初等幾何趣談——圓周角與三角形

賴漢卿
國立清華大學數學系

回想二、三十年前，在中學（初三、高一）的數學教程中，平面幾何的分量佔有很大的部分。但隨時間的前移，一個中學生要學的或說中等學校要教的東西也愈來愈多，因之平面幾何也就逐漸地被淘汰，而今的國中尚留有一部分的平面幾何，高中則已甚少，尤其在大學聯招時，因命題要迎合電腦，幾何的證明題更不可能在入學考試中出現，所以在學校的教學過程中，也就不大去注意了。其實幾何，尤其是平面幾何，在訓練青年學生的思考、推理的方法與能力，是具有相當大的威力與效果，故平面幾何的教學，尤其是涉及基本觀念時，宜盡可能的詳細，學生也能多做些這方面的題目較好。本人深覺目前學生對於空間的觀念較缺乏，當然與教育課程的內容也有很大的關係。

平面幾何或初等幾何（含立體幾何）中所含要點大概不外乎：

點、直線、平面的關係，特別是平行與垂直，全等形與相似形，平行線與線段之比，三平方定理，圓與球，計量（面積、體積、表面積）等。

我們在下面隨意舉幾個初等幾何的例子來探索其中引人入勝之處，讓我們共賞之，也希望能做爲教到平面幾何的老師，在教學時的精神上之鼓勵與觀念上之參考。

§1 關於圓周角定理

所謂圓周角定理即：

「定弧之圓周角是其所對中心角的一半。」

這是個有趣而且有種種應用的定理。在平面幾何來說圓周角定理雖美如花，但沒有發展性可言，蓋因移到空間來說，在圓周角爲直角以外之情形並不會有什麼興趣。更進一層的，到 n 維或無限維空間（譬如一般的向量空間）我們會看到在初等幾何中所學之許多性質都具有其發展功能，然而圓周角定理却如同名勝古跡。雖然如此大部分平面幾何的漂亮定理都與圓周角定理有密切的關聯。就拿運動學的話來說，我們可看到下面種種有趣的性質。

在平面 α 上有相交之兩直線 OX，OY，今以定線段 AB 的兩端置於此兩線上運動時，我們考慮與平面 α 重疊的另一平面 β，如果 AB 固定於 β 上，則 A、B 在 OX，OY 上移動時，想來探討平面 β 上各點的運動軌跡。

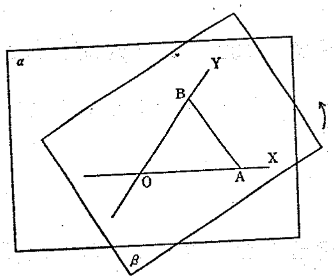

圖 1

如果∠XOY＝90°，則直線 AB 上的任一點 P 可描出一橢圓來，特別是 P 取 AB 之中點時則描畫出一圓來。這種事實在高中數學教程中大概

見過才是。

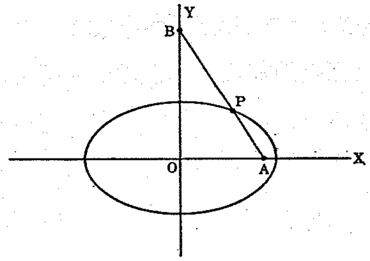

圖 2

其實$\angle XOY$不是$90°$，即OX與OY 不是直交，也可以有上述的結果。於此 AB 動的時候，△OAB 可知有什麼性質嗎？

因為邊長AB與$\angle BOA$屬於一定量，故△OAB之外接圓應該是一定的大小。如果此外接圓的中心為C，則

$$\angle ACB = 2\angle AOB = \text{一定}$$

若外接圓之半徑為R，$\angle AOB=\gamma$，$AB=a$，則正弦定律保證

$$\frac{a}{\sin\gamma} = 2R$$

是大家所熟悉的結果。因為a、γ一定，所以R也一定。$OC=R$為一定值，故C描繪出一個以O為圓心，R為半徑的圓。所以，當 AB 移動時，C就以O為中心描畫出一圓周來。

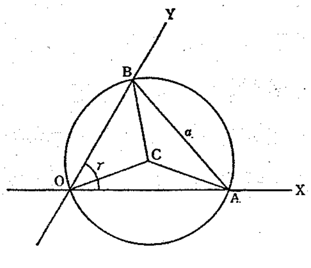

圖 3

將這個情形換個方式來說：

在△OAB的外接圓之直徑的一端為O另一端為T時，則T隨 AB 之移動而變化。我們來觀察T所描畫的圖形：

△OAB的外接圓令為K，其半徑設為γ，則

$$OT = 2\gamma$$

所以T的軌跡是以O為中心，半徑為2γ的圓周。因此令此圓為K_0時，則AB之兩端在相交兩直線OX、OY上動時，圓K與定圓K_0相內切而動。於此若半直線OX與圓K_0之交點為A_0，則此點A_0是當$AB\perp OY$時之A的位置。

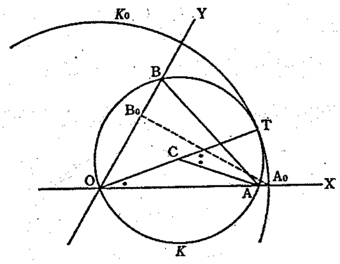

圖 4

今以弧度法來測量，設

$$\angle A_0OT = \theta\text{，}$$

則在圓K_0上之 $\overset{\frown}{A_0T} = 2\gamma\theta$。

又由圓K之中心角與圓周角之關係，可知

$$\angle ACT = 2\angle A_0OT = 2\theta\text{。}$$

因而 $\overset{\frown}{AT} = \gamma\cdot 2\theta = 2\gamma\theta$

故 $\overset{\frown}{A_0T} = \overset{\frown}{AT}$

這種性質明示著K與K_0內切而轉動時，所接觸過的部分具有相等之弧長。這意味著兩圓K與K_0相內切作不會有滑動的轉動情形。

將上述所見綜合如下：

「$\angle XOY$之兩邊上置以定線段 AB 之兩端A、B，若 AB 之兩端在此定角之兩邊上移動，則△AOB之外接圓K之半徑γ屬一定，而K內切於以O為中心，半徑2γ之圓K_0作不滑動之轉動運動。」

從這個事實，運動之真正意義可更增一層的瞭解。

此時K所在的平面（即β平面），是一個運動的平面β，在此平面上之點的運動如下：

(1) 圓周K上之點描畫出K_0的直徑來。

(2) 圓周K上以外的點，則描畫出橢圓來。

現在我們來想一想這兩種事實之推理過程：

先就(1)來看，設P爲圓周K上之一點，若P移動（由AB之運動而變化）到圓周K_0上來時，此時的位置設爲P_0，則當兩圓相切之切點爲T時，從上述事實知

$$\widehat{P_0T} = \widehat{PT}$$

反過來想，可知P是在直徑OP_0的線上（參照圖4，特別情形點P爲A時，A變動的都在OX線上，此時的直徑爲OX上的K_0的直徑）。

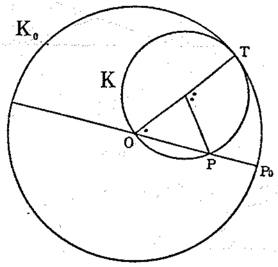

圖5

其次爲(2)的理由，可先設β平面上之任意一點爲R，通過R的K圓之直徑設爲PQ，則原線段AB在限制的直線OX，OY上移動時，P、Q則在互相垂直之兩直徑上動。（這在(1)的情形，因P、Q均分別在K_0圓的兩直徑上動，所以$\angle POQ = 90°$）於是R就變成PQ上之一定點，因此PQ移動時R的點就描畫出一橢圓來。

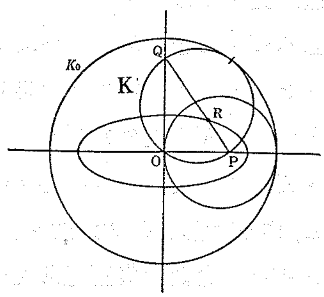

圖6

以上的敘述，是否可發展成一般情形來說呢？再回到原先∠XOY之邊上的動線段AB來考慮。

AB的另一位置設爲A′B′，線段AA′與BB′之垂直二等分線的交點設爲Z，則△ZAB與△ZA′B′同等，並且可用Z爲中心將A′B′旋轉使與AB重合。於此取A′接近於A，B′接近於B，則Z就接近於前面所示之點T。這個點T稱爲線段AB之運動的瞬間回轉中心，它在固定之平面α上描畫出圓周K_0來，但在AB所固定之平面β上，T的軌跡則爲圓周K。

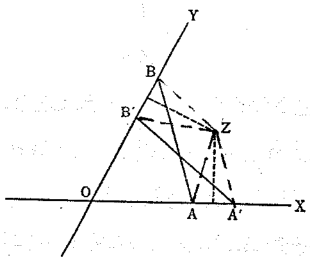

圖7

這種想法發展成爲一般單參數運動（one parametric motion）時，則與初等幾何的範圍離得太遠，也就是超出水準過深，所以我們不打算提到那麼深入的內容。但在初等幾何範圍內，與圓周角相關聯之運動的例子尚有下面著名的結果：

「當△ABC的邊AB與AC分別通過定點M與N動時，另一邊BC則恒與定圓相切。」

此時點A的軌跡就是通過M，N的圓周。又因過A作BC的平行線交此圓周於K，則

$$\angle MAK = \angle B = 一定$$

於是K爲一個定點。由K引BC的垂線KI與由A到BC邊的高AH相等，所以BC必與以K爲中心之定圓相切。

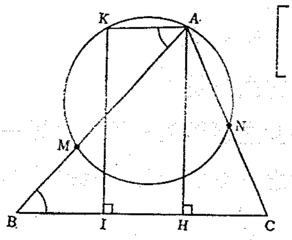

圖8

因BC的位置可以任意，這個運動則表示任何直線都與定圓相切。因此平面β在平面α上動時，在β上相交之兩直線分別與兩個定圓相切的運動也就屬於這種運動了。

這種運動與原先之運動形成一種相逆之運動。那麼動平面β之各點是種什麼樣的運動呢？

對這個問題我們取一任意點P在β上，則∠MAP屬一定，所以直線AP交通過A、M、N三點之定圓周上一點L，而因AP之長度一定，故由P所描出的線就是所謂的Riemainn線。

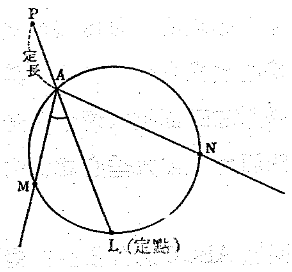

圖 9

§2 從三角形發展到四面體

在初等幾何中，除了圓周角定理之外尚有種種特徵。譬如類似於平面上所考慮的，發展到空間來考慮，則我們所要探討的有：

① 同樣成立的情形

② 無法同樣地考慮的情形

③ 可同樣地思考，但情況完全不一樣的情形。

首先觀察平面上有點、直線，而空間上有點、直線、平面；平面上的圓，在空間則爲球。不過在圓所能成立的性質，雖有種種情況可發展到球，但圓周角定理則不可能。在平方冪等定理來說，是由平面到空間依然成立之代表性特徵。由圓發展到空間的不只是球，圓柱也可算其一，但球還是其發展的本質。這一節我們要探討的是三角形在空間所能推展的是什麼？答案可說成三角柱，但四面體要算主要的推展。這個理由是三角形是由不在同一直線上之三點來決定，而四面體則由不在同一平面上之四點來決定。詳細的說是包含這些點的最小凸狀圖形。與在三角形之頂點、邊相當的換在四面體來說就是頂點、邊、面。顯然後者比前者要複雜得多。

一個三角形之三頂點的位置若以向量$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$表示的話，三角形內任意點的位置則可用向量

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}\ (p+q+r=1，p、q、r 爲正數)$$

來表示，這是已知的事實，而在空間四頂點的位置向量爲$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$、$\boldsymbol{d}$時，也可用位置向量

$$p\boldsymbol{a}+q\boldsymbol{b}+r\boldsymbol{c}+s\boldsymbol{d}\ (p+q+r+s=1，p、q、r、s 爲正數)$$

來表示想必都有學過。於此三角形的重心、外心、內心，換在四面體中也可同樣地說出來。這裡在四面體中的重心，外心及內心該如何從三角形推展出來呢？

首先大家所熟習的，三角形的重心是三條中線之交點，而四面體的重心爲

3組相對之邊（陵）中點連線的交點；或1組頂點與其相對之平面的重心相連線段在3：1之分點。

以位置向量來說該是

$$\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}}{4}$$

其他△ABC的重心若爲G，則知△GBC，△GCA，△GAB三個三角形面積相等。

與此對應的四面體ABCD的重心爲G，則G與四頂點之連線將原四面體分成四個相等體積的四面體：GBCD，GACD，GABD，GABC。

其次我們來看四面體的外心與內心：

四面體的外心就是通過四個頂點之球（外接球）的中心。這是6個邊之垂直平分面的交點，

此點也是通過各面之三角形外心（有四點）與各該面垂直之直線的交點。

四面體的內心是內切球的中心，也是各邊所共有二平面所成之角的2等分面（有6個）之交點。

在平面上△ABC的角A之二等分線交對邊BC於D，則我們都知道

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{CD} \qquad \text{(a)}$$

這個結果是將邊BA延長至E使 AE＝AC ，然後利用平行線與比例的關係可證明出來。

此比例也可用△ABD與△ACD之面積；一次考慮以BD，DC為底邊，再一次考慮以AB，AC 為底邊（都分別具有等高之三角形）乃得所要的比例式。參見下圖：

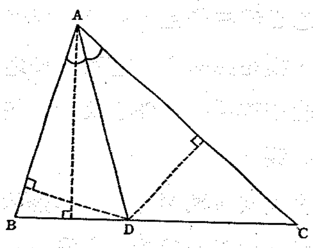

圖 10

這一種想法使用在四面體的體積時，便得如下的性質：

四面體ABCD之兩面ABC與ABD所夾之角的二等分面與CD交於E，則得

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABD}=\frac{CE}{DE} \qquad \text{(b)}$$

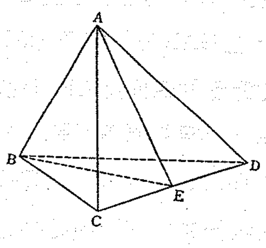

圖 11

事實上使用(a)的結果可如次說明：

三角形之三頂點的位置向量 a，b，c 所對邊的邊長為 a，b，c 時，則其內心的位置向量為

$$\frac{aa+bb+cc}{a+b+c}$$

同樣的適用於(b)則

四面體之四頂點的位置向量 a，b，c，d 所對面的面積分別設為 a，b，c，d時，內心的位置向量為

$$\frac{aa+bb+cc+dd}{a+b+c+d}$$

這些事實並不難證明，可慢慢地試試完成它。

對於傍心也與內心一樣可求其位置向量。但三角形的垂心在四面體的情形又是如何呢？

一般四面體並無與垂心相當的點，但有下面的性質：

從四面體 ABCD之各頂點作對面之下垂線能交於一點的充分必要條件為

$$AB\perp CD，AC\perp BD，AD\perp BC \qquad \text{(c)}$$

事實上(c)之三個條件中，有二條件成立，則剩下的一條件亦成立。這是向量內積的練習題。

像這種四面體，有稱直稜四面體也有稱垂心四面體，且有許多已知道的性質。

與垂心四面體同樣有趣的四面體為等面四面體，此四面體 ABCD即各面全等，其特徵可用

$$AB=CD，AC=BD，AD=BC$$

表明。

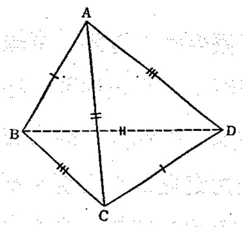

圖 12

要是將此四面體在表面AB、AC、AD 處切開展開成下面的圖形時，你可以看出各三角形必然是

銳角三角形。

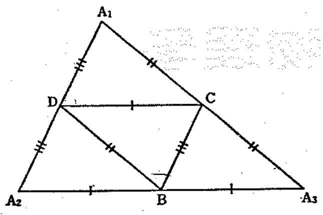

圖 13

等面四面體具有種種有趣的性質，例如

重心，外心與垂心

都一致（重合），恰與正三角形相當，可是並不一定是正四面體。下面一個命題是判定四面體爲等面四面體的條件。

若一四面體之重心、外心、內心中有兩個心一致，則爲等面四面體。

重心與外心的情形較容易，其他二種情形則較難。蓋在重心與內心之情形就與

「各面面積相等的四面體爲等面四面體」

的問題相同。

從三角形到四面體構成的條件也有種種有趣之情形。因不想佔太多時間，稍將問題的意思說一說。

首先設△ABC的三邊之長爲 a、b、c 時，來觀察其間的關係：

爲一般所知悉的，下面兩命題是等價的

(Ⅰ) $b+c>a$，$c+a>b$，$a+b>c$

(Ⅱ) $b+c>a>|b-c|$

也與

(Ⅲ) a，b，c 中最大之邊長小於餘下兩邊之和等價。依其目的而使用此三命題。譬如

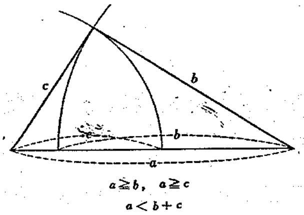

圖 14

a，b，c 爲正時，那些命題是使成爲三角形之三邊的條件。(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ) 之任一命題都易於看出爲成爲一三角形之充要條件，但在證明充分條件時 (Ⅲ) 是比較方便的一個。

將上述發展到四面體來說，(Ⅲ) 可用來證明：

以 4 個正數爲四個面的面積之四面體存在的充分必要條件是四數中之最大的一數小於其他 3 個正數之和。

這是三角形之邊→四面體之面的發展，但四面體的邊有六邊，是否能討論 6 個正數成爲四面體之六個邊的充要條件呢？這是較複雜的問題，就留待以後有機會再來研究了。