有趣的運算

林秀慧

國立高雄師範學院數學系

加減乘除四則運算是常見而且用途廣泛的運算。事實上，在數學的領域裏，只要下定義，運算的種類不計其數，下面介紹的是不同於通常加法的一種加法運算。

任意二個非負整數A、B，可表爲以2爲底的形式：

$$A=a_n\cdot 2^{n-1}+a_{n-1}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+a_2\cdot 2^1+a_1$$
$$B=b_n\cdot 2^{n-1}+b_{n-1}\cdot 2^{n-2}+\cdots\cdots+b_2\cdot 2^1+b_1$$

各a_i、b_i爲0或1，$i=1,2,\cdots\cdots,n$。以$A=(a_n a_{n-1}\cdots\cdots a_2 a_1)$，$B=(b_n b_{n-1}\cdots\cdots b_2 b_1)$表之。

在此，定義任意二非負整數A與B之“加法”運算如下，稱之爲Nim和，以$\oplus$表示它的運算：

$$A\oplus B=(c_n\ c_{n-1}\cdots\cdots c_2\ c_1)\text{，}c_i=\begin{cases}0\text{，若 }a_i+b_i\text{ 爲0或2。}\\1\text{，若 }a_i+b_i\text{ 爲1。}\end{cases}$$

例如$A=15$，$B=27$，即$A=(01111)$，$B=(11011)$，則
$A\oplus B=B\oplus A=(10100)=20$，$A\oplus A=(00000)=0$，$0\oplus B=(11011)=B$。

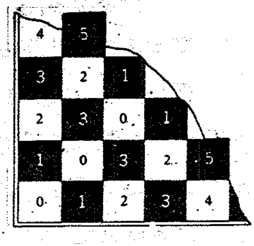
此運算$\oplus$在代數上構成一交換群，因爲它有下面四個性質：

(1) 具有交換律：對任意數A、B，$A\oplus B=B\oplus A$。

(2) 具有結合律：對任意數A、B、C，$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

(3) 具有加法單位元素0：對任意數A，$0\oplus A=A$。

(4) 具有加法反元素：$A\oplus A=0$，亦即A爲A的加法反元素。



依此加法的性質，你是否能把它作很熟練的運算？利用此運算，我們介紹一種遊戲：在方格棋盤上（假設棋盤可往上及往右無限延長，如圖）。在每一方格上標上一非負整數，其標示之規則如下：(1)最左下角爲0；(2)其他任一方格爲它所在位置同列之左方及同行之下方未曾出現之最小非負整數。

依此方法，隨意指定一方格（在第$A+1$列、第$B+1$行），你能

夠很快的把結果算出來嗎？它們有很特別的結果，在第 $A+1$ 列第 $B+1$ 行方格中的數恰等於 $A\oplus B$。例如，我們想知道第100列，第1000行位置的方格是多少？你不必從開始一格一格填寫，只要利用此運算，就可得知應為900。因為 $99=(1100011)$，$999=(1111100111)$，
$99\oplus 999=(1110000100)=900$。

下面的定理述出這個結果。

定理：在第 $A+1$ 列第 $B+1$ 行方格內的數是 $A\oplus B$。

證明此定理，要先證明三個引理：

引理 1：很明顯的，$0\oplus 0=0$。

引理 2：$A\oplus B$ 異於所有的 $P\oplus B$ （$P<A$），和 $A\oplus Q$ （$Q<B$）。

證明：(1)若 $A\oplus B=P\oplus B$，$P<A$，則 $A=A\oplus B\oplus B=P\oplus B\oplus B=P$ 與假設 $P<A$ 矛盾。

(2)同理，若 $A\oplus B=A\oplus Q$，$Q<B$，亦得矛盾的結果。

引理 3：任意非負整數 $X<A\oplus B$，一定可表為 $P\oplus B$ （$P<A$）或 $A\oplus Q$ （$Q<B$）之形式。

證明：設 $A=(a_n a_{n-1}\cdots\cdots a_2 a_1)$，$B=(b_n b_{n-1}\cdots\cdots b_2 b_1)$，

$A\oplus B=(c_n c_{n-1}\cdots\cdots c_2 c_1)=C$。

並設 $X=(x_n x_{n-1}\cdots\cdots x_2 x_1)$ 為任意小於 C 之非負整數。不可能每一組 x_i 與 c_i 都相等，在所有不相等的各 $x_i\neq c_i$ 中設最大的足標為 k。因 $x<c$，所以 $c_k=1$，$x_k=0$。由 $c_k=1$，知 $a_k=1$，$b_k=0$ 或 $a_k=0$，$b_k=1$。

(1)若 $a_k=1$，$b_k=0$，則 $b_k+x_k=0<c_k+x_k=1$，且 $B\oplus X$ 與 $B\oplus C$ 二數中，足標大於 k 者都相同，故 $B\oplus X<B\oplus C$。但 $B\oplus C=B\oplus B\oplus A=A$，由此，$B\oplus X<A$。設 $P=B\oplus X$，則 $P\oplus B=X\oplus B\oplus B=X$，（$P<A$）。

(2)若 $a_k=0$，$b_k=1$，同上理，X 可表成 $A\oplus Q$ 之形式，（$Q<B$）。

定理的證明：利用數學歸納法證明：

(1) $A=0$，$B=0$，即第1列第1行之方格為 $0=0\oplus 0$ 成立。

(2)假設對所有 $A\leq N$，$B\leq M$ 時，第 $A+1$ 列第 $B+1$ 行之方格為 $A\oplus B$ 成立。

(3)我們欲證明 $A=N+1$，$B=M+1$ 時，對所有第 $A+1$ 列第 $K+1$ 行之方格為 $A\oplus K$，$K=0,1,\cdots\cdots,M$，及所有第 $L+1$ 列第 $B+1$ 行之方格為 $L\oplus B$，$L=0,1,\cdots\cdots,N+1$ 皆成立。

先考慮第 $A+1$ 列第 $K+1$ 行之方格，(a)若 $K=0$，顯見方格之數為 $A\oplus 0$；(b) $K=1$ 時，由引理2，$A\oplus 1$ 異於所有 $A\oplus 0$ 及 $0\oplus 1$，……，$(A-1)\oplus 1$ 即 $A\oplus 1$ 異於第 $A+1$ 列第2行方格所在位置同列之左方及同行下方之數。由引理3，$A\oplus 1$ 是第 $A+1$ 列第2行的方格之左方及下方未曾出現的最小非負整數，所以，第 $A+1$ 列第2行之方格為 $A\oplus 1$；(c)依此步驟，對所有 $K=0,1,\cdots\cdots,M$，可證第 $A+1$ 列第 $K+1$ 行之方格為 $A\oplus K$。

同理可證，對所有 $L=0,1,\cdots\cdots,N+1$，第 $L+1$ 列第 $B+1$ 行之方格為 $L\oplus B$。