

也談包絡線

賴漢卿

國立清華大學數學系

在科學教育月刊 53 期（民國 71 年 10 月），有師大教授趙文敏先生介紹包絡線一文，並舉四角星形線、三角星形線、心臟線與蚶線等四種包絡線為例，說明其表現方程式或參數式以及求其曲線長與面積。本文想藉這個機會再談一談包絡線的形成以及在高中解析幾何的部分所涉及的一些方法與例子。或許對於包絡線感到興趣的師生能得到一點補充的材料。

包絡線這個稱呼高中數學中大概不大出現，但以參數式

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

表現的曲線上之一點的切線，則常會遇到的。如果包絡線的話題，僅限於直線族的包絡線，則易為高中數學之水準所吸引，本文就以這種包絡線為題來講，在文中我們有時以導數（微分）表示曲線的斜率，這並不涉及太多微積分的概念。

1. 直線族的包絡線

拋物線

$$y^2 = 4px, \quad p \text{ 為實數常數}$$

以 t 為參數可表成

$$x = pt^2, \quad y = 2pt, \quad t \text{ 為任意實數}$$

則拋物線 $y^2 = 4px$ 上一點 $(pt^2, 2pt)$ 的切線方程式為

$$y - 2pt = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} (x - pt^2)$$

$$y - 2pt = \frac{2p}{2pt} (x - pt^2)$$

或

$$x - ty + pt^2 = 0$$

不借助導數的概念，
可以斜率求得最後
一式所表現的切線
方程式

這個切線方程式是以 t 為參數的直線族，且由其引導的方法，我們知道此直線族所屬的直線，都會與

拋物線 $x = pt^2$, $y = 2pt$ 相切。像這種情形，我們稱直線族 $x - ty + pt^2 = 0$ 包著拋物線 $x = pt^2$, $y = 2pt$ (即 $y^2 = 4px$) 或曲線 $y^2 = 4px$ 為此直線族的包絡線。參見圖 1。

一般以 t 為變數之函數 $l(t)$, $m(t)$, $n(t)$ 滿足方程式

$$(1) \quad l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$$

時，方程式(1)表示一直線族，今對於此直線族，存在一曲線：

$$(2) \quad x = x(t) , \quad y = y(t)$$

使屬於直線族 $lx + my + n = 0$ 之各直線都與曲線 $x = x(t)$, $y = y(t)$ 相切於一點。此時曲線(2)稱為所考慮之直線族的包絡線。

但上述之參變數 t 變化時，如果直線 $l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$ 作平行移動，則此直線族並不能包絡一曲線。我們來看看參數 t 變化時直線族成為平行移動的條件是：有常數 a , b 使下面等式成立。

$$\frac{l(t)}{a} = \frac{m(t)}{b} , \quad \text{即} \quad \frac{m(t)}{l(t)} = \text{常數}$$

換句話說直線族的各直線斜率相同。於此以微分行之則

$$\frac{l'(t)}{a} = \frac{m'(t)}{b} \quad \text{或} \quad \frac{l'}{l} = \frac{m'}{m} , \quad lm' - l'm = 0$$

$$\text{於是} \quad \left(\frac{m}{l}\right)' = \frac{lm' - l'm}{l^2} = 0 \quad \text{就示明} \quad \frac{m}{l} = \text{常數}。$$

故包絡可能的話，我們自然就假設

$$lm' - l'm \neq 0 \quad \text{即} \quad \frac{m}{l} \neq \text{常數} \quad l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$$

其中 l' , m' 都表示 l , m 之微分。

2. 直線族之包絡線的求法

本節來探討求直線族 $l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$ 之包絡線

$$x = x(t) , \quad y = y(t)$$

的方法：(見圖 2)

此時對同樣的 t 值，屬於直線族之一條直線就與

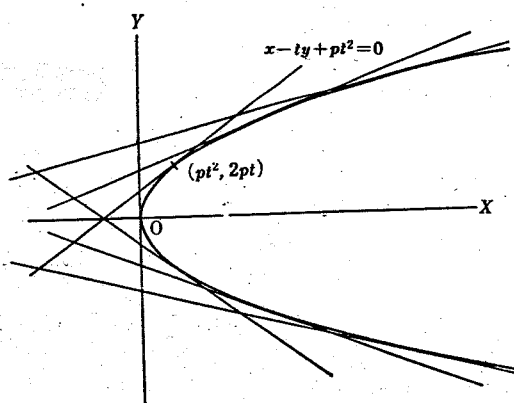


圖 1

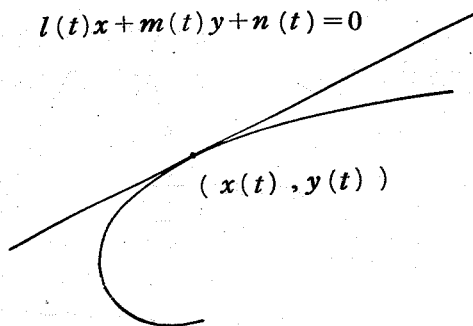


圖 2

曲線相切於點 $(x(t), y(t))$ ，所以該點應滿足

$$(1) \quad l(t)x(t) + m(t)y(t) + n(t) = 0$$

這個直線的斜率為

$$-\frac{l(t)}{m(t)}$$

應與此曲線在該點的斜率 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ 相同，即

$$-\frac{l}{m} = \frac{y'}{x'}, \quad lx' + my' = 0$$

但(1)對 t 微分即得

$$l'x + lx' + m'y + my' + n' = 0$$

利用 $lx' + my' = 0$ 便得滿足

$$(2) \quad l'x + m'y + n' = 0$$

解(1)，(2)聯立方程式，由於 $lm' - l'm \neq 0$ ，該解可唯一求得

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

這就是直線族 $l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$ 的包絡線。

上述過程，以下面方式來解釋大概會更有意思。

對於參變數 t 對應的直線

$$(3) \quad l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$$

於 t 做微動 Δt 而為 $t + \Delta t$ 時所對應的直線方程式

$$(4) \quad l(t + \Delta t)x + m(t + \Delta t)y + n(t + \Delta t) = 0$$

考慮(3)，(4)兩直線之交點，則將兩式相減除以 Δt 得

$$\frac{l(t + \Delta t) - l(t)}{\Delta t}x + \frac{m(t + \Delta t) - m(t)}{\Delta t}y + \frac{n(t + \Delta t) - n(t)}{\Delta t} = 0$$

如果 $\Delta t \rightarrow 0$ ，則得

$$l'(t)x + m'(t)y + n'(t) = 0$$

像這樣二條直線的交點，是由 $\Delta t \rightarrow 0$ 的極限而成爲

二直線

$$(5) \quad \begin{cases} lx + my + n = 0 \\ l'x + m'y + n' = 0 \end{cases}$$

之交點。故直線族 $l(t)x + m(t)y + n(t) = 0$ 之包絡線，事實上是可看作像(5)之交點的軌跡。(見圖

3)

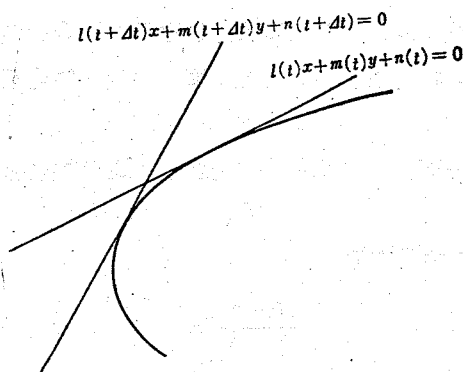


圖 3

3. 一些直線族的包絡線

例1 試求在 x 軸與 y 軸間定長 a 之直線族的包絡線。(見圖4)

解：以參數 t 表示直線與 x 軸所成的角，此直線方程式為

$$(1) \frac{x}{a \cos t} + \frac{y}{a \sin t} = 1 \quad (\text{截距式})$$

此式對於 t 微分得

$$(2) \frac{\sin t}{a \cos^2 t} x - \frac{\cos t}{a \sin^2 t} y = 0$$

直線族方程式(1)與方程式(2)聯立解得 x, y 為

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

要是消去 t 則得

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

這個曲線稱為四角星形線 (asteriod)。這個星形線也可定義為以半徑 a 之內部，用半徑為 $\frac{a}{4}$ 的圓無滑性之轉動，其圓周上一個定點所描畫出來的曲線（也稱為小圓轉動時，其周上定點的軌跡）。（見圖5）

例2 給與定點 F 與定直線 g 。此時在直線 g 上任取一點 P ，通過 P 引一直線垂直於 PF ，試求這些直線族的包絡線。（見圖6）

解：設由 F 引至直線 g 的垂線（這是固定的直線）為 x 軸，而直線 g 令為 y 軸，則點 F 的坐標可令為

$$F(p, 0)$$

於是在直線 g 也就是 y 軸上任取一點 P 的坐標為

$$P(0, t)$$

則 PF 的斜率為

$$\frac{0-t}{p-0} = -\frac{t}{p}$$

於是通過 P 而與 PF 垂直的直線之斜率為 $\frac{p}{t}$ ，其方程

式為

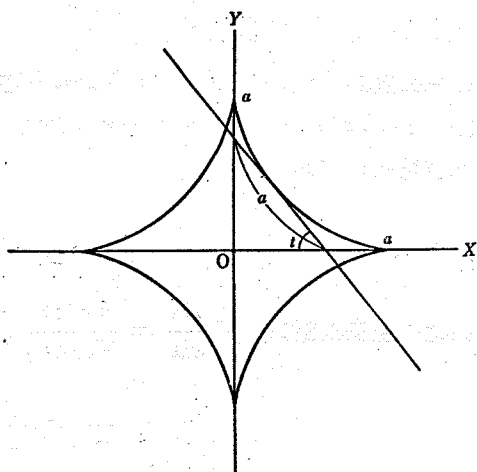


圖4

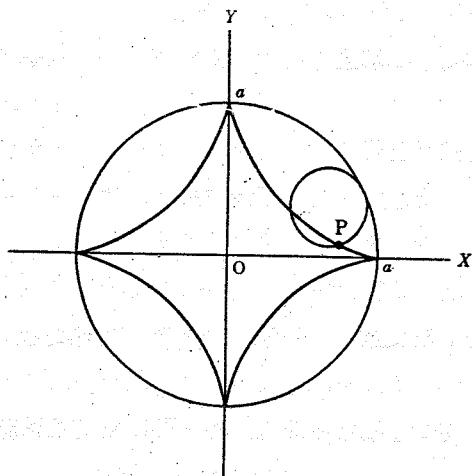


圖5

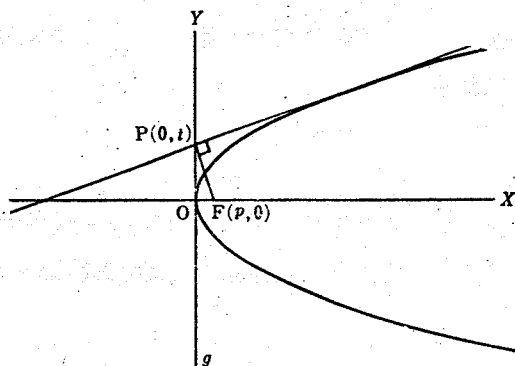


圖6

$$y - t = \frac{p}{t}(x - 0) \quad \text{也就是}$$

$$(1) \quad px - ty + t^2 = 0$$

欲求以 t 為參變數之直線族(1)的包絡線可將(1)對 t 微分而得方程式

$$(2) \quad -y + 2t = 0$$

從(1), (2)聯立解得

$$(3) \quad x = \frac{t^2}{p}, \quad y = 2t$$

如果要消去參變數 t 使得

$$(4) \quad y^2 = 4px$$

(3)或(4)所代表的曲線就是直線族(1)的包絡線。

另解：將直線族方程式(1)寫成

$$t^2 - ty + px = 0$$

這是一個 t 的二次方程式，如指定 x, y 之值為

$x = x_1, y = y_1$ 則成為 t 的一般二次方程式

$$t^2 - y_1 t + px_1 = 0, \quad (\text{見圖 7})$$

一般 t 有二個值可滿足這個方程式。這表示通過點

(x_1, y_1) 之直線在此直線族中有二條與所要求之包

絡線相切。但如果點 (x_1, y_1) 在包絡線上，則這兩

條直線便重合，故直線族(1)的包絡線是 t 之二次方

式

$$t^2 - yt + px = 0$$

具有相等根之條件，也就是此二次方程式之判別式為 0：

$$(-y)^2 - 4px = 0$$

即

$$(4) \quad y^2 = 4px$$

為所求之包絡線。

例 3：設一個定圓內有一個定點 F ，今從此圓周上任取一點 P ，引通過 P 而與 PF 相垂直的直線，則 P 在圓周上動時，與 PF 垂直之直線乃形成一直線族，試求這個直線族的包絡線。

解：設定圓中心為 O ，與定點 F 的連線定為 x 軸，通過 O 而與 OF 垂直的直線命為 y 軸；若設定圓半徑為 a ，則圓方程式為

$$x^2 + y^2 = a^2$$

而定點 F 的坐標為 $F(c, 0)$ ，但 $0 < c < a$ ，故在圓周上任意點 P 的坐標以 t 為參變數可以表成：

$$P(a \cos t, a \sin t)$$

此時直線 PF 的斜率為

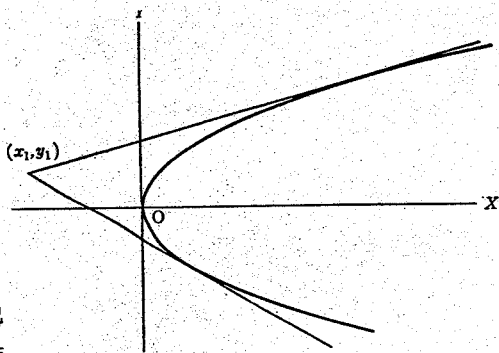


圖 7

$$\frac{a \sin t}{a \cos t - c}$$

隨之與 PF 垂直的直線就具有斜率

$$\frac{c - a \cos t}{a \sin t}$$

故過點 P 而與 PF 垂直之直線方程式為

$$y - a \sin t = \frac{c - a \cos t}{a \sin t} (x - a \cos t)$$

即(1) $(c - a \cos t)x - (a \sin t)y + a(a - c \cos t) = 0$

(見圖8)

為求直線族(1)的包絡線，我們可對 t 來微分方程式(1)，

得

$$(a \sin t)x - (a \cos t)y + ac \sin t = 0$$

或

$$(2) \quad (\sin t)x - (\cos t)y + c \sin t = 0$$

由(1), (2)聯立解得 x 與 y 如下：

$$(3) \quad x = \frac{a(a \cos t - c)}{a - c \cos t}, \quad y = \frac{(a^2 - c^2) \sin t}{a - c \cos t}$$

這就是所求包絡線的參數形(參數表現)，更進一層的，為一般所熟知的，注意 $c^2 < a^2$ ，將(3)變形為

$$\frac{x}{a} = \frac{a \cos t - c}{a - c \cos t}, \quad \frac{y}{\sqrt{a^2 - c^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2} \sin t}{a - c \cos t}$$

然後分別平方相加：

$$\begin{aligned} & \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{a^2 - c^2}}\right)^2 \\ &= \frac{(a \cos t - c)^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= \frac{a^2 \cos^2 t - 2ac \cos t + c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos t + c^2 \cos^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

即

$$(4) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$$

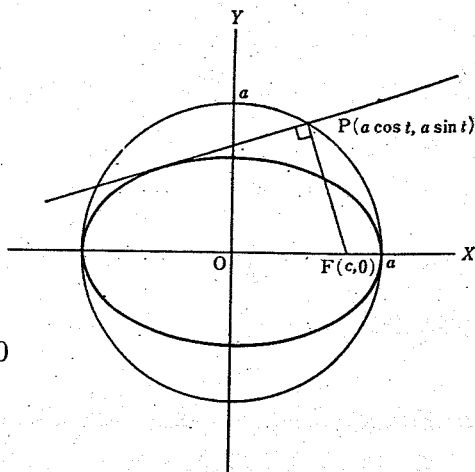


圖 8

這是一個橢圓，是我們要求的包絡線。

例4 一圓與圓外一定點 F 給定時，我們在圓周上任意取一點 P ，過 P 引 PF 的垂直線，這個垂直線因 P 在定圓周上動時，便形成一直線族，試求此直線族的包絡線。

解：這個問題是例3中之 $c < a$ 變成 $c > a$ 的問題。（見圖9）

如同例3之求法，我們可求得包絡線的參數式為

$$x = \frac{a(a \cos t - c)}{a - c \cos t}, \quad y = -\frac{(c^2 - a^2) \sin t}{a - c \cos t}$$

於此 $a < c$ ，於是改變上式形式為

$$\frac{x}{a} = \frac{a \cos t - c}{a - c \cos t}, \quad \frac{y}{\sqrt{c^2 - a^2}} = -\frac{\sqrt{c^2 - a^2} \sin t}{a - c \cos t}$$

各式兩邊平方相減得

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{c^2 - a^2}}\right)^2 &= \frac{(a \cos t - c)^2 - (c^2 - a^2) \sin^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= \frac{a^2 \cos^2 t - 2ac \cos t + c^2 - (c^2 - a^2) \sin^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= \frac{a^2 - 2ac \cos t + c^2 \cos^2 t}{(a - c \cos t)^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

即

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

這就是所求的包絡線，它是一雙曲線。

例5 有一半徑為 b 的圓與 x 軸相切於原點，此圓由這個位置出發在 x 軸上滾動，則與最初位置過原點的圓直徑相切之包絡線為何？即當該圓在 x 軸上滾動時，此過原點的直徑之斜率隨著在改變，而形成一直線族，試求該直線族的包絡線。

解：此圓如只轉 θ 角的位置時，該圓中心的坐標為 $c(b\theta, b)$ （見圖10）此時定直徑的斜率為

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

於是定直徑的方程式為

$$y - b = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (x - b\theta)$$

即

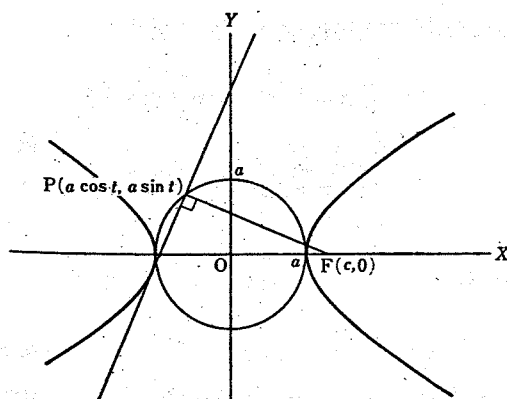


圖9

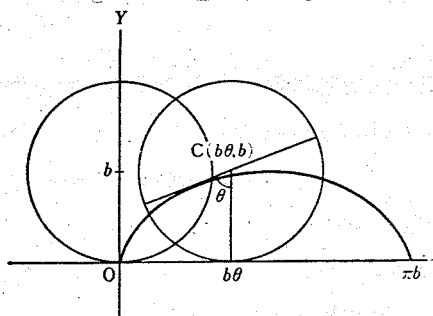


圖10

$$(1) \quad (\cos \theta)x - (\sin \theta)y - b(\theta \cos \theta - \sin \theta) = 0$$

這個直線族關於 θ 求微分後得

$$(2) \quad -(\sin \theta)x - (\cos \theta)y + b\theta \sin \theta = 0$$

解(1), (2)聯立方程式得 x, y 之解為:

$$\begin{cases} x = b(\theta - \sin \theta \cos \theta) \\ y = b \sin^2 \theta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = \frac{b}{2}(2\theta - \sin 2\theta) \\ y = \frac{b}{2}(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$$

於是令 $\frac{b}{2} = a, \quad 2\theta = t$, 則得

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

這是所求的包絡線, 它是以半徑為 a 之圓在 x 軸上不滑地轉動時, 與最初相切(原點)之圓周上之點 P 所描畫出來的軌跡, 如圖 11 為一節的擺線。

例 6 試求擺線

$$(1) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$$

之法線族的包絡線。

圖 11

首先任取一點 $P(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$ 在擺線上, 此點之法線斜率可求得: 先計算

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

則得在點 P 之法線的斜率為

$$-\frac{1 - \cos t}{\sin t}$$

於是在點 P 的法線方程式為

$$y - a(1 - \cos t) = -\frac{1 - \cos t}{\sin t} (x - a(t - \sin t))$$

即

$$(2) \quad (1 - \cos t)x + (\sin t)y - at(1 - \cos t) = 0$$

這個直線族(2)的包絡線可先由(2)關於 t 微分而得

$$(3) \quad (\sin t)x + (\cos t)y - a(1 - \cos t + t \sin t) = 0$$

再聯立(2), (3)解得

$$(4) \quad x = a(t + \sin t), \quad y = a(-1 + \cos t)$$

這是所求的包絡線。(見圖 12)

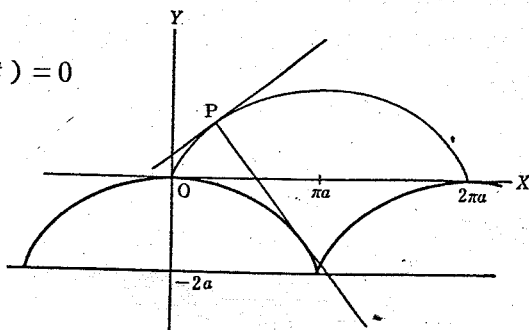
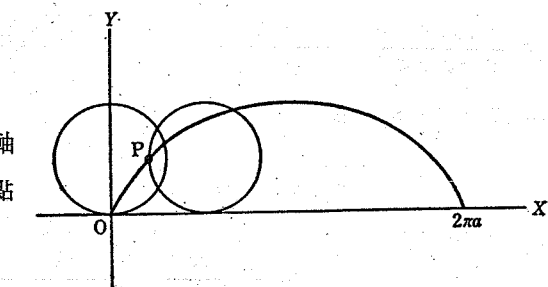


圖 12

若取 $0 \leq t \leq \pi$ 之範圍內，則(4)可改寫成

$$\begin{aligned}x &= a(t + \pi - \sin(t + \pi)) - \pi a \\y &= a(1 - \cos(t + \pi)) - 2a\end{aligned}$$

這與最初所給之擺線(1)在 $\pi \leq t \leq 2\pi$ 之部分相等，

只是 在 x 軸方向 平移 $-\pi a$
在 y 軸方向 平移 $-2a$ 而已。

又在 $\pi \leq t \leq 2\pi$ 範圍內，此曲線(4)可寫成

$$\begin{cases}x = a(t - \pi - \sin(t - \pi)) + \pi a \\y = a(1 - \cos(t - \pi)) - 2a\end{cases}$$

這是最初所給的擺線(1)在 $0 \leq t \leq \pi$ 的部分相等，而

只在 x 軸方向 平移 πa
 y 軸方向 平移 $-2a$ 。

換句話說，擺線之法線的包絡線是將原擺線做適當的平行移動而得。

地球的形狀

取材自：Frontiers of science 3:

Introduction to earth sciences

在紀元前 600 年時期，希臘數學家認為地球的形狀是和月球相似的。

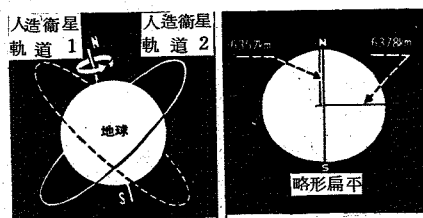
到紀元前 300 年代，希臘數學家阿里斯多德（384~322）在觀察日蝕及月蝕後，又進一步獲得證明地球為圓形。

這一觀念一直維持到人造衛星的升空，才進一步觀測出地球的正确形狀是梨形的。

人造衛星在飛行時，於兩極地區所受的地心引力比較在赤道部份所受的引力稍強。這可從它的軌道所發生輕微的搖動算出。

現在已知的是：地球乃一近似梨形而略形扁平的球體，北極距離地球中心較南極減少約 15 公里。

太空時代的技術與設備，已解決了若干世紀來，對地球的問題。



編輯室