

教育部委辦國民中學數學及自然科學 課程改進計畫

各科試用教材簡介(二)

本中心

本中心接受教育部委辦國中、高中、技職學校數學及自然科學課程改進計畫，邀請國內各大學教授一百二十多位、中學教師四十多位，在教育部科學教育指導委員會主任委員吳大猷先生及各位指導委員、暨諮詢委員指導下，進行編寫各有關課程之教科書、教學指引、實驗手冊、實驗活動本等試用教材。

數年來，各分項計畫分別依原定時間編寫完成有關教材，並順利地在教育部及廳局指定之學校進行試教。茲以本中心編印之試用教材，將提供教育部做為將來修訂各有關學校科學課程之參考，而科學教育事關國家大計與萬千學子之修習發展，為求集思廣益，乃請各計畫編輯小組，就所編各科試用教材教科書中各擷取一章，藉本中心發行之科學教育月刊逐期分科簡介，提請教育界先進及同仁就其內容及編寫方式惠予指教，以做為修訂之參考。

本期刊登之內容，係國一數學中第二冊第一章後半部。

國一數學

1 二元一次聯立方程式

1-3 加減消去法

例4 用加減消去法解聯立方程式

$$\begin{cases} x + y = 15 & \dots\dots\dots (1) \\ (10y + x) - 9 = 10x + y & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解 用移項法則，可把(2)式簡化得

$$y - x = 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(1) + (3) \text{ 得 } 2y = 16, \text{ 也就是 } y = 8$$

$$(1) - (3) \text{ 得 } 2x = 14, \text{ 也就是 } x = 7$$

答： $x = 7$, $y = 8$

練習 用加減消去法解下列各聯立方程式：

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x + 2y = 13 \\ 5x = 2y + 11 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 2x = -9y + 24 \\ -9y + 4x = -6 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} x + y = 1215 \\ 4(y + 35) = x - 35 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ 3x = 4y - 2 \end{cases}$$

習題 1 - 3

1. 用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} 4x - 3y = 14 \\ 5x = -3y + 31 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} 5x + 8y = 81 \\ 4y = 5x - 7 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} 3y = -2x + 7 \\ 4x + 3y = 1 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} 2x - 5y = x + 2(y + 2) \\ 5x + 2(y + 1) = 4x + 9(y + 2) \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{2}{3}y = -1 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x = 7y + 4 \\ 3x = 11(2y + 3) - 29 \end{cases}$$

$$* (10) \begin{cases} \frac{2}{5}x + \frac{y}{4} = \frac{1}{5} \\ 0.2(x + y) - 0.15y = 0.2(1 - x - y) \end{cases}$$

2. 用加減消去法解下列聯立方程式，並加以驗算：

$$(1) \begin{cases} \frac{x-1}{6} + y = 6 \\ \frac{y-1}{4} + x = 8 \end{cases}$$

$$* (2) \begin{cases} \frac{2}{5}(x-3) + y = 2 \\ 4x - \frac{1}{3}(y+10) = 8 \end{cases}$$

3. 已知大小兩數的和為 33，其差為 11。若用 x 表大數， y 表小數。

(1) 列出二元一次聯立方程式表示大、小兩數的關係。

(2) 問大小兩數各多少？

1 - 4 應用問題

從以上各節的討論，我們知道適當地使用兩個文字符號，可把許多日常生活中有關數量的問題列

成二元一次聯立方程式，再利用代入消去法或加減消去法解此聯立方程式，就可解決這類問題；因此，二元一次聯立方程式對於許多日常生活問題的解決是相當有幫助的。讓我們多看一些例子。

例 1 已知某二位數，其十位數字的 3 倍與其個位數字的和是 21，它的個位與十位數字對調後的新數比原數大 9，問原數是多少？

解 設原數的十位數字為 x ，個位數字為 y 。

因十位數字的 3 倍與其個位數字的和為 21，所以

$$3x + y = 21$$

而原數為 $10x + y$ ，原數的十位數字與個位數字對調後的新數為 $10y + x$ ，故

$$10y + x = (10x + y) + 9$$

也就是原數的十位數字 x 與個位數字 y ，為下列聯立方程式的解：

$$\begin{cases} 3x + y = 21 & \dots\dots\dots (1) \\ 10y + x = (10x + y) + 9 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + y = 21 & \dots\dots\dots (1) \\ 10y + x = (10x + y) + 9 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\text{由(2)簡化得} \quad y - x = 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

解(1)、(3)得 $x = 5$ ， $y = 6$ ；故原數是 $5 \cdot 10 + 6 = 56$

答：原數是 56

練習 ①某二位數的數字和是 15，它的個位與十位數字對調後的新數比原數小 27；若用 x 表示原數的個位數字， y 表示它的十位數字，則 $x + y =$ _____，原數可寫成 _____，新數可寫成 _____；由原數與新數相差 27 的關係可列式得 _____。因此原數是 _____。

②已知某二位數的數字和是 10。若將這個數的個位與十位數字對調位置，則所得的新數比原數大 18。問原數是多少？

例 2 某食品商混合售價為每罐 15 元，20 元的兩種罐頭，以每盒 275 元出售。每盒中已知售價 20 元的罐數為 15 元的 2 倍。問每盒中 15 元、20 元的罐頭各多少？

解 設每盒中 15 元的罐頭有 x 罐，20 元的有 y 罐。因 20 元的罐數為 15 元的 2 倍，所以 $y = 2x$ 而每盒售價應為 $15x + 20y$ ，故 $15x + 20y = 275$ ，也就是 x 與 y 為下列聯立方程式的解：

$$\begin{cases} y = 2x \\ 15x + 20y = 275 \end{cases}$$

解此聯立方程式，得到 $x = 5$ ， $y = 10$

答：每盒中 20 元的有 10 罐，15 元的有 5 罐。

練習 某卡片商混合兩種每張售價各為 6 元，8 元的聖誕卡，以每盒 102 元出售。已知每盒中售價 6 元的卡片數的 2 倍等於 8 元的 3 倍。問每盒中 6 元、8 元的卡片應各裝幾張？

例 3 某汽車代銷商代售甲、乙兩型汽車。每售出一輛甲型汽車可賺 1600 元，乙型可賺 2000 元；已

知今年二月售出的甲型汽車的輛數是乙型的 $2\frac{1}{2}$ 倍，共賺 60000 元。問今年二月各售出甲、乙兩型汽車多少輛？

解 設甲型汽車售出的 x 輛，乙型汽車售出 y 輛。售出 x 輛甲型汽車， y 輛乙型汽車共賺

$$1600x + 2000y$$

依題意可列出下面的二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} x = 2\frac{1}{2}y \\ 1600x + 2000y = 60000 \end{cases}$$

解此聯立方程式，得到 $x = 25$ ， $y = 10$

答：售出甲型汽車 25 輛，乙型汽車 10 輛。

練習 某農場出售雞、鴨若干隻。已知每隻雞平均可賺 8 元，鴨可賺 10 元，鴨數是雞數的 $\frac{3}{4}$ ，共賺 12400 元；問雞、鴨各出售多少隻？

例 4 某實驗室有含量 40% 及 60% 的酒精溶液兩種。一位實驗室技術員需要含量 48% 的酒精溶液 1000 毫升；問各取 40% 及 60% 的酒精溶液多少毫升才能混合出所需的酒精溶液？

解 設取 40% 的酒精溶液為 x 毫升，60% 的酒精溶液為 y 毫升，這兩種酒精溶液混合後為含量 48% 的酒精溶液 1000 毫升，所以

$$x + y = 1000$$

又因 40% 的酒精 + 60% 的酒精 = 混合後的 48% 酒精，故

$$\frac{40}{100}x + \frac{60}{100}y = \frac{48}{100} \cdot 1000$$

因此， x 與 y 為下列聯立方程式的解：

$$\begin{cases} x + y = 1000 \\ \frac{40}{100}x + \frac{60}{100}y = \frac{48}{100} \cdot 1000 \end{cases}$$

解此聯立方程式，得到 $x = 600$ ， $y = 400$

答：須取 40% 的酒精溶液 600 毫升，60% 的 400 毫升。



圖 1-3

練習 有兩種合金各含 20% 及 50% 的銅；問需各取這兩種合金多少公克能混合成含量 45% 銅的合金 100 公克？

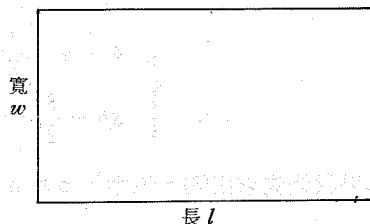


圖 1-4

例 5 有一長方形（如圖 1-4）長比寬多 5 公尺，其周

長是 38 公尺；求長與寬。

解 設長為 l 公尺，寬為 w 公尺，因長比寬多 5 公尺，所以

$$l = w + 5$$

又因周長是 38 公尺

$$\text{故} \quad 2l + 2w = 38$$

也就是 l 與 w 為下列聯立方程式的解：

$$\begin{cases} l = w + 5 \\ 2l + 2w = 38 \end{cases}$$

解此聯立方程式，得到 $w = 7$ ， $l = 12$

答：長 12 公尺，寬 7 公尺。

練習 長方形的周長為 36 公分，長比寬的 2 倍多 6 公分，求長與寬。

例 6 甲、乙兩人合作打掃一間教室，2 小時可完成；若甲先打掃 3 小時後，剩下的給乙獨做須再 $1\frac{1}{2}$ 小時才能完成。試問甲、乙兩人獨自打掃此間教室，各須要多少小時？

解 設甲獨做須 x 小時，乙獨做須 y 小時，則甲每小時完成 $\frac{1}{x}$ ，乙每小時完成 $\frac{1}{y}$ ，甲、乙合作每小時完成 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ，按題意可列式得：

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ 1 - \frac{3}{x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{3}{x} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{y} = 1 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

如果我們能求得同時使(1)、(2)兩式成立的 x 與 y 之值，那麼我們就知道甲、乙各自打掃教室所須的時間了！在上列的聯立方程式中，雖然從表面看來，不是二元一次聯立方程式，但若設 $p = \frac{1}{x}$ ， $q = \frac{1}{y}$ 分別代入原聯立方程式，就可得到文字 p ， q 的二元一次聯立方程式：

$$\begin{cases} p + q = \frac{1}{2} & \dots\dots\dots (3) \\ 3p + \frac{3}{2}q = 1 & \dots\dots\dots (4) \end{cases}$$

如果我們先求出(3)、(4)中， p 與 q 的數值，那麼我們就可以分別知道 x 與 y 的數值了！

解聯立方程式(3)、(4)得 $p = \frac{1}{6}$ ， $q = \frac{1}{3}$

故聯立方程式(1)、(2)中之解為 $x = 6$ ， $y = 3$ ，也就是甲獨做須 6 小時，乙獨做須 3 小時。

練習 ①有一工程，甲、乙合作須 48 小時；乙獨做 60 小時後剩下的工程再由甲獨做還須 40 小時；
試問甲、乙獨做各須時若干？

②解下列各聯立方程式：

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \\ \frac{4}{x} - \frac{6}{y} = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{6}{y} = 2 \\ \frac{10}{x} - \frac{6}{y} = 1 \end{cases}$$

有些問題，依題意列式，求解所得的數值，不一定符合原來的題意。因此原來的問題就沒有解；若想讓原來的問題合理有解，則須改變原問題的一些條件，下面就是這樣的例子：

例 7 某一二位數，其個位數字與十位數字的和為 6，若把原數的十位數字與個位數字互換位置後，所得的新數比原數多 17。試問原數是多少？

解 設原數的個位數字為 x ，十位數字為 y

則依題意可列式得

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ (10x + y) - (10y + x) = 17 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x + y = 6 & \dots\dots\dots (1) \\ 9(x - y) = 17 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解此聯立方程式得 $x = \frac{71}{18}$ ， $y = \frac{37}{18}$

但依題意 x, y 都是表示整數，故 $x = \frac{71}{18}$ ， $y = \frac{37}{18}$ 不合題意，本問題無解，也就是沒有如此的二位數！

如果例 7 中的問題中新數比原數多 18，其他的條件不變，則依上列的求解過程可得 $x = 4$ ， $y = 2$ ，也就是說原數為 24。

習題 1 - 4

1. 大、小兩數的和是 60，它們的差是 20，求大、小兩數。
2. 某二位數的個位數字是它的十位數字的 2 倍，此數比個位數字的 5 倍大 6。求此數。
3. 某二位數的數字和是 15，已知它的個位與十位數字對調後的新數比原數大 9。問原數是多少？

4. 某食品麵包商混合兩種售價各為 30 元、40 元的月餅裝盒出售。每盒共有 10 個月餅售價 340 元，問每盒應裝 30 元、40 元的月餅各多少個？
5. 某茶葉商混合兩種每磅售價各為 90 元、120 元的茶葉包成 5 磅裝出售，每包出售 510 元。問每包混合茶葉應裝 90 元、120 元的茶葉各多少磅？
6. 動物園的門票，規定成人 5 元，兒童 3 元，某日售出門票 1500 張，收入 5500 元。問該日參觀動物園的成人與兒童各多少人？
7. 珮玲在某次棒球賽中代售 70 張成人票，30 張學生票，共得款 2700 元，她的妹妹代售 30 張成人票，70 張學生票，共得款 2300 元；問每張成人票與學生票各多少元？
8. 一長方形的周長是 14 公分，寬的 2 倍等於長的 $\frac{1}{3}$ ；求長與寬。
9. 某分數，分母比分子大 3，分母的 2 倍等於分子的 5 倍，求此分數。
10. 某君有地一塊需施含磷 21% 的肥料 60 公斤。他家有含磷 10% 及 30% 的肥料兩種；問他需各取多少公斤能混合成他所需要的肥料？
11. 珮玲比她的妹妹大 3 歲，她們的年齡和是 27 歲。問她們的年齡各幾歲？
- **12. 有一工程，男工與女工各 1 人合做，15 日可成，男工 7 人，女工 9 人合做，2 日可成，問男工 1 人獨做，需幾日可成？女工 1 人獨做，需幾日可成？



第一章 總習題

1. 解 $\begin{cases} x = 2y \\ x + 3y = 10 \end{cases}$
2. 解 $\begin{cases} 5p + 7q = 1 \\ 4p - 2q = 16 \end{cases}$
3. 解 $\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x = 3y - 2 \end{cases}$
4. 解 $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y = 4 \\ 3x - 2y - 1 = 2x - 5(y - 1) \end{cases}$
5. 若 $\begin{cases} 5x + 3y = 14 \\ x + y = 2 \end{cases}$ 的解為 $x = a$ ， $y = b$ ；求 $2a + b$ 的值。

6. 解 $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{6} = \frac{2}{3} \\ \frac{2x}{5} + \frac{y}{4} = \frac{1}{5} \end{cases}$

7. 解 $\begin{cases} \frac{1}{3}x + 3y = 19 \\ \frac{1}{3}y + 3x = 11 \end{cases}$

8. 解 $\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{1}{y} = 4 \\ \frac{2}{y} + \frac{6}{x} = -1 \end{cases}$

9. 解 $\begin{cases} \frac{1}{2x} - \frac{2}{3y} = -1 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 7 \end{cases}$

*10. 解 $\begin{cases} 2x - \frac{3y}{x} = 3 \\ 3x + \frac{y}{x} = 10 \end{cases}$

*11. 解 $\begin{cases} 123x + 77y = 261 \\ 77x + 123y = -61 \end{cases}$

*12. 解 $\begin{cases} 35x - 27y = 43 \\ 27x - 35y = 19 \end{cases}$

- *13. 甲、乙兩人解方程組 $\begin{cases} ax - y = 3 \\ 3x + by = 15 \end{cases}$ ，其中甲將 a 寫錯，而求得解 $x = 1$ ， $y = 6$ ，而乙却將 b 寫錯而求得的解為 $x = 2$ ， $y = 1$ ，除外無其他錯誤，求正確方程式的解。

14. 甲、乙二生共有 150 元，甲將其所有的一半買文具用品，乙將其所有的 $\frac{2}{3}$ 買了玩具，二人共餘存 60 元，問甲、乙各原有多少元？

15. 某二位數的十位數字是它的個位數字的 3 倍，它的個位與十位數字對調後的新數比原數少 36，求原數。

- *16. 含量 60 % 的酒精溶液與 80 % 的酒精溶液各取多少公升能混合成含量 70 % 的酒精溶液 20 公升？

17. 上等茶葉每 100 公克的賣價是 150 元，中等茶葉每 100 公克的賣價是 100 元。今將兩種茶葉混合成 1 公斤，使每 100 公克的賣價是 120 元，問每種茶葉各需多少公克？（1 公斤 = 1000 公克）

- **18. 某農場畜牛若干頭。已知賣出去若干頭後，剩下牛數為賣去頭數的 $1\frac{1}{5}$ 倍；其後又賣去 15 頭，這個時候所剩下牛數為原數的一半。問這個農場最初畜牛多少頭？

- *19. 有一工程，甲、乙合作須 24 日完成，甲獨做 20 日後，由乙獨做還需 30 日才能完成。問甲、乙獨做各需幾天可成？