+2=y$ 的關係式，是介紹變數的一種方法。不過 SMP 11-16 認為這樣的引進方法沒有前瞻性。他們希望 x ， y 所代表的東西比兩組數據更具體一點，同時數據也該由學生從學習活動中自己獲得。其實這是從一般自然科學課借用來的想法：由實驗得到一些度量，尋求度量間的關係。由於一般的科學實驗數據與其最接近的關係式間還有誤差，對初學代數的學生不適用，所以 SMP 11-16 設想了一種既具實驗性，又很數學化的引進變數的方法。學習手冊第 2 層，2E，“發現規則”就是他們的研究成果。茲摘譯其中一小段於下：

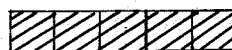
A. 磁磚排列(1)



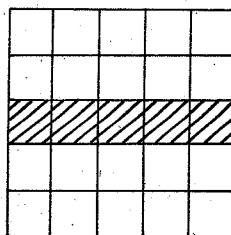
A1. 造一表來表示上面各種磁磚排列中，白色與紅色磁磚的個數。

紅 磁 磚 數	白 磁 磚 數
3	→
6	→
4	→
2	→

A2. 在方格紙上畫五塊紅磁磚

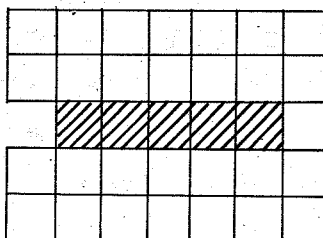


仿右圖，配上白磁磚



問：共配上多少塊白磁磚？

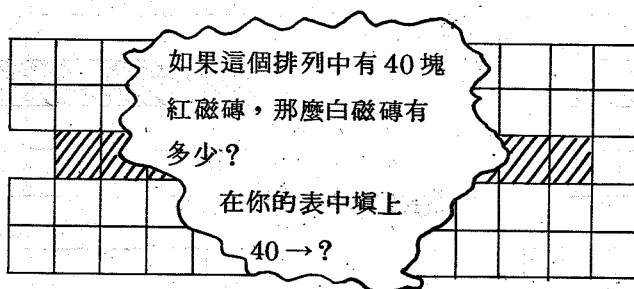
在白磁磚的兩端再加一塊白磁磚



共有多少白磁磚？

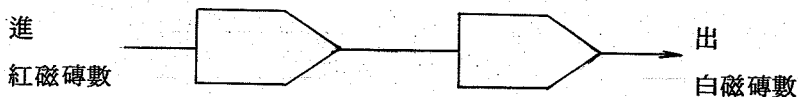
在你的表中填入紅白磁磚的個數。

A3.



A4. 當你知道紅磁磚的塊數時，有個規則可以算出白磁磚的塊數。

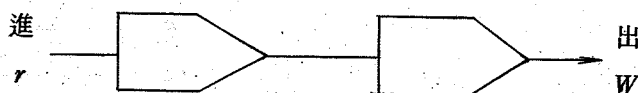
試畫一組機器來代表此規則



A5. 令 r 代表紅磁磚的塊數

W 代表白磁磚的塊數

將機器組再畫一次



A6. (a) 如果 $r = 16$, $W = ?$

(b) $r = 21$, $W = ?$

(c) $r = 39$, $W = ?$

(d) $r = 1600$, $W = ?$

A7. 以你在A1. 所做的表來驗證你發現的規則。

A8. 在A4. 中你能想出兩組不同的機器，對所有的數功能都一樣嗎？想到了就畫出來。

上面這一段是摘譯自學習手冊“發現規則”的前三頁。此手冊共有九種這樣的學習活動。我們很容易可以看出，A2 部分的操作，就是A4 機器組—— $\times 4$ —— $+ 8$ ——的具象教材。

在上面的這段教材中，不是視 r, W 為平行的“ r 和 W 有什麼關係？”的問題，而是問“如何利用 r 得到 W ？”SMP 11-16 小組認為這樣的討論與學生的思考過程較吻合。配合不同功能的機器，像2 倍機 $\times 2$ ，加5 機 $+ 5$ ，來將兩個變數的關係式的學習具象化。這些機器在第1 層的“數與機器”中已介紹。第2 層的手冊中，就讓學生利用機器組找出他們手上的數據間的規則。

到了第3 層的“公式”這本學習手冊才開始引進更方便的符號，像 $3r$ 等。 $3r$ 表示 $3 \times r$ 也花了篇幅解釋，以免部分學生誤認 $3r$ 為3 塊紅磁磚，就像CSMS所發現的，有些學生誤將 $2b + 3b = 5b$ 解釋為2 根香蕉（banana）加3 根香蕉等於5 根香蕉一樣。

如果視 r, W 間的關係為從 r 經過運算得到 W ，那麼 $2r + 4 = W$ 就比 $W = 2r + 4$ 的寫法更自然。

(b) 方程式

為了怕學生剛學代數時，將變數和未知數的概念搞混了，SMP 11-16 決定以問號“？”來代表未知數。

關於方程式的解法過程，採取的是兩邊平衡做同一運算，例如同時加5，而不以移項的方式來處理。

3. 圖形

圖形是兩個變數間的關係圖。關係可從測量得到，例如一天中某時刻的氣溫，也可以是純代數的式子，例如 $y = 3x^2 - 2$ 。第一階段的教材處理的是像第一種關係的圖形，代數式的關係圖在第二階段才討論。

圖形的教材主要要培養坐標的概念及圖形的詮釋能力。坐標概念的培養跟其他教材相配合，例如在介紹“形狀”，“對稱”，“負數”等單元時，都會引進坐標的概念。

關於圖形的詮釋能力，教材的處理方式是，根據某一情境得一圖形，將此圖形視為研究對象，來討論它的轉折點，階梯性、升高、下降，在某一區間的特性等等，再將所得的性質與得到此圖形的情境對照，驗證所得圖形性質的物理意義。透過早期這種詮釋圖形的經驗，希望對第二階段函數圖形的學習有幫助。

4. 空間

對於空間這個項目的教材，SMP 11-16 有如下的說明：

「我們選取空間（space）當做部分教材的總名稱，原因是，希望它能顯出我們的取材，是在培養學生空間概念所需的活動的廣泛領域中。如果稱為幾何，那麼不管想成是傳統的平面幾何或是變換幾何，範圍都太偏窄了。這兩種幾何只是人類在空間活動的經驗的一部分而已，此部分的表現方式還很形式化。這種形式化的教材太早介紹給學生，許多重要的空間知識可能就會被割愛。學生中有相當大

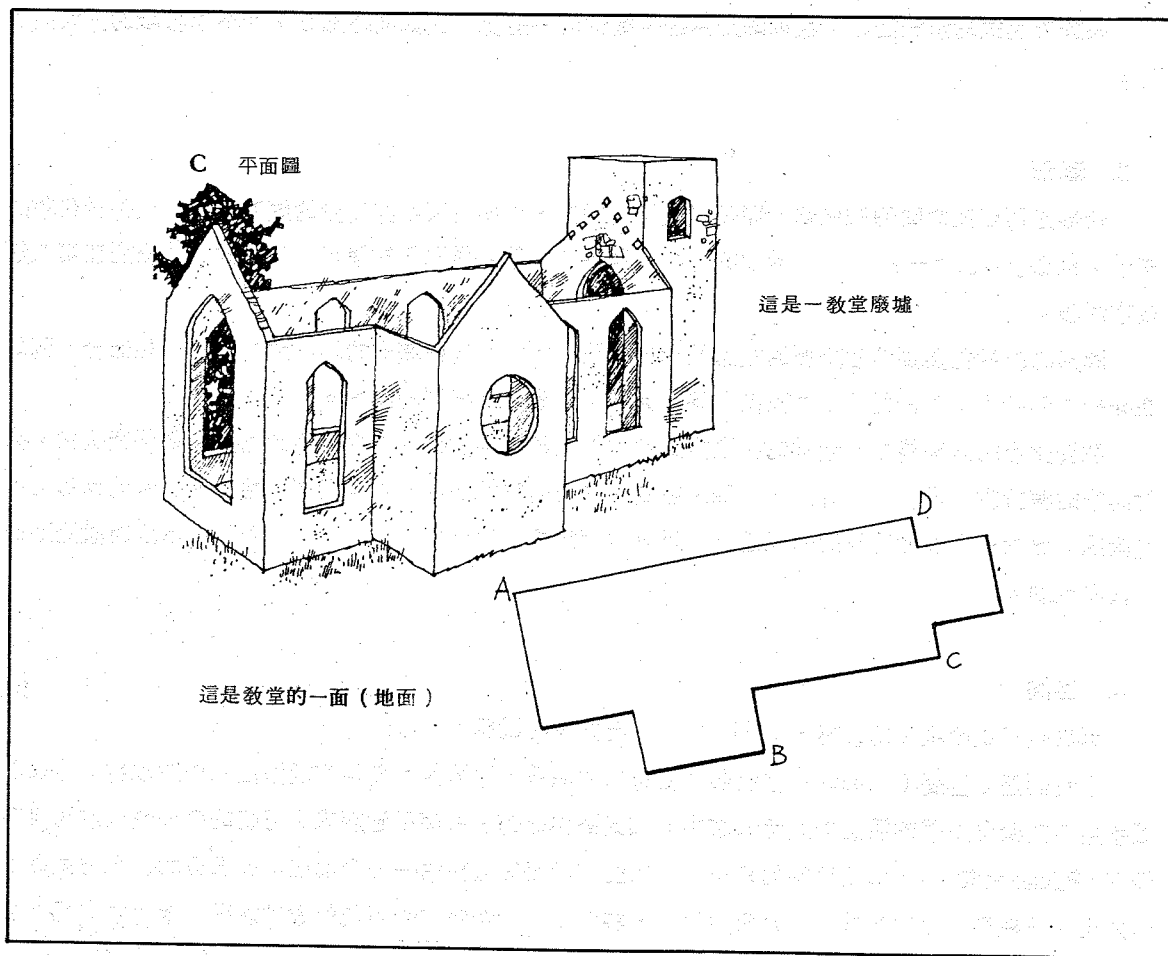
的比例，他們的智力發展還無法接受形式化的教材。對這些學生，如果以未來形式化教材的需要，做為選取早期教材的依據，顯然不合適。

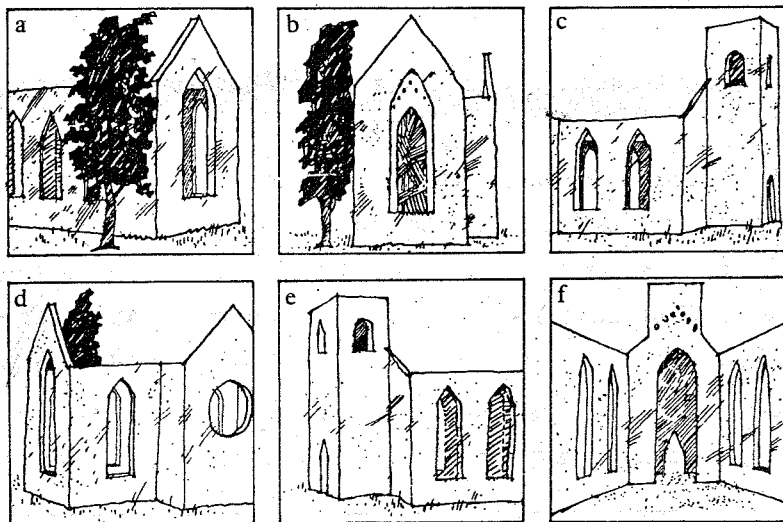
過去的教材中，3 維的材料都被忽略了。立體的東西是本項目的重要材料。例如有一個跟日常生活有關的活動，即學生眼中看到 3 維的物體，需要在平面上表現出來；對於此類的活動，學生需要實際練習的經驗。因此跟這活動有關的材料，將是空間這部分所樂於包含的。

3 維空間的處理例子，說明我們取材的依據是要配合學生的實際生活經驗。要求學生在他們的腦中能夠清楚地將某一情況具象化，然後進一步在腦中可以處理運用，提供他們足夠的練習機會是必需的。我們的看法是，像這類的練習活動，絕大部分的學生所需要的，一定遠比目前存在的教材中所提供的還要多。」

從上面這段說明，我們可以看出 SMP 11-16 的空間教材，不是以幾何教材為限。早期的教材，重視的是與學生的生活經驗相關，只要相關有用，不管將來學幾何需不需要，都樂於選取。3 維空間的東西，乃學生天天都在接觸的，自然不能廢棄，也沒有理由逃避。

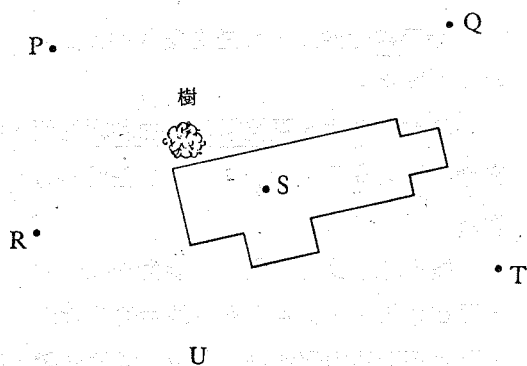
下面這段教材，跟上面 SMP 11-16 處理空間教材的說明，很有關係，不過是從圖形第 2 層的學習手冊“Digging into history”中摘錄的：





有一位古蹟研究員站在六個不同的地方 P, Q, R, S, T, U (如下圖所示), 畫了上面 6 張教堂的圖。

試寫出他畫每一張平面圖時所站的位置。



六、後 記

近年來, 英國在數學教育方面的研究成果中, CSMS 的中學生的數學理解力和數學總評⁽²⁾ (Mathematics Counts) 是兩份很突出的報告。這兩份報告中的觀點, 可以說是英國數學教育界的共同觀點。SMP 11-16 小組此次重新編寫教材, 可說已盡量將這些從研究所得的結果與觀點融會於課程設計中。這種以研究結果為基礎, 來進行課程改革計畫, 可以預見所得成果將會很豐碩。

本文的資料是筆者於 1981 年 12 月訪問 SMP 11-16 小組的主持人 J. Ling 先生所得。

參考資料

- (1) Hart, K. M (ed), Children's Understanding of Mathematics 11-16, John Murray, 1981.
- (2) H. M. S. O. (1982), Mathematics Counts, London.
- (3) SMP 11-16 : Sample pack of draft booklets.
 - (1, Number) : Decimals 1
 - (1, Number) : Whole numbers 4
 - (2, Number) : Ratio 1
 - (2E, Algebra) : Discovering Rules E
 - (1, Space) : Three dimensions 1
 - (2, Space) : Angle 2
 - (1, Graph) : Maps, plans and grids
 - (2, Graph) : Digging into history
 - (2, Graph) : Graph 2
 - (2E, Graph) : Co-ordinate Patterns

地震

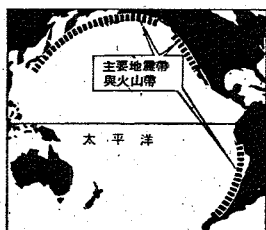
取材自：Frontiers of science 3:

Introduction to earth sciences

在自然災害中，以地震為最可怕！它在沒有任何警告的情況下即展開嚴重的破壞。

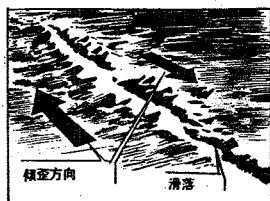
科學界現在雖然能說明它的作用，但仍不能預測以講求預防對策。

所以在地震帶居住的人，經常處於地震的威脅情況下。



太平洋的四周，都是有環狀的火山帶。這些地區的地殼也不斷的在隆起變化。

諸如在日本、阿拉斯加、加利福尼亞、智利居住的人就經常生活在地震的威脅下，因這些地區的任何地方，大約每幾年中就發生一次地震。



據瞭解地震的成因，可能由於地殼本身是由比較薄的岩石所構成，而在地殼下面就是高熱溶解中的“地涵”。地涵在高熱溶解情形下，發生不斷的內部運動，乃致上浮的地殼，隨時發生隆起、滑裂等等現象。

大部份的地震，都在震期中發生地形“變動”，而變化也都在沿斷層線進行，造成滑裂。

不過科學界現在已知道部份的斷層，有經常繼續的滑裂，而部份斷層則似靜止的，但是什麼時候發生地形變動，却是不敢預計的。

現在科學界在加利福尼亞斷層沿線，配置了若干測量器械，並裝設雷射以記錄地表的運動。

同時預期深埋在地下的器械，可以發出地形“變動”的信號。

