代數基本定理的一個證明

李恭晴

國立臺灣師範大學數學研究所

我們知道，一般的實係數 n 次方程式不一定有實數解，例如 $x^2+1=0$ 是一個一元二次實係數方程式，它沒有實數解。然而，當我們將實數系擴大到複數系時，則每一個一元 n 次方程式至少必有一個複數解，這就是有名的代數基本定理。詳言之，代數基本定理敘說：若 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 爲任意一個 n 次多項式（$n\geq 1$，$a_n\neq 0$），其係數 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 爲複數，則 $P(z)=0$ 至少必有一個複數解。

代數基本定理有很多不同的證明方法，本文舉出其中一個較簡易的證法，以供讀者參考。這個證法只用到複數的基本性質以及簡單的極限概念。

我們依照慣例以 $|z|$ 表示複數 z 的絕對值，那麼 $|P(z)|$ 就是 $P(z)$ 的絕對值。若 $|z|=r$，則 z 可以寫成

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)$$

之形式，其中 θ 爲 z 之幅角。反之，若 z 可寫成上列形式，則顯然 $|z|=r$。

若 z_1，z_2 爲任意兩個複數，則

$$|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|\ ,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}\quad (z_2\neq 0)$$

且

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|.$$

在上述不等式中，若以 z_1+z_2 代換 z_1，以 $-z_2$ 代換 z_2，則得

$$|z_1|\leq|z_1+z_2|+|z_2|$$

因此得

$$|z_1+z_2|\geq|z_1|-|z_2|.$$

不等式

$$|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$$

也可推廣到任意 n 個複數，而得

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leq|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$$

在複數平面上，$|z|$ 表示 z 點到原點的距離。因此，集合 $\{z \mid |z|=r\}$ 表示所有和原點的距

離爲 r 之點所成的集合，它的圖形是一個圓。同樣地，集合 $\{z \mid |z-z_0|=r\}$ 的圖形是以 z_0 爲圓心，r 爲半徑的一個圓。圓 $\{z \mid |z-z_0|=r\}$ 上的點可以寫成 $z-z_0=re^{i\theta}$ 或 $z=z_0+re^{i\theta}$ 之形式。

現在，我們證明引理 1：

引理 1：$\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{|P(z)|}{|z^n|}=|a_n|$

證明：因爲

$$\frac{|P(z)|}{|z^n|}=\frac{|a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n|}{|z^n|}$$

$$=\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$=\left|a_n+\left(\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right)\right|$$

所以

$$\frac{|p(z)|}{|z^n|}\leq|a_n|+\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$\leq|a_n|+\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right\}$$

另一方面

$$\frac{|p(z)|}{|z^n|}\geq|a_n|-\left|\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|$$

$$\geq|a_n|-\left\{\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right\}$$

故得

$$|a_n|-\Delta(z)\leq\frac{|p(z)|}{|z^n|}\leq|a_n|+\Delta(z)$$

其中

$$\Delta(z)=\left|\frac{a_{n-1}}{z}\right|+\cdots+\left|\frac{a_0}{z^n}\right|$$

因爲 a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1} 與 z 之值無關，所以當 $|z|\to\infty$ 時，$\Delta(z)$ 的每一項都趨近於 0，因而 $\Delta(z)\to 0$。所以

$$\lim_{z\to\infty}\frac{|P(z)|}{|z^n|}=|a_n|$$

此即爲引理 1。

由於 a_n 爲一個固定的複數，且 $a_n\neq 0$，所以由引理 1 知當 $|z|$ 趨近無限大時，$|P(z)|$ 也趨近

無限大。此事實可寫成引理如下：

引理2： $\lim\limits_{z\to\infty} |P(z)| = \infty$

現在我們可以利用間接證法證明代數基本定理。假設$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$（$n\geq 1$，$a_n\neq 0$），且假設$P(z)=0$ 沒有複數解，則0不是它的解，所以$a_0=P(0)\neq 0$。由於引理2我們可以選取一個相當大的正實數R，使得當$|z|\geq R$時，

$$|P(z)|>2|a_0|$$

$P(z)$是一個多項式，所以$|P(z)|$可視為是定義在圓形區域$\{z\mid |z|\leq R\}$的一個實值連續函數。由於這個圓形區域是有界的閉集合，在此圓形區域中必有一個複數z_0，使$|P(z)|$在z_0處有最小值。即存在一個複數$z_0\in\{z\mid |z|\leq R\}$，使得對於所有的$z\in\{z\mid |z|\leq R\}$。恒有

$$|P(z_0)|\leq|P(z)|$$

由於$|P(0)|=|a_0|$，且當$|z|=R$時，$|P(z)|>2|a_0|>|a_0|$，所以z_0不可能在圓$\{z\mid |z|=R\}$的圓周上，而是在其內部。換句話說，$|z_0|<R$。

現在將$P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$寫成$(z-z_0)$之多項式，設其為

$$P(z)=b_0+b_1(z-z_0)+\cdots+b_n(z-z_0)^n.$$

則$b_0=P(z_0)\neq 0$，且顯然$b_n=a_n\neq 0$。假設b_k為b_1，b_2，…，b_n中第一個不等於0的數，則$P(z)$又可寫成

$$P(z)=b_0+b_k(z-z_0)^k+\cdots+b_n(z-z_0)^n \qquad (b_k\neq 0,\ 1\leq k\leq n)$$

因為$|z_0|<R$，所以可以選取一個實數$\varepsilon>0$，使得

$$\varepsilon<R-|z_0|.$$

則點$z=z_0+\varepsilon e^{i\theta}$在以$z_0$為圓心，$\varepsilon$為半徑之圓上，因此在圓形區域$\{z\mid |z|\leq R\}$的內部。所以

$$\begin{aligned}P(z)&=P(z_0+\varepsilon e^{i\theta})\\&=b_0+b_k\varepsilon^k e^{ik\theta}+b_{k+1}\varepsilon^{k+1}e^{i(k+1)\theta}+\cdots+b_n\varepsilon^n e^{in\theta}\\&=b_0\{1+\varepsilon^k(\frac{b_k}{b_0}e^{ik\theta}+\varepsilon\frac{b_{k+1}}{b_0}e^{i(k+1)\theta}+\cdots+\varepsilon^{n-k}\frac{b_n}{b_0}e^{in\theta})\}\end{aligned}$$

當ε相當小時，上式小括號中第二項以後各項之和的絕對值

$$\left|\varepsilon\frac{b_{k+1}}{b_0}e^{i(k+1)\theta}+\cdots+\varepsilon^{n-k}\frac{b_n}{b_0}e^{in\theta}\right|$$

也跟著可變得任意小。若我們選取θ使得$k\theta$為$-\dfrac{b_0}{b_k}$之幅角。

即

$$(-\frac{b_0}{b_k})\Big/\left|\frac{b_0}{b_k}\right|=e^{ik\theta}$$

則

$$\frac{b_k}{b_0}e^{ik\theta}=-\frac{1}{\left|\frac{b_0}{b_k}\right|}=-\left|\frac{b_k}{b_0}\right|$$

爲一個負實數，且與 ε 之值無關。因此，對於這個 θ，當 ε 相當小時

$$\left|1+\varepsilon^k\left(\frac{b_k}{b_0}e^{ik\theta}+\varepsilon\frac{b_{k+1}}{b_0}e^{i(k+1)\theta}+\cdots+\varepsilon^{n-k}\frac{b_n}{b_0}e^{in\theta}\right)\right|<1$$

故得

$$|P(z)|=|P(z_0+\varepsilon e^{i\theta})|<|b_0|=P(z_0)$$

此爲矛盾之結果。所以 $P(z)=0$ 至少有一個複數解。因此代數基本定理得證。

有關食物致癌的最新報導

文竹　譯

美國國家科學基金會(National Science Foundation)的一分支研究機構國家研究委員會(National Research Council)提出一項報導，指出一般常見的癌症大半是由於飲食所引發的。雖然到目前爲止仍無法正確地指明飲食的影響作用，但是該委員會已蒐集足夠的證據支持一套避免致癌的飲食指導：

・少吃含高量脂肪（飽和或非飽和）的食物，此委員會建議脂肪應減至每天總卡路里的百分之卅以下（對美國食物而言，其脂肪的主要來源爲肥肉、全脂乳品和食油）。

・每天吃水果、蔬菜及全穀類的產品，特別是含高維他命C及能轉變成維他命A的胡蘿蔔素，以及一些含有尙未鑑定出其防癌成分的食物（這些食物包括柑橘、葡萄柚、深綠色的蔬菜、胡蘿蔔、南瓜、蕃茄和白菜類的蔬菜如白菜、甘藍菜、花椰菜和包心菜等）。此委員會反對食用含高單位營養份的補藥。

・少吃鹽醃浸的或煙燻的食物（在美國此類食物包括香腸、火腿、燻魚、臘肉和熱狗）。

・適量的飲酒。

雖然有的學者估計百分之卅至六十的癌症是由飲食所導致，但是此委員會指出到目前爲止尙無飲食導致癌症的正確百分比數，也無控制飲食以減少致癌的可靠數據。

此委員會發現有很多證據指出癌症與脂肪的食用量之間有很密切的關聯，無論是在流行病學上或是在實驗室的研究上均指出，大多數的大腸、乳部及前列腺等部位的癌症患者都食用大量的飽和或非飽和脂肪，此類研究並指出吃少量脂肪的人較少機會患此類癌症。

此委員會中來自康奈爾大學的Campbell 博士說：“環境內的因素如空氣、水、食物和太陽均能導致正常細胞變異，但是無論如何，此類癌細胞日後是否會發作或抑制住，則受個人飲食習慣的影響。”

（譯自 *The Science Teacher*. Vol. 49, No. 6, Sep 1982)