指數與對數發展史簡介（下）

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

丙、對數的推廣及其與指數的結合

一、對數級數

Napier，Briggs，Vlacq，甚至其後的 Johann Kepler（1571～1630）等人計算對數值的方法都是根據等差、等比數列的比例方法；而在許多對數表都編製完成之後，數學家們才發現使用無窮級數來計算對數之值要容易得多。首先接觸到這個問題的應推荷蘭數學家 Gregory de Saint-Vincent（1584～1667）。

西元 1647 年，Gregory de Saint-Vincent 在他的著作 Opus Geometricum 一書中討論等軸雙曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 下的面積，他的說法是這樣的：下圖 2 是等軸雙曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 的一部分，令 $A(x')$ 表示 $y=\dfrac{1}{x}$ 的圖形、直線 $y=0$、$x=x_0$、$x=x'$ 所圍成的區域的面積，若

$$x_0\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ x_n\ ,\ \cdots\cdots$$

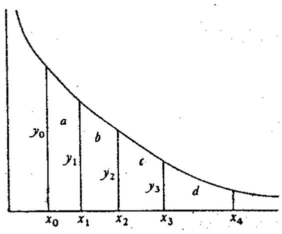

圖 2

形成一個等比數列，則

$$A(x_0)\ ,\ A(x_1)\ ,\ A(x_2)\ ,\ \cdots\cdots\ ,\ A(x_n)\ ,\ \cdots\cdots$$

形成一個等差數列。Gregory de Saint-Vincent 並沒有提到前面的面積 $A(x')$ 與對數的關係，但是，由於原始的對數概念乃是建立在等比數列與等差數列的關係上，所以，他的學生 Alfons de Sarasa（1618～1667，比利時人）在他西元 1649 年的著作 Solutio Problematis a Mersenno Propositi 中就指出了 $A(x')$ 與 $\log_e x'$ 的關係，事實上，以現代符號表示，乃是

$$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{t}\,dt = \log_e x - \log_e x_0$$

西元 1665 年，英國大科學家 Isaac Newton（1642～1727）也發現了等軸雙曲線下的面積與對數的關係，他進一步地利用他所發現的二項式定理把 $\frac{1}{1+x}$ 展成無窮級數，然後逐項積分而得

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - + \cdots\cdots$$

西元 1668 年，丹麥數學家Nicholas Mercator（1620～1687）利用Gregory de Saint-Vincent 的結果也獨立地發現上面這個無窮級數，不過，他並沒有很清楚地寫出上面的無窮級數而只是寫出了前面數項來計算所要的數值，例如，他令 $x=0.1$ 而得出 0.095310181，這個數值是計算到 $\frac{x^7}{7}$ 然後四捨五入而得的，而實際上的值 $\log_e 1.1 = 0.09531017980\cdots$。Mercator 還令 $x=0.21$ 來計算 $\log_e 1.21$ 的值。

利出前面的 Mercator 級數來計算 $\log_e(1+x)$ 之值，其缺點是該級數收斂得太慢，例如，計算到 $\frac{x^7}{7}$ 時，若 $x=0.1$，則七位正確；但若 $x=0.21$ 時，則

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{x^7}{7} = 0.190620758\cdots\cdots$$

而 $\log_e 1.21 = 0.1906203596\cdots\cdots$，所以，只有六位正確。若把 x 值選得很接近 1，如 $x=0.84$，則計算到 $\frac{x^7}{7}$ 時，所得的值爲 $0.62754864\cdots\cdots$，可是，$\log_e 1.84 = 0.60976557\cdots\cdots$，只有一位正確。Mercator 這些結果記載在他西元 1668 年的著作Logarithmotechnia之中，在其中，他仿照義大利數學家Pietro Mengoli（1625～1686）的說法，把前面所得的對數稱爲自然對數。

前面的Mercator 級數用在對數的計算上不太方便；所以，西元 1668 年蘇格蘭數學家 James Gregory（1638～1675）將下述二級數

$$\log_e(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - + \cdots\cdots$$

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - - \cdots\cdots$$

相減而得出

$$\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\cdots\right)$$

這個無窮級數在對數值的計算上確實比Mercator 級數要好些。它的另一項好處是：由於Mercator 級數中必須限制 $|x|<1$，同理，上述級數中也必須限定 $|x|<1$，可是，儘管有 $|x|<1$ 這個限

定，$\dfrac{1+x}{1-x}$ 却可以等於任意正數。換言之，即使不考慮收斂的快慢問題，Mercator 級數只能用來計算小於 2 之正數的對數，可是，上述級數却可用於計算任意正數的對數。另一方面，

$$\left|\log_e\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-2\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)\right|$$

$$\leqslant 2\cdot\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\cdot(1+x^2+x^4+\cdots\cdots)$$

$$=\frac{|x|^{2n+1}}{2n+1}\cdot\frac{2}{1-x^2}$$

此式則可用來估計 $\log_e\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ 之近似值的誤差。

關於積分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}$，微積分學的鼻祖之一的德國數學家 Gottfried Leibniz（1646～1716）作下面這種說法：他在西元 1676 年爲了討論曲線下的面積，曾引出了下面這個關係式：

$$\frac{w}{a}=\frac{dw}{dx}$$

Leibniz 把 dx 取爲常數 b 而得 $dw=\dfrac{b}{a}\cdot w$，亦即，w 的增量與 w 成正比，於是，若 x 依等差數列增加，則對應的 w 必成等比數列增加，因此，x 是 w 的對數。

近代數學中以 $\log x$ 表示 x 的對數，這個表示記號是 Leibniz 在西元 1675 年最先使用的，不過，此種表示法並未立即普遍，因爲其後的數學家還有許多人使用 lx 這種寫法。

二、對數曲線

由於法國數學家 Pierre de Fermat（1601～1665）及 Réne Descartes（1596～1650）分別在西元 1629 年及 1637 年引進了坐標幾何的概念，因此，從解析幾何的觀點來探討曲線的作法變成是很“流行”的一種方法，自然地，與對數有關的曲線也列入了探討的範圍。

西元 1638 年，Descartes 爲了討論在旋轉中的地球上一個物體落下時所經的路線，因而得出了他所稱的等角螺線 $r=ae^{b\theta}$（西元 1704 年，法國數學家 Pierre Varignon（1654～1722）稱之爲對數螺線）；當時，微積分學的發展正在風起雲湧，而計算曲線的弧長乃是微積分的一項重要功能，可惜，Descartes 誤以爲非代數曲線都無法求出弧長，所以，數學史上“第一個求得非代數曲線之弧長”的榮譽遂被義大利數學家 Evangelista Torricelli（1608～1647）所佔去了。西元 1645 年，Torricelli 使用無窮小方法證明了：在對數螺線 $r=ae^{b\theta}$ 上，從 $(0,0)$（此點是對數螺線上 $\theta\to-\infty$ 的點）至 $P(ae^{2bn\pi},\ 2n\pi)$ 間的長度與過 $P(ae^{2bn\pi},\ 2n\pi)$ 的切線在兩坐標軸間那一段（即圖 3 中的 $\overline{PT}$）的長度相等（這個長度是 $\dfrac{a}{b}e^{2bn\pi}\sqrt{1+b^2}$）。

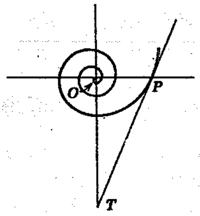

圖 3

除了對數螺線之外，在他 1647 年逝世前不久，Torricelli 曾經描出對數曲線 $x=\log_e y$ 的圖形（描繪對數函數的圖形，他可能是第一人），他也計算過 $x=\log_e y$ 的圖形、直線 $y=0$、$x=a$ 所圍成而位於直線 $x=a$ 左側的區域之面積，以及這個區域繞 x 軸旋轉所得的旋轉體的體積。

三、負數與虛數的對數

西元 1702 年，瑞士數學家 John Bernoulli（1667～1748）在計算下面這個積分

$$\int \frac{dz}{b^2+z^2}$$

時，利用下面這個變數變換

$$z=bi\,\frac{t-1}{t+1}$$

而使上述積分變成

$$\int \frac{i}{2bt}\,dt=\frac{i}{2b}\,\log_e t=\frac{i}{2b}\,\log_e\left(\frac{bi+z}{bi-z}\right)$$

可是，另一方面，他也知道

$$\int \frac{dz}{b^2+z^2}=\frac{1}{b}\tan^{-1}\frac{z}{b}$$

由此，他得出了下面的關係式

$$\tan^{-1}z=\frac{1}{i}\log_e\sqrt{\frac{1+iz}{1-iz}}$$

John Bernoulli 的這項發現引起相當的震撼，因爲當時的數學家大都把虛數看成“不可能”或“不存在”，何況從 Napier 以來的對數概念都只是“容許”正數才有對數；因此，John Bernoulli 的這項發現引起了長達一世紀的爭議——負數與虛數有沒有對數？

這個從 Leibniz 與 John Bernoulli 開始的對數爭議，主要的重點在於負數的對數。他們兩人之間這個友善的爭論發生在西元 1712 年至 1713 年長達十六個月，主要都是以書信的方式。Leibniz 的看法是：負數沒有對數，或者更正確地說，負數沒有實數值的對數（他把虛數看成是不存在的）。因爲他認爲：正數是大於 1 之數的對數，負數是小於 1 之正數的對數，所以，負數沒有實數值的對數。他又說，若 -1 有對數，則此對數值的一半就應該是 $\sqrt{-1}$ 的對數，但他認爲這是荒謬的。另一方面，John Bernoulli 却努力地想證明負數有實數值的對數。他認爲：因爲

$$\frac{d(-x)}{-x}=\frac{dx}{x}$$

故得 $\log_e(-x)=\log_e x$，而因為 $\log_e 1=0$，故可得 $\log_e(-1)=0$。可是Leibniz 却認為 $d(\log x)=\frac{dx}{x}$ 只有對正實數 x 才成立。

第二階段的爭議發生在 John Bernoulli 與瑞士大數學家Leonhard Euler（1707～1783）之間。從西元 1727 年至 1731 年之間，他們兩個人在同一個問題上企圖說服對方；John Bernoulli 仍然堅持他十多年前的看法，而 Euler 對 $\log_e(-x)=\log_e x$ 表示不同意，可是，Euler本人却也沒有一個固定的看法。

關於複數的對數這個問題，是隨著其他相關問題的發展而逐漸澄清的。這其中主要的是數學家們終於對指數函數與三角函數的關係理出了頭緒。西元 1714 年，英國數學家Roger Cotes（1682～1716）在Philosophical transactions 上發表了一篇論文，其中他得出一個結果，以現代數學術語表示，就是

$$i\varphi=\log_e(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

Cotes 得出這個結論的過程，以現代數學術語表示，乃是：將橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 繞 y 軸旋轉，則此旋轉體在 $y=0$ 及 $y=t$ 之間那一段的表面積

$$S=2a\pi\int_0^t\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}y^2}\,dy$$

有下面兩種表示法

$$S=a\pi\left[t\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\log_e\left(t\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}}+\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}\right)\right]$$

$$S=a\pi\left[t\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^4}t^2}+\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\varphi\right]$$

其中 $\sin\varphi=t\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^4}}=it\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^4}}$，$\cos\varphi=\sqrt{1+\frac{a^2-b^2}{b^4}t^2}$，將兩式比較，即得上面的等式。

法國數學家Abraham de Moivre（1667～1754）在西元 1707年發表的一篇論文中，為了要從下列兩式

$$\begin{cases}1-2z^n+z^{2n}=-2z^n t\\ 1-2z+z^2=-2zx\end{cases}$$

中消去 z，他令 $x=1-\cos\varphi$，$t=1-\cos n\varphi$，因而得出

$$(\cos\varphi\pm i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi\pm i\sin n\varphi$$

而在西元 1730 年的論文中，更得出

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^{1/n}=\cos\frac{2k\pi\pm\theta}{n}\pm i\sin\frac{2k\pi\pm\theta}{n}$$

在 de Moivre 所得的結果中，n 都是表示正整數，不過，他並沒有把結果寫得這麼清楚明白；像這樣的寫法是 Euler 所提出來的，而且 Euler 把前面的式子推廣到任意實數 r 。

西元 1740 年 10 月 18 日，Euler 在給 John Bernoulli 的信中，提出了這個結論，他說：

$$y=2\cos x\ ,\ y=e^{ix}+e^{-ix}$$

都是微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$$

的解，又因爲兩者可展成相同的冪級數，所以，可得

$$2\cos x=e^{ix}+e^{-ix}$$

他同時說明，他也了解 $\sin x$ 的對應公式：

$$2i\sin x=e^{ix}-e^{-ix}$$

前面這些公式，以及下面兩個公式都記載在他西元 1748 年的著作 Introductio in analysin 之中：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$
$$e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

西元 1747 年，Euler 對於指數、對數、及三角函數之間的關係已有足夠的了解，這些了解使他可以提出一個解決“複數的對數之爭論”的方案。他駁斥了 Leibniz 關於“ $d(\log_e x)=\frac{dx}{x}$ 只對正實數 x 才成立”的說法，也指出 John Bernoulli 關於“ $\log_e(-x)=\log_e x$ ”的錯誤；然後，他提出自己的說法如下：設

$$x=e^y=\left(1+\frac{y}{n}\right)^n$$

其中 n 表很大的數（請注意，上式第二個等號不正確），則

$$x^{\frac{1}{n}}=1+\frac{y}{n}$$

或是

$$y=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

由於有無數多個不同的 $x^{\frac{1}{n}}$ ，所以，也有許多不同的 y 值，又因爲 $y=\log_e x$ ，所以，$\log_e x$ 有無

數多不同的值。事實上，他把無數多個 $\log_e x$ 用下法來計算：設

$$x=a+ib=c(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

令 $c=e^C$，則得

$$x=e^C(\cos\varphi+i\sin\varphi)=e^C e^{i(\varphi\pm2\lambda\pi)}$$

於是，得

$$y=\log_e x=C+(\varphi\pm2\lambda\pi)i$$

其中 φ 爲正整數或 0。然後，Euler 下結論說，對正實數而言，只有一個對數值是實數，其餘的對數值都是虛數；而負數與虛數，則每個對數都是虛數。

Euler 所做的"每個不等於 0 的複數都有無數多個對數"之結論，乃是現代數學中所接受的意義；只是，他爲了解決爭論所作的實驗式的方案與當時數學上習見的方法有些不同，所以，法國數學家 Jean Le Rond d'Alembert（1717～1783）仍然未能信服，他仍然努力於 $\log_e(-1)=0$ 的證明，他認爲若 $\log_e(-1)\neq0$，則由 $\log_e(-1)^2=\log_e 1^2$ 却又已引出 $2\log_e(-1)=2\log_e 1=0$ 的矛盾結果。事實上，Euler 指出：在 $\log_e(-1)$ 與 $\log_e 1$ 都有無數多個值的情況下，下面這個等式

$$2\log_e(-1)=2\log_e 1$$

不能以古典的代數意義來解說，因爲（以現代術語表示）若把 $2\log_e(-1)$ 與 $2\log_e 1$ 都看成是一個集合，則 $2\log_e 1$ 只是 $2\log_e(-1)$ 的一個子集（兩個集合並不相等）。

四、對數與指數的結合

對數的發明人 Napier 及同時期的人都是從等比數列及等差數列間的關係來討論對數，當時既沒有現代的指數記號（Napier 的著作 descriptio 比 Descartes 的著作 La géométrie 早了二十三年），也沒有人發現指數與對數的互逆關係。

如果我們要探討"指數與對數什麼時候才開始結合"這個問題，可以回溯到西元 1685 年 John Wallis 的著作 Algebra，在該書的第十二章中，Wallis 從 1，2，4，8，……與 0，1，2，3，……這兩個數列出發來討論對數，接著推廣到

$$\begin{array}{l}1,\ r,\ rr,\ r^3,\ r^4,\ r^5,\ r^6,\ \cdots\cdots\\0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \cdots\cdots\end{array}$$

這兩個數列，並加以註解說：這些乘冪就稱爲對數。不過，他也只是說明 n 就是 r^n 的對數，而沒有很乾脆地使用"若 $y=a^x$，則 $x=\log_a y$"這樣的方法來定義對數。

西元 1694 年，John Bernoulli 在給 Leibniz 的一封信中也有類似的看法。在信中，他提到如何

利用 $y=\log_e x$ 的圖形來描繪 $y=x^x$ 的圖形，他的說法是這樣的：對每個正數 x_1，利用 $y=\log_e x$ 的圖形得出 $\log_e x_1$，然後，依幾何作圖得出 $x_1\log_e x_1$，接著，利用 $y=\log_e x$ 的圖形選取一個 y_1，使得 $\log_e y_1=x_1\log_e x_1$，如此所得的（x_1，y_1）就是 $y=x^x$ 的圖形上一點。在這種作法中，John Bernoulli 雖然沒有作很明顯的說明，但他已指出了 $y=x^x$ 與 $\log_e y=x\log_e x$ 兩式同義這件事實了。而在 Leibniz 給 Bernoulli 的回信中，就已寫出了 $y=x^x$ 及 $\log_e y=x\log_e x$ 這兩個式了。由此可見，Leibniz 及 John Bernoulli 對 $y=e^x$ 與 $x=\log_e y$ 的同義性有相當了解了。

Euler 通常被認定為最成功的數學符號設定者，以字母 e 來表示自然對數的底，就是Euler在西元 1727 年至 1728 年間居留俄國期間所最先使用的。西元 1731 年，Euler 給德國數學家Christian Goldbäch（1690～1764）的一封信中再度使用 e 來表示"其雙曲線對數（即自然對數）值為 1 的數"，這個符號第一次出現在書籍上則是西元 1736 年 Euler 所著的Mechanica（這是把Newton 的動力學以解析形式來表現的第一部書）。Euler 選用 e 這個字母，可能是取自 exponent（指數）的第一個字母，很快地 e 就被數學家們所接受而沿用下來。

西元 1770 年，Euler 在他的著作 Vollständige Anleitung zur Algebra 一書第二十一章中，開始使用 $y=a^x$ 來定義 $x=\log_a y$，事實上，Euler 在"證明"複數有無數多個對數值的過程中就已經使用了"由 $y=e^x$ 得 $x=\log_e y$"這個意義了。不過，在西元十八世紀中，以等比、等差數列來定義對數的方法仍然非常流行，原因可能是像 C. F. Kaussler 在西元 1808 年所說的：新的對數定義使初學者覺得艱澀不明而且觀念不易銜接。

有了 Euler 這種定義之後，現代數學中所常見的一些等式就都很容易推導出來了，例如，西元 1782 年，義大利數學家Gregorio Fontana（1735～1803）就曾使用過 $a=e^{\log_e a}$ 這樣的等式。

五、指數與對數概念的推廣

前面我們已經提到，Euler 在西元 1747 年就已定義了不為 0 之複數的對數為：若 $x=a+ib$，其中 a 與 b 為實數，則

$$\log_e x=C+(\varphi+2\lambda\pi)i$$

其中，C 為一實數滿足 $e^C=\sqrt{a^2+b^2}$，φ 為一角滿足 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 及 $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，而 λ 則為任意整數。

在得出前面結果的過程中，Euler 已經先定義過 e 的複數乘冪，即

$$e^{a+ib}=e^a(\cos b+i\sin b)$$

這個定義使他得出了數學上最了不起的等式

$$e^{\pi i}+1=0$$

這個等式之所以被認為最了不起，因為它包含了數學中最基本的兩個數：0 及 1；最重要的三個常數

：π、e、及 i ；最基本的三個運算：加、乘、指數。

除了前面的結果之外，Euler 曾使用過

$$e^{x}=(1+\frac{x}{n})^{n}$$

$$\log_{e} x=n(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

這種寫法（其中 n 表示很大的正數），以現代數學中正確的表示法，前面兩式應該是

$$e^{x}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^{n}$$

$$\log_{e} x=\lim_{n\to\infty} n(x^{\frac{1}{n}}-1)$$

有了這些成果之後，Euler 在西元 1749 年進一步地定義更一般化的指數，設 a，b，m，n，x，y 爲實數，若

$$(a+ib)^{m+in}=x+iy$$

他在兩邊取對數，令 $c=\sqrt{a^2+b^2}$ ，$\cos\varphi=\frac{a}{c}$ ，$\sin\varphi=\frac{b}{c}$，他得出

$$x=c^{m}e^{-n\varphi}\cos(m\varphi+n\ \mathrm{loe}_{e}\ c)$$
$$y=c^{m}e^{-n\varphi}\sin(m\varphi+n\log_{e} c)$$

由於滿足 $\cos\varphi=\frac{a}{c}$及 $\sin\varphi=\frac{b}{c}$的角 φ 有無數多，於是，他說，像 $(a+ib)^{m+in}$ 這類一般的指數也是“多值的”。例如，他舉出一個特例：

$$i^{i}=e^{-2\lambda\pi-\frac{\pi}{2}}$$

其中 λ 爲任意整數。這個有趣的結果早在西元 1746 年 Euler 給 Goldbach 的一封信中就提出來了。他由此例得出一個結論：虛數的虛數乘冪可能是實數。

這種複數的複數乘冪，d'Alembert 也考慮過，不過，他們所定義的多值函數 z^{w} 在現代數學中已是西元十九世紀複變數函數的討論範圍了，我們不再作進一步的說明。

丁、對數輸入中國後之狀況

一、對數之輸入

當義大利傳敎士Matteo Ricci （1552～1610，即利瑪竇）於西元 1581 年（明神宗萬曆九年）來華之時，對數尚未發明，所以，西學第一次輸入中國時，其中沒有對數。在明亡之前陸續來華的歐

洲傳教士，雖然大都通曉曆算，却也沒有把計算上非常有用的對數帶到中國。最先把對數傳入中國的是波蘭傳教士 Jean Nicolas Smogolenski（1611～1656，即穆尼閣）。

穆尼閣在西元 1646 年（清世祖順治三年）來到中國，薛鳳祚（？～1680）跟他學習，西元1653年（順治十年）兩人合編成比例對數表十二卷，把對數作了簡單的介紹，題南海穆尼閣著，北海薛鳳祚纂。書中云：「愚今授以新法，變乘除爲加減」。穆尼閣所說的新法，就是利用等比數列與等差數列之對應關係來引進對數，然後在第十二卷中編製成 1 至 10000 的六位常用對數表。穆氏又云：「原數當用十萬，其表久成，邇西來不戒，失之於途，今止一萬，……，原數一萬之外，取比例法」。他所說的比例法，其實就是現代數學中的線性內插法。例如，欲求 $\log_{10} 160232$，可由表中查得 $\log_{10} 1602 = 3.204662\cdots$，$\log_{10} 1603 = 3.204933\cdots$，則利用

$$\frac{\log_{10} 160300 - \log_{10} 160232}{\log_{10} 160300 - \log_{10} 160200} \doteqdot \frac{160300 - 160232}{160300 - 160200}$$

可求得 $\log_{10} 160232 \doteqdot 5.204748$。此外，在比例對數表中，還沒有使用對數的名稱，他們稱之爲比例數或假數。

穆尼閣把對數傳入中國，其目的是爲了便於天文方面的計算，所以，穆尼閣與薛鳳祚後來所編寫的各種書籍中都是利用對數來進行計算。

二、數理精蘊

有關對數方面的下一部著作應該是大數學家梅文鼎（1633～1721）在西元 1702 年（清聖祖康熙四十一年）所著的比例數解四卷。不過，在這段時間裡，對數在中國數學上的影響並不大，應用對數的人不很多。把對數作更詳盡介紹並含製表方法的中國數學著作是西元 1713 年（康熙五十二年）清聖祖敕編完成的數理精蘊第三十八卷，卷首開場白是：「對數比例，乃西士若往訥白爾（ John Napier ）所作，以借數與眞數對列成表，故名對數表」，可見當時把 $\log_{10} x$ 稱爲眞數 x 的借數或假數，而不稱對數。

在數理精蘊中，計算對數值的方法有四種：(1)用中比例（即比例中項）求假數法；(2)用遞次自乘求假數法；(3)用遞次開方求假數法；(4)用前所得九十九數求他假數法。我們略作介紹如下，以了解前人編製對數表的辛勞。

所謂用中比例求假數法，以現代數學符號表示，乃是：若 $c = \sqrt{ab}$，則

$$\log_{10} c = \frac{1}{2}(\log_{10} a + \log_{10} b)$$

在數理精蘊中舉 $\log_{10} 9$ 爲例，首先，令 $a_1 = 1$，$b_1 = 10$，則得其比例中項 $c_1 \doteqdot 3.1622777$，因此，得

$$\log_{10} 3.1622777 \doteqdot 0.5000000000$$

其次，令 $a_2 = 3.1622777$，$b_2 = 10$，則得其比例中項 $c_2 \doteqdot 5.6234132$，因此，得

$$\log_{10} 5.6234132 \doteqdot 0.7500000000$$

再令 $a_3=5.6234132$，$b_3=10$，得其比例中項 $c_3 \doteqdot 7.4989421$，故得

$$\log_{10} 7.4989421 \doteqdot 0.8750000000$$

再令 $a_4=7.4989421$，$b_4=10$，得其比例中項 $c_4 \doteqdot 8.6596432$，故得

$$\log_{10} 8.6596432 \doteqdot 0.9375000000$$

再令 $a_5=8.6596432$，$b_5=10$，得其比例中項 $c_5 \doteqdot 9.3057204$，故得

$$\log_{10} 9.3057204 \doteqdot 0.9687500000$$

此時因 c_5 較 9 爲大，故 a_6 及 b_6 分別選爲：$a_6=8.6596432$ 及 $b_6=9.3057204$，則得其比例中項 $c_6 \doteqdot 8.9768713$，故得

$$\log_{10} 8.9768713 \doteqdot 0.9531250000$$

下面再選 $a_7=c_6$，$b_7=b_6$，仿此繼續算到 $a_{26}=8.9999998$，$b_{26}=9.0000004$，而 $\log_{10} 8.9999998 \doteqdot 0.9542424976$，$\log_{10} 9.0000004 \doteqdot 0.9542425274$，而 a_{26} 與 b_{26} 的比例中項 $c_{26} \doteqdot 9.0000000$，故

$$\log_{10} 9.0000000 \doteqdot 0.9542425125$$

事實上，$\log_{10} 9$ 的小數點後面前九位是 0.954242509……。換言之，如此計算了二十六次，才得出一個七位正確的值，而在其過程中又不斷地求乘積及開平方，可見其辛苦了。下表是該書中有關 $\log_{10} 9$ 之計算過程所列之表的一部分，我們附帶可看出當時尚未使用印度-阿拉伯數字：

	眞	假
第	一〇〇〇〇〇〇〇	〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
一	三一六二二七七七	〇五〇〇〇〇〇〇〇〇〇
次	一〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	三一六二二七七七	〇五〇〇〇〇〇〇〇〇〇
	五六二三四一三二	〇七五〇〇〇〇〇〇〇〇
次	一〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
三	五六二三四一三二	〇七五〇〇〇〇〇〇〇〇
	七四九八九四二一	〇八七五〇〇〇〇〇〇〇
次	一〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
四	七四九八九四二一	〇八七五〇〇〇〇〇〇〇
	八六五九六四三二	〇九三七五〇〇〇〇〇〇
次	一〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
五	八六五九六四三二	〇九三七五〇〇〇〇〇〇
	九三〇五七二〇四	〇九六八七五〇〇〇〇〇
次	一〇〇〇〇〇〇〇〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇〇
六	八六五九六四三二	〇九三七五〇〇〇〇〇〇
	八九七六八七一三	〇九五三一二五〇〇〇〇
次	九三〇五七二〇四	〇九六八七五〇〇〇〇〇
	⋮	
廿	八九九九九九九八	〇九五四二四二四九七六
六	九〇〇〇〇〇〇〇	〇九五四二四二五一二五
次	九〇〇〇〇〇〇四	〇九五四二四二五二七四

其次，所謂用遞次自乘求假數法，以現代數學符號表示，乃是：根據 $\log_{10} a^n = n \log_{10} a$，當我們要計算 $\log_{10} a$ 時，可選取一個相當大的正整數 n，則 $\log_{10} a = \frac{1}{n} \log_{10} a^n$，故可得

$$\log_{10} a \doteqdot \frac{1}{n} \times (\ a^n \text{ 的位數減去 } 1\ )$$

例如，該書中以 $\log_{10} 2$ 爲例，因爲 2^{16384} 共有4933位，而得

$$\log_{10} 2 \doteqdot \frac{4932}{16384} \doteqdot 0.3010$$

該書中更進一步寫出：$2^{137446953472}$ 共有41375655308位，而得

$$\log_{10} 2 \doteqdot \frac{41375655307}{137446953472} \doteqdot 0.30102999566$$

事實上，上面所得的商應該是0.30102999202…，依此，前面所得的近似值的小數點後面有八位正確，因爲 $\log_{10} 2 = 0.301029995\cdots$。但是，爲得出這樣一個近似值而計算 $2^{137446953472}$ 的位數，這是一件非常沉重的工作。

其次，所謂用遞次開方求假數法，以現代數學符號表示，乃是：根據 $\log_{10} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_{10} a$，當我們要計算 $\log_{10} a$ 時，可選取一個相當大的正整數 n，則 $\log_{10} a = n \log_{10} \sqrt[n]{a}$，但是，當 a 是一個正整數時，$\sqrt[n]{a}$ 往往是一個比 a 還複雜的數，那麼應如何先求得 $\log_{10} \sqrt[n]{a}$ 的值呢？數理精蘊中提出一種很有趣的近似值求法，書中舉 $a = 10$ 爲例，將10作了五十四次開平方，假設 a_n 表示10的 2^n 次方根，則

$$a_{53} \doteqdot 1.\overbrace{0\cdots\cdots 0}^{\text{十五個}}25563829864006470 = 1 + b_{53}$$

$$a_{54} \doteqdot 1.\overbrace{0\cdots\cdots 0}^{\text{十五個}}12781914932003235 = 1 + b_{54}$$

由前兩式可知，

$$b_{54} \doteqdot \frac{1}{2} b_{53}$$

於是，可得

$$\frac{a_{53} - 1}{a_{54} - 1} \doteqdot \frac{b_{53}}{b_{54}} = 2 = \frac{\log_{10}(a_{53})}{\log_{10}(a_{54})}$$

根據前面這個近似等式，數理精蘊中有這麼一個結論：當 a 與 b 滿足 $0 < a - 1 < 10^{-15}$，$0 < b - 1 < 10^{-15}$ 時，可以把 $\frac{a-1}{b-1}$ 作爲 $\frac{\log_{10} a}{\log_{10} b}$ 的近似值，因此，令 $a = a_{54}$，$b = 1 + 10^{-16}$，則得

$$\log_{10}(1+10^{-16}) \doteqdot \frac{10^{-16}}{b_{54}} \log_{10}(a_{54})$$

$$\doteqdot \frac{1}{1.2781914932003235} \times \frac{1}{2^{54}}$$

$$\doteqdot \frac{0.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十六個}}05551115123125782 70}{1.2781914932003235}$$

$$\doteqdot 0.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十六個}}04342944819032518 04$$

0.4342944819032518 04這個數，清朝大數學家李善蘭（1811～1882）把它稱爲中國對數表根。

使用上面的結果來計算 $\log_{10} 2$ 時，數理精蘊中先計算2的乘冪，直到求得最高位的值爲1而次高位爲0時才停止，顯然地，最小的值是 $2^{10}=1024$ 。書中把1.024連續地開平方，發現

$$(1.024)^{\frac{1}{2^{47}}} \doteqdot 1.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十五個}}0168516057053949 77$$

在前面的結果中，令 $a=(1.024)^{\frac{1}{2^{47}}}$ ， $b=1+10^{-16}$ ，則得

$$\log_{10}(1.024)^{\frac{1}{2^{47}}} \doteqdot 1.6851605705394977 \times 0.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十六個}}04342944819032518 04$$

$$\doteqdot 0.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十六個}}07318559369062392 68$$

因此，又得

$$\log_{10}(1.024) \doteqdot 2^{47} \times 0.\underbrace{0\cdots\cdots}_{\text{十六個}}07318559369062392 68$$

$$\doteqdot 0.0102999566398119 5265$$

$$\log_{10} 2 = \frac{1}{10} \times \log_{10} 1024 = \frac{1}{10}(3+\log_{10} 1.024)$$

$$\doteqdot 0.3010299956639811 95265$$

最後，所謂用所得九十九數求他假數法，乃是指先求出 $\log_{10} 1$ ，…， $\log_{10} 9$ ， $\log_{10} 11$ ，…， $\log_{10} 19$ ， $\log_{10} 101$ ，…， $\log_{10} 109$ ， $\log_{10} 1001$ ，…， $\log_{10} 1009$ ，……， $\log_{10} 10000000001$ ，…， $\log_{10} 10000000009$ 等九十九個對數值，則其他數之對數的近似值可由這九十九個值變化、運算而得。例如，

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 20703 &= \log_{10}(20000 \times 1.005 \times 1.03) \\
&= (4 + \log_{10} 2) + (\log_{10} 1005 - 3) + (\log_{10} 103 - 2) \\
&= \log_{10} 2 + \log_{10} 1005 + \log_{10} 103 - 1 \\
&\doteqdot 0.30102999566 + 3.00216606176 + 2.01283722471 - 1 \\
&= 4.31603328213
\end{aligned}
$$

然而並不是每個數都可以作這樣的分解，於是，數理精蘊中提出一個求近似值的方法，以 $\log_{10} 5689$ 爲例，因爲 $\log_{10} 5600$ 可由 $\log_{10} 7$ 及 $\log_{10} 8$ 求得，故以 5600 除 5689，得

$$5689 = 5600 \times 1.01 + 33 = 5656 + 33$$

再以 5656 除 5689，得

$$5689 = 5656 \times 1.005 + 4.72 = 5684.28 + 4.72$$

仿此，繼續行之，得

$$5689 = 5684.28 \times 1.0008 + 0.172576 = 5688.827424 + 0.172576$$

書中求到第八個商，而得

$$
\begin{aligned}
5689 = {} & 5600 \times 1.01 \times 1.005 \times 1.0008 \times 1.00003 \times 1.0000003 \\
& \times 1.00000003 \times 1.000000005 \times 1.0000000008 + (\text{一個很微小的數})
\end{aligned}
$$

因此，可得

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 5689 \doteqdot {} & \log_{10} 5600 + \log_{10} 1.01 + \log_{10} 1.005 + \log_{10} 1.0008 \\
& + \log_{10} 1.00003 + \log_{10} 1.0000003 + \log_{10} 1.00000003 \\
& + \log_{10} 1.000000005 + \log_{10} 1.0000000008 \\
\doteqdot {} & 3.75503593371
\end{aligned}
$$

數理精蘊第三十八卷之末，乃是求八線對數，也就是討論三角函數（連同正矢、餘矢共八個，清朝數學家稱之爲八線）的對數。

三、戴　煦

前文已經提過，James Gregory 及 Nicolas Mercator 兩個人分別都在西元 1668 年就發現了使用無窮級數來計算對數值的方法，雖然時間上都還在數理精蘊編纂之前，可是這種較簡便的方法並沒有傳入中國，反倒是中國人自己發現的，發現級數求對數值之方法的中國數學家是戴煦（1805～1860）及李善蘭（1811～1882）。他們的方法不是受到西方的影響，而是他們自己獨立思考、深入鑽研所得的成果。

戴煦的著作中論及對數的有對數簡法二卷（西元1845年，清宣宗道光二十五年）、續對數簡法一卷（西元1846年，道光二十六年）、及假數測圓二卷（西元1852年，清文宗咸豐二年）。

在對數簡法中，戴煦提出了一種“有開方表徑求諸對數”的方法，他先列出將10連續作二十一次開平方所得的各平方根，亦即前文中所述的 a_1，a_2，…，a_{21}。當我們要計算 $\log_{10} b$ 時（假設 $1<b<10$），只要找出 i_1，i_2，…，i_k，使得

$$a_{i_1} < b < a_{i_1-1}$$

$$a_{i_2} < \frac{b}{a_{i_1}} < a_{i_2-1}$$

$$a_{i_3} < \frac{b}{a_{i_1}a_{i_2}} < a_{i_3-1}$$

$$\vdots$$

$$a_{i_k} < \frac{b}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_{k-1}}} < a_{i_k-1}$$

$$1 < \frac{b}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}} < a_{21}$$

令 $c=\frac{b}{a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}}$，則得 $b=a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k}c$，故

$$\log_{10} b = \sum_{j=1}^{k} \log_{10}(a_{i_j}) + \log_{10} c$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{i_j}} + \log_{10} c$$

$$\doteqdot \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{2^{i_j}} + \frac{1}{2^{21}} \cdot \frac{c-1}{a_{21}-1}$$

例如，他以 $b=2$ 爲例，所需的 i_j 依次爲2，5，6，8，12，18，21，而 $c \doteqdot 1.000000721870$，於是，得

$$\log_{10} 2 \doteqdot \frac{1}{2097152}\left(524288+65536+32768+8192+512+8+1+\frac{721870}{10979587}\right)$$

$$\doteqdot 0.301029995663$$

其中，$2^{21}=2097152$，$a_{21} \doteqdot 0.0000010979587$。

其次，對於數理精蘊中所謂「用所得九十九數求他假數法」，戴煦認爲只用七十二數就可以了，亦即，只用該九十九數中不超過八位的七十二個數；而對於一般的數，其對數值的求法也加以系統化，以 $\log_{10} 5689$ 爲例，戴煦的做法如下：

(1)　5689表成 $10^3 \times 5.689$；

(2) 因爲 $5<5.689<6$，故把 5.689 表成 $5\times\frac{5.689}{5}$；

(3) 因爲 $1.1<\frac{5.689}{5}<1.2$，故把 $\frac{5.689}{5}$ 表成 $1.1\times\frac{5.689}{5\times1.1}$；

(4) 因爲 $1.03<\frac{5.689}{5\times1.1}<1.04$，故把 $\frac{5.689}{5\times1.1}$ 表成 $1.03\times\frac{5.689}{5\times1.1\times1.03}$；

(5) 因爲 $1.004<\frac{5.689}{5\times1.1\times1.03}<1.005$，故把 $\frac{5.689}{5\times1.1\times1.03}$

表成 $1.004\times\frac{5.689}{5\times1.1\times1.03\times1.004}$；

(6) 如此，繼續下去，最後，可得出

$$5689=10^3\times5\times1.1\times1.03\times1.004\times1.0002\times1.00003\times1.000005\times1.0000005\times c$$

其中的 c 滿足 $0<c-1<10^{-7}$，像這樣的 c，戴煦把 $\log_{10}c$ 利用 $\frac{c-1}{10^{-7}}\times\log_{10}(1+10^{-7})$ 來作爲近似值；在此例中，$c\doteqdot1.0000000904790$，故得

$$\begin{aligned}\log_{10}c&\doteqdot0.904790\times0.000000043429\\&\doteqdot0.000000039294\end{aligned}$$

因此，他所得出的 $\log_{10}5689$ 爲

$$\begin{aligned}\log_{10}5689=&3+\log_{10}5+\log_{10}1.1+\log_{10}1.03+\log_{10}1.004+\log_{10}1.0002\\&+\log_{10}1.00003+\log_{10}1.000005+\log_{10}1.0000005+\log_{10}c\\\doteqdot&3.755035933768\end{aligned}$$

此近似值的小數點後面九位都正確。

仿照前面的技巧，戴煦提出了如何由 $\log_{10}n$ 求 $\log_{10}(n+1)$ 的方法，以 $n=36$ 爲例，因爲

$$\frac{37}{36}=1.02\times1.007\times1.0006\times1.00002\times1.0000009\times c$$

其中，$c\doteqdot1.0000000132839$，於是，他得出 $\log_{10}37\doteqdot1.568201724068$。

前面的方法乃是利用 $\log_{10}36$ 及 $\log_{10}(\frac{37}{36})$ 來計算 $\log_{10}37$，而 $\log_{10}(\frac{37}{36})$ 乃是屬於 $\log_{10}(1+\frac{1}{n})$ 之形式；不過，前面的方法並沒有利用 $\log_{10}(1+\frac{1}{n})$ 之級數展開式，這個展開式，戴煦在西元 1846 年的續對數簡法中就有了說明。因爲根據他所發現的二項式定理，

$$(1+y)^{\frac{1}{n}}=1+\frac{1}{n}y+\frac{1}{2!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)y^2+\frac{1}{3!}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)y^3+\cdots$$

他說，當 n 值很大時，$\frac{1}{n}$差不多是0，所以，可得

$$(1+y)^{\frac{1}{n}}\doteqdot 1+\frac{1}{n}\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots+\frac{(-1)^{r-1}}{r}y^r+\cdots\right)$$

如果 y 值很小，例如，$0<y<10^{-7}$，則利用 $\log_{10}a\doteqdot\frac{a-1}{b-1}\log_{10}b$，得

$$\begin{aligned}\log_{10}(1+y)&=n\log_{10}(1+y)^{\frac{1}{n}}\\&\doteqdot n\cdot\frac{10^7}{n}\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots\cdots\right)\log_{10}(1+10^{-7})\\&=10^7\log_{10}(1+10^{-7})\cdot\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots\cdots\right)\\&\doteqdot 0.4342944819032518\left(y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\cdots\cdots\right)\end{aligned}$$

上式最右端那個常數，其正確值應該是 $\log_{10}e$，而數理精蘊中乃是把此數表示成 $10^{16}\log_{10}(1+10^{-16})$，或 $\log_{10}(1+10^{-16})^{10^{16}}$，由於 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，所以，$(1+10^{-16})^{10^{16}}$ 自然是 e 的一個良好近似值。

前面那個等式，其實就是Mercator級數在常用對數中之形式。戴煦在他西元1852 年的著作假數測圓中，進一步地把上述級數推廣到 y 爲負數的情形，例如，他用以求 $\log_{10}0.98$ 如下：

$$\begin{aligned}\log_{10}0.98&=(\log_{10}e)\times\left(-0.02-\frac{(0.02)^2}{2}-\frac{(0.02)^3}{3}-\frac{(0.02)^4}{4}-\cdots\cdots\right)\\&\doteqdot -0.00877392431\end{aligned}$$

上述的近似值只需要計算到 $-\frac{(0.02)^6}{6}$ 即可得出。

四、李善蘭

清朝大數學家李善蘭（1811～1882）在西元1846年（清宣宗道光二十六年）之前就著有方圓闡幽、弧矢啓祕、對數探源等書。在方圓闡幽中，他自創一種「尖錐術」，證明了現代微積分學中的

$$\int_0^h ax^n\,dx=\frac{ah^{n+1}}{n+1}$$

關於此處所謂李善蘭「自創」的說法，我們需要加以說明。英國數學家Alexander Wylie（1815～1887）在西元1847年初來到中國，才帶來美國數學家Elias Loomis（1811～1899）所著的

Analytical Geometry and Calculus，這是解析幾何與微積分輸入中國的第一部有中文譯本的著作，其中文譯本代微積拾級就是李善蘭在西元 1859 年（清文宗咸豐九年）經由Wylie 口譯之下所完成的。

李善蘭並沒有對他的結果加以解說，只是說：「…，而以高乘底爲實，本乘方加 1 爲法除之，得尖錐積」。原來他所謂的「（$n-1$）乘尖錐體」，可以看成是一個「高度爲 t 的橫截長度爲 at^n」的區域，當此（$n-1$）乘尖錐體的高爲 h 時，其體積爲 $\dfrac{ah^{n+1}}{n+1}=\dfrac{h\times(ah^n)}{n+1}=\dfrac{高\times底}{n+1}$。

在對數探源中，李善蘭說：「此尖錐合積，無論截爲幾段，自最下第二段以上，其積皆同」。這段話的意思是說：若我們取高爲 h，底爲 b 的各個尖錐（$n=1$ 時稱爲長方；$n=2$ 時稱爲平尖錐；$n=3$ 時稱爲立尖錐；$n=4$ 時稱爲三乘尖錐；以下類推），將這些尖錐壓在一起如下圖 4 之形狀，然後將其依高分成 n 等分截開，則除了最下一段外，其餘各段的體積爲定數（即與 n 無關）。事實上，李善蘭還指出：從下面數起第 r 段的體積爲 $bh\Big(\log_e r-\log_e(r-1)\Big)$，$r>1$。

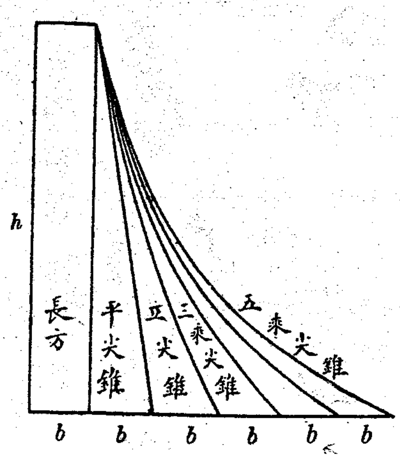

圖 4

李善蘭的結果，利用現代的數學知識可驗證如下：將圖 4 之圖逆時針旋轉 90° 度，使圖中長方的上、左兩邊分別置於 y 軸及 x 軸之上，則此「尖錐合體」的上邊界之方程式爲

$$y=b+\frac{b}{h}x+\frac{b}{h^2}x^2+\cdots+\frac{b}{h^{m-1}}x^{m-1}+\cdots\cdots$$

$$=\frac{bh}{h-x}$$

因爲從右邊數起的第 r 段乃是介於 $\dfrac{(n-r)h}{n}$ 與 $\dfrac{(n-r+1)h}{n}$ 之間，故得

$$\int_{\frac{(n-r)h}{n}}^{\frac{(n-r+1)h}{n}}\frac{bh}{h-x}\,dx=-bh\Big(\log_e(\frac{(r-1)h}{n})-\log_e(\frac{rh}{n})\Big)=bh\Big(\log_e r-\log_e(r-1)\Big)$$

當 $b=h=1$，則從第2段至第 n 段的體積之和為 $\log_e n$。

另一方面，若將展開式

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{m-1}+\cdots$$

的兩端逐項在〔$0,\frac{1}{r}$〕上積分，得

$$\log_e\left(\frac{r}{r-1}\right)=\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{r}\right)^3+\cdots\cdots$$

上面這個公式，乃是李善蘭所得的 $\log_e\left(\frac{r}{r-1}\right)$ 公式，不過，他最多只考慮到十九乘尖錐的合體，亦即，他最多只考慮到二十項的和。例如，求 $\log_{10}2$ 時，他用了二十項；求 $\log_{10}3$ 時，他只用十四項；求 $\log_{10}7$ 時，他只用八項；如此就得出了七位正確的對數值。

除了前面所提出來的三部著作之外，李善蘭另有一部稱為級數回求的著作，其中他已經提出

$$\log_e x=\frac{x-1}{x}+\frac{(x-1)^2}{2x^2}+\frac{(x-1)^3}{3x^3}+\frac{(x-1)^4}{4x^4}+\cdots\cdots$$

這樣的展開式（$x>1$），並由此得出：若 $y=\log_e x$，則

$$x=1+y+\frac{y^2}{2!}+\frac{y^3}{3!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots\cdots$$

此式實係 e^x 的展開式。

李善蘭以後，對數方面的中文著作及譯本漸多，因為有關對數值的計算方法大抵在李善蘭之時已經完備，其能更進一步地發展當在意料之中，本文不再贅述。

參考資料

1. 李子嚴：中算史論叢(一)，台灣商務印書館發行。
2. 李儼：中國古代數學簡史，九章出版社。
3. Bell, E. T., The development of mathematics, McGraw Hill, 1945.
4. Boyer, C. B., A history of mathematics, 1968.
5. Cajori, F., History of the exponential and logarithmic concepts, American Mathematical Monthly, 20 (1913), 5-14, 35-47, 75-84, 107-117, 148-151, 173-182, 205-210.
6. Eves, H., An introduction to the history of mathematics, Rinehart and company, Inc., 1953.
7. Kline, M., Mathematical thought from ancient to modern times, Oxford University Press, 1972.
8. Smith, D. E., History of mathematics, vols. 1 and 2, Dover Publication, Inc., 1953.