

簡介應用數學方法

解決生物問題的一些例子

李蘊香

國立臺灣教育學院生物系

雖然大家常說數學是一切科學的基礎，然而縱觀國內中學的生物教材，大學生物系及相關科系課程的設計，總讓人覺得生物科學是記憶的科學，除了在做統計時應用到數學外，其餘幾乎不需要。事實上，生物學上的許多問題如藥物、遺傳、生態、傳染病、生理、動物行為的問題皆有應用數學以求解釋、分析的實例。這種應用量或數學方法解決生物問題的科學稱為生物數學 (Biomathematics)，這是數學領域中正在蓬勃發展的一門，它對人類常有劃時代的貢獻。以下我們將簡介一些例子。

一、生理上的一些問題

1. 藥物在人體內的分佈

當一個人看病後，醫生或護士會囑咐他應間隔多少時間服藥一次。這是因為病人服藥後，藥物會在人體中逐漸消失，當藥量達到某一低標準後，必需再服用另一次劑量才能發揮藥效。到底病人應間隔多少時間服用一次藥物呢？可以下式求得：

假設 y_0 為最初劑量 $y(t)$ 為 t 時餘留在人體的劑量
且藥物在人體中減少的速率與 $y(t)$ 成正比，即

$$\frac{dy}{dt} = -ky(t) \dots\dots\dots(1)$$

(1)式積分可得 $y(t) = y_0 \cdot e^{(-kt)} \dots\dots\dots(2)$

k 值可由實驗求得，如最初劑量與病人之無效劑量知道，則時間 t 可求得。由(2)式尚可解決(i)劑量加倍時，時間間隔應如何？(ii)病人復原率已知，劑量與時間間隔應如何調配？等等問題。

2. 人體血量的測定

測量人體血量的方法大多採用間接法，這些方法很多，但各有優缺點。現在介紹兩種方法：

(1) 色素法

採用色素法，需選擇對人體沒有毒害，不易在血管內消失，且易與全部血漿均勻混合的色素，定量由靜脈注入，經過均勻混合後測量在血液中的稀釋度，則全血量可由下列公式求得：

$B.V.$ 表全血量 W 表注入之色素準確量 C 表經過均勻混合後色素的濃度

$$B.V. = \frac{W}{C}$$

(2) 注射葡萄糖法

葡萄糖注射到人體後會逐漸改變，我們可在不同的時間抽血測量其濃度以計算全血量。葡萄糖在人體中改變的情形可以下式表示：

$$\frac{dc}{dt} = -kc + \frac{\rho}{V}$$

ρ ：單位時間內注射到血流的葡萄糖量

V ：全血量

c ： t 時血中葡萄糖量

將上式積分可得 $c(t) = (c_0 - \frac{\rho}{kV})e^{-kt} + \frac{\rho}{kV}$

因此，在不同時間抽血測血糖濃度後可決定 k 和 V 值。

3. 醫學診斷的問題

在一個生活團體中，人們得各種疾病的機會、得病時各種症狀產生的機會，可以數學方法解答，醫生亦可由這些資料判斷病人最可能得什麼病、產生什麼症狀。假設 $P(D_i)$ 表某一疾病在一生活團體中發生的機會， $P(S_j/D_i)$ 表得 D_i 疾病的人出現症狀 S_j 的機會，根據 Bayes' theorem 可得下式：

$$P(D_i/A) = \frac{P(D_i)P(A/D_i)}{\sum_{j=1}^n P(D_j)P(A/D_j)}$$

$$A = S_{i1} \cap S_{i2} \cap \dots \cap S_{ip} \cap \tilde{S}_{ip+1} \cap \tilde{S}_{ip+2} \cap \dots \cap \tilde{S}_{in}$$

我們可以將成千病人的資料輸入到電腦中儲存起來，當有新病人時，可將新病人的症狀和以前的病人比較，並由舊病人治療後的反應推知新病人可能的反應，這就是所謂的電腦診病。

4. 醫院中食物控制的問題

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ 表醫院中患 m 種不同疾病的病人群

$I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ 表 n 種不同的過敏成分

以 $m \times n$ 的矩陣 $A = (a_{ij})$ ，可表示何種病患對何種成分過敏，當 C_i 群病人對 I_j 過敏時， a_{ij} 值為 1，如不過敏則 a_{ij} 值為 0。相同的，如醫院中有 $F_1, F_2, F_3, \dots, F_q$ 種食物，我們亦可建立 $q \times n$ 的矩陣 $B = (b_{kj})$ ，當第 k 種食物含有成分 I_j 時， b_{kj} 值為 1，如不含則為 0。依 A, B 兩個矩陣，我們可以進一步建立 $n \times q$ 的矩陣 $AB^T = (d_{ik})$ ，若 $d_{ik} = 0$ 則 i 群病人可安全的進食 F_k 食物，檢查 AB^T 值，我們就可找出一些安全的食物給病人吃了。

5. 血液取樣的問題

在 N 個人中預測那些人患某一種疾病，如一個個取血測試，則需 N 次，假若無人患此病，則顯得事倍功半，不妨冒險先一起測，其反應應為負，如反應非負，再一個個測則需 $n+1$ 次，如採用此法，可以下列算法算出每次試驗應取多少樣品，才能將測試次數降到最少：

P : 表一個人患病的機率 $q = 1 - p$

$$q^N \cdot 1 + (N+1)(1-q^N) = 1 + N(1-q^N)$$

若期望 $q = 1$ ，則上式之期望值為 1，即所需測之次數為一次；若 $q = 0$ 則上式之值為 $n+1$ 次，亦即需做 $n+1$ 次測試，實際上對任何 q 值皆可由上式算出最適當的 N 值。此方法在二次世界大戰時，被應用於糖尿病的檢驗，節省了許多人力、物力。

6. 血糖之調節

胰島素可以促進血糖轉變成肝醣儲存在肝中，糖尿病患者胰島素量不正常故造成血糖過多；血糖與胰島素在人體內的關係，可以下列線性關係說明：

c_g : 表體內超過正常標準的葡萄糖量

c_i : 表體內超過正常標準的胰島素量

$G(t)$: 表消化吸收食物後注入血液中之葡萄糖

$I(t)$: 表胰臟製造之胰島素或靜脈注射之胰島素

$$\frac{dc_g}{dt} = -m_1 c_g - m_2 c_i + G(t) \quad m_1, m_2, m_3, m_4 > 0$$

$$\frac{dc_i}{dt} = -m_3 c_i + m_4 c_g + I(t)$$

根據上二式可畫出病人之曲線以與正常人比較是否患糖尿病，如患病應給予多少胰島素才適合。

7. 心輸出量的測定

每分鐘心輸出量即心臟每分鐘射出血液的總量。欲測量心輸出量，祇能採用不會影響循環速度的方法，否則結果不可靠。這些方法大都根據費克氏原理 (Fick principle) 設計。費克氏原理即：單位時間內被肺吸去的氣體總量 = 單位時間內肺靜脈血所含氣體總量 - 單位時間內肺動脈血所含氣體總量”。故知每分鐘耗氧量則可算出每分鐘心輸出量，其計算方法如下：

$\dot{V}$ 代表每分鐘耗氧量

A_{O_2} 表 100 C.C. 肺靜脈血之含氧量

V_{O_2} 表 100 C.C. 肺動脈血之含氧量

C.O. 每分鐘心輸出量

$$C.O. = \frac{\dot{V}}{A_{O_2} - V_{O_2}}$$

肺靜脈血已從肺泡中獲得氧氣，再將血液帶回左心室，左心室打出之血液即動脈血，因肺靜脈血不易採取，而動脈血之含氧量與肺靜脈血相當，因此可以動脈血代替；同理，靜脈血之含氧量與肺動脈血者相當亦可取代之。

8. 無效氣的測量

氣體由氣道進入肺泡後，才能在肺泡中與微血管中的血液發生氣體交換，在未達肺泡前的區域稱為無效腔。在無效腔的氣體是一種無效氣，有時肺泡周圍的血管發生病變，則此肺泡中之氣體亦是無效氣，因此無效氣是生理上的名詞，其可能大於無效區的體積，不過我們可以測量出無效氣的體積，

再推算無效區的體積。無效氣的測量依據 Bohr 公式可求得。其原理為以 X 氣體讓受試者吸入肺，此氣體將與肺中之無效氣均勻混合，此後受試者呼出此氣體之容積應為肺泡中此氣體之容積與無效氣中此氣體容積之和。其公式如下：

V : 容積 E : 呼氣 I : 吸氣 A : 肺泡氣 D : 無效氣 F : 氣體之百分數

$$F_{EX}V_E = F_{AX}V_A + F_{DX}V_D \dots\dots\dots(1)$$

當 X 氣體進入肺後，將和無效區之氣體均勻混合，因此無效區中 X 氣體之百分數 (F_{DX}) 應等於吸入氣中 X 氣體之百分數 (F_{IX})，亦即 $F_{IX} = F_{DX}$ ，將此代入(1)式則得

$$F_{EX}V_E = F_{AX}V_A + F_{IX}V_D \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{又因 } V_A = V_E - V_D \quad \text{所以由(2)式可解得 } V_D = \frac{(F_{AX} - F_{EX})V_E}{F_{AX} - F_{IX}} \dots\dots\dots(3)$$

$$\text{因 } F_{IX} = 0 \quad \text{故 (3)式可簡化成 } V_D = \frac{(F_{AX} - F_{EX})V_E}{F_{AX}} \dots\dots\dots(4)$$

因 F_{AX} 為肺泡中 X 氣體之百分數，不易測量，如肺泡功能健全，其應與動脈血之 X 氣體相當，故(4)式可改為

$$V_D = \frac{(P_{ax} - F_{EX})V_E}{P_{ax}} \quad P_{ax} \text{ 動脈血中 X 氣體之百分數}$$

二、遺傳數學

1. Hardy-Weinberg 定律

此定律即任意雜交所得之各種遺傳組合的比例代代不變。係由純數學家 Hardy 和遺傳學家 Weinberg 導證，故以兩位的名字稱之。其導證過程如下：

p : 表顯性組合之機會

q : 表異質基因組合之機會 $p + q + r = 1$

r : 表隱性組合之機會

任意雜交後，第一子代各種遺傳組合的機會如下：

$$p_1 = (p + \frac{1}{2}q)^2, \quad q_1 = 2(p + \frac{1}{2}q)(\frac{1}{2}q + r), \quad r_1 = (\frac{1}{2}q + r)^2 \dots\dots\dots(1)$$

第二子代各種組合機會應為：

$$p_2 = (p_1 + \frac{1}{2}q_1)^2, \quad q_2 = 2(p_1 + \frac{1}{2}q_1)(\frac{1}{2}q_1 + r_1), \quad r_2 = (\frac{1}{2}q_1 + r_1)^2 \dots\dots\dots(2)$$

將(1)式之 p_1 , q_1 代入(2)式之 p_2

$$\begin{aligned} \text{則} \quad p_2 &= [(p + \frac{1}{2}q)^2 + \frac{1}{2} \cdot 2(p + \frac{1}{2}q)(\frac{1}{2}q + r)]^2 \\ &= [(p + \frac{1}{2}q)(p + q + r)]^2 \end{aligned}$$

$$= (p + \frac{1}{2}q)^2$$

$$\therefore p_1 = p_2 \quad \text{同理可證 } q_1 = q_2 \quad r_1 = r_2$$

2. 以除去隱性組合的方式改良遺傳品質

此法為在每次雜交前除去隱性組合，則第二子代異質基因組合之機會為 $q_2 = \frac{q_1}{1 + \frac{1}{2}q_1}$ ，同理，第

$$n+1 \text{ 代時 } q_{n+1} = \frac{q_n}{1 + \frac{1}{2}q_n}$$

依據上式我們可知當 n 愈大時 q_n 愈趨近於 0，同時可算出當異質基因型低於某一機率時，需做 n 次除去隱性組合的雜交。

3. 內交型式 (Inbreeding model) 的結果

假設顯性基因組合的植物只和顯性組合者雜交，異質基因組合者只和異質基因組合雜交，隱性基因組合者自交稱為內交，則其各種後代之機率可由下式算出：

$$p_{n+1} = p_n + \frac{1}{4}q_n, \quad q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n, \quad r_{n+1} = r_n + \frac{1}{4}q_n$$

如令 $n \rightarrow \infty$ 並解上式則得 $p_n \rightarrow p_0 + \frac{1}{2}q_0, \quad q_n \rightarrow 0, \quad r_n \rightarrow r_0 + \frac{1}{2}q_0$

表示雜交次數愈大，異質基因組合者將逐漸消失，此法可應用於植物品種之改良。

4. 異交模式 (Sibmating model) 的結果

假設 D 表顯性基因組合， H 表異質基因組合， R 表隱性基因組合，如有下列六種雜交情形： $D \times D$ ， $R \times R$ ， $D \times H$ ， $H \times R$ ， $H \times H$ ， $D \times H$ ； P_n, Q_n, R_n, S_n, T_n 和 U_n 分別代表第 n 代時上六種雜交之機率，假設 $F_n = (P_n, Q_n, R_n, S_n, T_n, U_n)$ ，則 F_n 可表示為 $F_0 C^n$ ，其中 C 為一 6×6 的矩陣，其固有值為 $\frac{1}{4}, \frac{1-\sqrt{5}}{4}, \frac{1+\sqrt{5}}{4}, \frac{1}{2}, 1, 1$ 。最後兩個固有值使得此種異交模式具有吸收性，故最後雜交的結果只有顯性組合或隱性組合。

5. 表兄妹結婚違反優生學

因為當隱性基因被大量淘汰時，由兄妹結婚而得隱性組合之子代的機率相當大，其二者機率比為

$$\frac{p \text{ (由兄妹結婚後所得之隱性子代)}}{q \text{ (由大量淘汰隱性組合之隱性子代)}} = \frac{1(1+2\sqrt{r})^2}{9(1+\sqrt{r})^2} \times (\frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{7}{9})$$

r 係隱性組合之機會，非常小，則上式之比就會相當大，如 $r = 10^{-6}$ 時，則上式之值為 250。表示由兄妹婚配產生隱性子代之機會為非近親婚配之 250 倍，所以表兄妹結婚是違反優生學。

6. 血型的推算

血型可被一對對偶基因決定，但有三種型式即 I^A, I^B, i ，且 I^A, I^B 對 i 為顯性。因此 A 型者，其基因型可能為 $I^A I^A$ ，或 $I^A i$ ； B 型者有 $I^B I^B, I^B i$ ； O 型者為 ii ； AB 型者為 $I^A I^B$ 。如果已知雙親之血型，則可推知其後代可能的血型，亦可由子代的血型，推斷其父母可能的血型，這個方法可

應用於親子之鑑定。

三、生態數學

生態學是研究生物和環境的關係，例如種與種間如何競爭食物，某種生物的代謝活動如何對環境造成污染或毒化，族群大小的改變。生態數學可用一個或一組微分方程式來解釋單種族群的動態，族群大小和出生率、死亡率的關係，獵物與獵食者在生態系中的變化，二種競爭者的人口變化，甚至許多互相作用的種間人口變化。下面僅舉三例說明之。

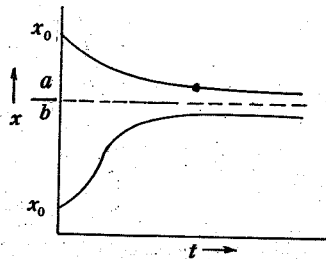
1. 單種的族群動態

(1) 當族群生活的空間與食物來源無限時

$x(t)$ 表 t 時間族群的大小，族群生長的速率依 $\frac{dx}{dt} = (\lambda - \mu)x = ax$ 計算，此式積分爲 $x = x_0 e^{at}$ ，故表示在此狀況下族群依指數生長。

(2) 生活的空間與食物來源有限，族群內部的生物會發生競爭

，則其生長速率依 $\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 = x(a - bx)$ ，因此族群是否穩定決定於 a/b 值，其圖形如右。



2. 獵物與獵食者之關係

$x(t)$ 表獵物的族群大小

$y(t)$ 表獵食者的族群大小

$\frac{dx}{dt} = ax$ 表獵物族群因時間改變而變大

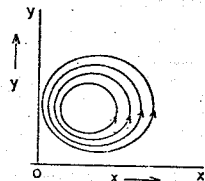
$\frac{dy}{dt} = -py$ 獵食者繁殖的結果造成族群增大，但食物缺乏亦造成族群變小。故獵食者之族群因時間改變而減少。

但是，當獵物與獵食者相遇時，獵物被食，其族群變小，獵食者獲得食物，加速生長、繁殖，族群因而變大，故二者在同一環境生存時，其族群變化依下列微分方程組

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy$$

$$\frac{dy}{dt} = cxy - py$$

將上列方程組積分， $x(t)$ 和 $y(t)$ 皆是週期函數，它們的軌道圖形如右所示：



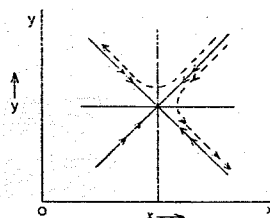
3. 二種競爭共同食物來源的族群動態

甲、乙兩種生物單獨存在時，其族群生長情形成指數增加，但若二者共同競爭食物來源且生活在一起時，族群的增長皆受抑制，其生

長情形依

$$\frac{dx}{dt} = ax - bxy \quad \frac{dy}{dt} = py - cxy$$

其生長軌跡在 xy 平面如右圖，且競爭到最後將有一種族群完全死亡。



以上我們僅介紹三大領域的一些問題，其實這類生物數學的問題尚有許多，如河流或海洋魚獲量及經濟效益的問題，鳥類在空中飛翔、魚在水中游泳、昆蟲飛翔的機制，心血管系的血流問題，血液流經腎臟的流體動力學問題，膝關節和運動的問題，神經纖維表面電位的計算，神經網模式的解釋…等。

註：改寫自

1. J.N. Kapur, Some problems in biomathematics, INT.J.MATH.EDUC.SCI.. TECHNOL., 1978, VOL. 9, NO. 3, 287-306
2. J.H. Comroe, Physiology of Respiration, 2nd Ed.
3. A.C. Burton, Physiology and Biophysics of the Circulation, 2nd Ed.

地球內部的能源

取材自：Frontiers of science 3 :
Introduction to earth sciences

從歷史上看，地球上最使人恐懼的現象，莫過於火山的爆發，（這說明了地球內部蘊藏著極大的熱與壓力）。

火山爆發噴流出來的物質，造成了我們居住的大陸的大部份。



十四世紀坦丁的神曲，形容地獄的情形，使人震驚。

當時坦丁是由於義大利西耶那地熱蒸氣的吼聲，而引起的靈感。

現在則運用它為渦輪的動力，發電。

此種巨大的能源，全世界中都在竭力的勘察，以期利用為動力之源。

世界上，有許多場所，都有地熱從地下噴出。

這種地熱，是起因於火山的活動，使接近地殼表面的熔化的岩石（即岩漿）蒸發地下水所造成—岩漿的熱度可高達 800°C 。

地下水的來源，是由雨水及河川水由地表的滲入。

地下岩漿就像一隻煮水的大鍋一樣，不斷的蒸發。

地熱蒸發出的蒸氣，有的由地殼的空隙噴出，有的則相反的被岩石的巨大壓力所扣罩著。

探測地下蒸氣的工作，也和調查油井的方式一樣，向地下掘深井。

蒸氣井可能繼續使用 10 年以上，是一種無限的能源。

地熱之所以為舉世所重視的主要原因，是因為它可供需要與日俱增的發電動力。

利用蒸氣運轉渦輪，較利用煤或石油的動力，可節約 25 % 生產資本，並且亦無污染的顧慮。



編輯室

降低，而維繫細胞之活力。

細胞分裂激素有時對萌芽亦有影響，例如須要光照才能萌芽之莖莖種子，若先以 Kinetin 處理，在暗處亦能萌芽。又如施用細胞分裂激素於蘋果之側芽及杏之枝條，可抑制其頂端優勢，而使側芽萌發。而蘋果及葡萄之休眠芽亦可以此種激素打破。利用 Kinetin 處理亦可促進馬鈴薯塊莖之形成，且能增加澱粉之聚積。

生長抑制劑 (inhibitors) 係在植物體內抑制或延緩一種生理或生化過程之植物生長調節物質，其種類繁多。有些植物體內生成的生長抑制劑係其生理必須之植物賀爾蒙，然其作用各異，如生長抑制劑、植物生長素抑制劑、植物濫長素抑制劑或萌芽抑制劑等。近年來新合成的有機藥劑——植物生長延緩劑 (plant growth retardants) 能延緩細胞分裂及莖組織的延長，在生理上調節植物的高度而不致形成畸形的葉及莖，此種化合物同時可加深綠葉，且間接的影響開花。

植物體內自然生成的生長抑制劑以 ABA (abscisic acid) 為主，它可從許多植物之不同部位分離出來。此化合物一般出現於成熟及老化的組織，但在嫩葉及幼果亦曾被發現。ABA 之作用一般在誘導老化，加速葉、花及果實離層之形成，抑制幼苗生長及延長種子休眠等。除 ABA 以外，其他尚有十數種由植物體自然生成的生長抑制劑，如 Benzoic acid, Gallic acid, Cinnamic acid, Coumarin 等等。人工合成的生長抑制劑，在農業上非常重要，有些被用來解決過度生長的困擾，有些則用來促進開花，延緩老化及控制其他的植物生理機能。最初在農業上應用之生長抑制劑為 MH (Maleic hydrazide)，此種化合物可用來防止馬鈴薯塊莖及洋葱在貯存時之發芽及烟草之抽枝，並且在某些範圍內被用來控制草本植物之過度生長。

在 1950 年及 1960 年代被發現之植物生長延緩劑包括 SADH (Succinic acid-2,2-dimethylhydrazide), CCC (2-chloroethyl trimethylammonium chloride), phosphon-D (2,4-dichlorobenzyltributyl-phosphonium chloride) 及 Amo-1618 (Ammonium (5-hydroxycarvacryl) trimethyl chloride peridine carboxylate)，這些化合物一般可防止次頂端分生組織 (subapical meristem) 之細胞分裂，而延緩莖之伸長，但却不一定影響到頂端分生組織。不過施用 SADH 於蘋果却顯示出抑制頂端分生組織之活力。生長抑制劑一般來說對根的發生，芽及種子的萌發均有抑制作用。

生長抑制劑如 CCC 及 SADH 等有促進開花之功效，主要係因其抑制莖之生長，而將多餘的養分供做花芽之發育。然而，若使用之濃度過高，對某幾種的植物，不但不能促進開花，反而有抑制的作用。曾經利用 CCC 或 SADH 促進開花之果樹有桃、蘋果、梨、檸檬，及蔬菜如蕃茄、菜豆等，其他並有多種花卉。CCC, SADH 及 phosphon D 亦能增進葡萄及蘋果的著果，但多半會使果實減小。然而，ABA 對著果則有反效果。

乙烯 (ethylene) 在所有植物組織內均能自然產生，其中以成熟的果實產量最豐。一種人工合成的藥劑 ethephon 能在植物組織內分解而放出乙烯氣體，在植物體內發生作用。如今 ethephon 已廣泛地被應用在農業上，因其作用與 ethylene 相似。

直到 1960 年代乙烯才被公認為一種賀爾蒙。其化學構造係植物賀爾蒙中最簡單的一種，但其活性很強，僅需微量氣體即對植物生理現象產生很大的影響。

乙烯有促進萌芽及種子發芽之效應。休眠的馬鈴薯塊莖，及其他球莖、鱗莖、潤葉樹之切枝及根，以及一些品種之種子發芽均可用乙烯氣體

以短時間處理而達到目的，因若長時間處理或在萌芽或發芽後繼續處理則會抑制其萌芽或其莖葉之生長。乙烯之另一種效應是導致葉、嫩果及其他器官之早熟脫落，它已早被熟知為果實之催熟化合物。在農業上如香蕉、檬果、哈密瓜、香瓜及柑桔類等均用之催熟，以便即時運銷市場。乙烯亦可誘使植物開花，如促進葫蘆科之雌花開放，及在美國夏威夷州廣泛使用之誘導鳳梨開花等。

田間施用乙烯氣體 ethylene 因其迅速消散而不切實際，一般均採用 ethephon 之水溶液噴灑於植株而讓它慢慢放出乙烯氣體，以達實際效果。

近年來又有兩種植物賀爾蒙被發現，一種是 Brassinolide 係從赤楊樹及薺苔之花粉中萃取之化合物。經過長期研究，科學家於 1979 年發表報告，指出這是一種類固醇，濃度只要一個 ppb 就有促進幼苗生長之顯著效果，10 ppb 之濃度即可使植物生長過快導致莖幹分裂。由於提煉及合成 Brassinolide 太貴，科學家已合成兩種類似物，效果良好。經試驗，施於幼苗，使蘿蔔、萵苣、豆類、胡椒、馬鈴薯等之產量增加一成到三成。另一種研究中之賀爾蒙是 Tricentanol（蜂花酯），含於紫花苜蓿中。在田間試驗時，使甜玉米重量增加半倍，顆粒增大，玉米穗增長，總數亦增加，此外，蕃茄約增產四分之三，而豆類幾乎增達一倍的產量。

自從達爾文當年之觀察而導致植物生長率（auxin）之發現後，有關賀爾蒙之問題已日漸複雜。如今雖有五種主要的植物生長調節劑，但將來可能有更多被發現，如已被發現之 Brassinolide 及 Tricentanol 等是。其他尚有一些被假定之賀爾蒙，其是否存在尚須進一步探討，例如：開花賀爾蒙、促進根生長之根賀爾蒙及控制老化之賀爾蒙等。現代的分子遺傳學，已使得從事有關賀爾蒙對基因活動影響之生長與發育的研究，成為可能。利用外在的生長調節劑去改變植

物生長之研究已在迅速發展，其結果使得商業及實用上之數量不斷增加。在不久的未來，可確定的是，於可能範圍內，植物生長調節劑，將控制著所有的植物生長過程。

主要參考資料

1. Crane, J. C. 1969. The role of hormones in fruit set and development. Hortsci. 4 (2): 108-114.
2. Jones, R. L. 1973. Gibberellins: Their physiological role. Ann. Rev. pl. phy. 24:571-598.
3. Leopold, A. C. and P. E. Keiedemann. 1975. Plant growth and development. 2nd ed. Megraw-Hill Inc. New York.
4. Weaver, R. J. 1972. plant growth substances in agriculture. V. H. Freeman and company. San Francisco.
5. Weier, T. E., C. R. Stocking, and M. G. Barbour. 1974. Botany: an introduction to plant biology. 5th ed. John Wiley & Sons. New York.
6. 朱鈞、厲化潔譯（K. V. Thimann 原著），1976，五十年來植物賀爾蒙之研究。科學農業，24(5-6) 275-279。
7. 邢禹依，1981，簡介兩種新的植物生長調節素。科學農業，29(9-10)，259-268。
8. 易希道、許志超、李春序、謝萬權、宋世謹及周惠慈，1980，普通植物學（第三版），環球書社，台北
9. 高景輝，1979，結合性 Auxin。科學農業，27(11-12) 392-396。
10. 高景輝、湯文通，1977，植物生長抑制劑。科學農業，25(1-2) 2-5。