指數與對數發展史簡介(上)

趙文敏

國立臺灣師範大學數學系

近代數學中利用指數的概念來定義對數的概念，也就是說，所謂 $y=\log_a x$，其意義是 $x=a^y$；然而，在數學的發展史中，指數與對數這兩個概念却各有其淵源，因爲對數係十七世紀數學的三大發明之一（另外兩個是解析幾何與微積分），可是對數與指數間的互逆關係却是瑞士大數學家Leonhard Euler（1707～1783）所發現的。儘管兩者各有其淵源，我們仍然把兩者的發展史合併討論，因爲它們到底是關係非常密切的兩個概念。

甲、十七世紀以前的發展狀況

一、巴比倫

在巴比倫人所遺留下來的瓦片中，可以找到一些由某給定數之連續乘方所成的表，例如，曾經找到的有 9 及 16 及 1；40（此係 60 進位表示法，其值爲 100）及 3；45（亦即 225）的前十個乘方的表。另外，在巴比倫人的一本問題集中，曾發現有這樣的問題：給定兩個數，試問甲數的多少次乘方等於乙數？這個問題與現代數學中「求以甲數爲底時乙數的對數」意義相同。巴比倫人可能是利用前面的乘方表來解上述的問題，眞是如此的話，我們可以說巴比倫人已經開始使用“對數表”了，不過，他們的“對數表”並沒有選用固定的底數（如常用對數中的 10，自然對數中的 e），同時，他們的“對數表”中數的間隔太大，所以，還不能夠作爲一般的計算之用而只能用來解一些特殊的問題。

巴比倫人的乘方表中數的間隔已太大，而他們又再使用（線性）內插法。例如，有一個問題是：若年利率爲 20％，則要多少年才能使本利和變成本金的兩倍（以複利計算）？他們所給的答案是 3，47；13；20，即 $\frac{409}{108}$。由於 $(\frac{6}{5})^3=\frac{216}{125}$，$(\frac{6}{5})^4=\frac{1296}{625}$，可以看出 $\frac{409}{108}$ 是利用線性內插法求出來的，因爲

$$\left(4-\frac{409}{108}\right):\left(\frac{409}{108}-3\right)=\left(\frac{1296}{625}-2\right):\left(2-\frac{216}{125}\right)$$

事實上，$\frac{409}{108}$ 這個答案是相當好的近似值，因爲

$$\frac{409}{108}=3.787\overline{037}$$

$$\log_{1.2}2=3.80178401\cdots$$

二、希　臘

數學上指數記號的使用，可以說是爲了簡化很大的數及很小的數的表示法。Archimedes（紀元前三世紀）在他的一份稱爲 Psammites 的作品中，曾自誇說他可以寫出一個比塡滿整個宇宙所需的沙粒數還大的數，在沒有適當的指數記號的當時，Archimedes 確實是可以這麼神氣的。爲了要估計塡滿宇宙所需的沙粒是多少，他必須先計算地球、月亮、與太陽的大小，以及它們之間的距離，同時還須估計沙粒的大小，根據所得的結果，他表示塡滿宇宙所需的沙粒不超過 10^{63} 粒；爲了要表示這樣的大數，Archimedes 以 myriad-myriad 爲單位，由於 myriad 是"一萬"的意思，所以 myriad-myriad 乃表示現代數學中的 10^8。對 10^{63} 這個數，Archimedes 說它是一個第八階的數，他所謂的階，以現代數學術語表示，就是

a 是第 k 階的數，乃是表示 $(10^8)^{k-1}\leqslant a<(10^8)^k$

就在 Archimedes 引進"階"的觀念時，他得出了"第 k 階與第 l 階數的乘積必定至多是一個第 $k+l$ 階的數"的結論，這個結論已是下面這個指數定律的雛型，或者說已經運用了"對數可以化乘爲加"的特性：

$$a^x\cdot a^y=a^{x+y}$$

關於大數的表示法，希臘另一位大數學家 Apollonius（262 B.C. ～ 190 B.C.）分別使用 μ^α，μ^β，μ^γ 來表示 myriad 的一次方，二次方，三次方，其中的 α，β，γ，希臘人通常用來分別表示 1，2，3；至於 μ，則是 myriad 的希臘文寫法 $\mu\acute{\upsilon}\rho\iota o\iota$ 的第一個字母。Apollonius 這種寫法，已經是現代指數記號的形式了。

有「代數學之父」之稱的 Diophantus（西元三世紀）也使用過一種指數記號，他以 S 表示未知數，以 Δ^γ 表示它的平方；K^γ 表示它的立方；四次方稱爲平方－平方，以 $\Delta^\gamma\Delta$ 表示；五次方稱爲平方－立方，以 ΔK^γ 表示；六次方稱爲立方－立方，以 $K^\gamma K$ 表示。除此之外，Diophantus 對前六次乘方的倒數都給了特殊的名稱，同時對現代數學中的指數定律，Diophantus 自然也很熟悉。

三、中世紀

在對數發明之前，數學家們爲了使用"化乘爲加"來簡化計算過程，通常使用三角函數的"積化和差"公式配合三角函數表，在四個"積化和差"公式中，

$$2\cos x\cos y=\cos(x+y)+\cos(x-y)$$

這個公式早在西元十一世紀阿拉伯人 ibn-Yunus 就已發現了。

“化乘爲加”的做法，自然會引出“化乘方爲倍數”的結果；在西元1328年Thomas Bradwardine（1290？～1349）的一本介紹比例式的著作Tractatus de proportionibus中，曾涉及“化乘冪爲倍數”的問題。有關比例的理論，Euclid（紀元前三世紀）的曠世名著Elements第五卷中就已經作邏輯上很完整的介紹，而古代及中世紀的學者們也曾用來處理科學上的問題。例如，在等速直線運動中，當時間固定時，距離與速度成正比；當距離固定時，時間與速度成反比。希臘大哲學家Aristotle曾經提出過“當物體受力F在有阻力R的介質中運動時，其速度V與力F成正比，與阻力R成反比”這樣的結論。換言之，速度V可利用下式來計算：

$$V = K \cdot \frac{F}{R}$$

其中K是一個比例常數。可是，這個結論後世的學者却認爲與常識不合，因爲當阻力R大於或等於力F時，應該是不會產生任何速度才對，可是，根據Aristotle的結論，這種情形下的速度却不是零。爲了糾正這種謬誤，Bradwardine在他西元1328年的著作中提出了一種廣義的比例理論，在這種比例理論中，有所謂一階比例式、二階比例式、…、n階比例式，事實上，所謂A對B成n階比例式，乃是指A與B^n成正比。另一方面，所謂A對B成副n階比例式，乃是指A與$\sqrt[n]{B}$成正比。利用這種概念，Bradwardine把Aristotle的運動律作了另一種解釋。他說：若要使速度V加倍，只需要把比值F/R平方；若要使速度V變成三倍，只需要把比值F/R立方；若要使速度V變成n倍，只需要把比值F/R n次方，這種說法相當於$V = K \log \frac{F}{R}$這樣的關係式。不過，Bradwardine並沒有對他的說法提出任何實驗性的印證，而這樣的說法也似乎未被大多數人所接受。

Nicole Oresme（1323？～1382）是西元十四世紀另一位著名的數學家，他較Bradwardine爲晚，在其著作中可見到一些屬於Bradwardine之概念的推廣。例如，他把Bradwardine的比例理論推廣而定義了有理數乘冪（即分指數），同時給出了將比例式相乘的規則，這些規則實際上就是近代數學中的指數定律$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$以及$(x^m)^n = x^{mn}$，這些結果記載在他西元1360年左右所著的De proportionibus proportionum之中。而在另一部稱爲Algorismus proportionum之中，他把這些定律應用到一些幾何及物理上的問題。在後面這部著作中，Oresme曾引用了一種特殊的指數記號；例如，

$$\boxed{1p \cdot \frac{1}{2}}\ 4 \quad 或 \quad \boxed{\frac{p \cdot 1}{1 \cdot 2}}\ 4$$

乃是用來表示$4^{1\frac{1}{2}}$，他認爲既然$4^3 = 64$而且$\sqrt{64} = 8$，則應可得出$4^{1\frac{1}{2}} = 8$。除了引用新的指數記號之外，一種更富想像力的概念是Oresme認爲無理數乘冪也是可能的。他曾努力著想說明$x^{\sqrt{2}}$的意義，可惜當時缺少適當的術語以及記號，使他無法很成功地發展出無理數乘冪的概念。雖然如此，Oresme可以說是第一位接觸到高等超越函數的數學家。

四、文藝復興及其以後之時期

法國數學家Nicolas Chuquet（1445？～1500？）在他西元1484年所著的Triparty en la sciences des nombres中，對於根號與正整數乘冪的表示記號是這樣的：$\sqrt{14-\sqrt{80}}$記爲$R)^2\ 14.\overline{m}.R)^2\ 180$。$5x$，$6x^2$，$10x^3$，分別記爲$.5.^1$，$.6.^2$，$.10.^3$。很重要的一項成就是他引進了零指數以及負整指數的表示記號：$9x^0$與$9x^{-2}$分別記爲$.9.^0$與$.9.^{2.m.}$。這些記號顯示出Chuquet也熟知指數定律，或許他熟知Oresme的比例式理論。例如，他寫過“$.72.^1$除以$.8.^3$等於$.9.^{2.m.}$”，此即$72x\div 8x^3=9x^{-2}$之意。Chuquet曾以2爲底而列出2的零次至二十次乘冪，由其中指出兩乘冪相乘時只需將指數相加即可。像這樣的乘方表以及有關指數定律的解說，在西元十五、十六世紀中頗爲常見，這種現象無疑地對於對數的催生很具效用。

Michael Stifel（1487～1567）通常被認爲是十六世紀德國最偉大的代數學家，他與Chuquet相同地，已不再排斥負數（不過，他還不肯承認負數作爲方程式的根），因此，他考慮過負整指數，Chuquet所列出來的2^0，2^1，…，2^{20}之乘方表，他把它擴大而使它包含了$2^{-1}=\frac{1}{2}$，$2^{-2}=\frac{1}{4}$，$2^{-3}=\frac{1}{8}$，不過，他不是使用這種指數記號。在他西元1544年的著作Arithmetica Integra中，他也考慮過分指數，例如，$(\frac{27}{8})^{1:\frac{3}{4}}$表示$(\frac{27}{8})^{\frac{4}{3}}$，即$\frac{81}{16}$。

義大利數學家Rafael Bombelli（1526～1573）使用下面這種方法來表示乘冪，例如，x^2+5x-4他寫成$1\overset{2}{\smile}p\cdot 5\overset{1}{\smile}m\cdot 4$，在這種寫法中，除了沒有未知數記號之外，乘冪的表示法倒是與現代記號有些類似。

法國業餘數學家Francois Vieta（1540～1603）在代數（及三角）方面頗有貢獻，但他也沒有創出指數記號，例如，A的平方他不是寫成A^2，也不是AA，而是記爲“A quadratus”，A的三次方則記爲“A cubus”。

英國數學家Thomas Harriot（1560～1621）把乘冪寫成連乘積，例如，A的七次方記爲$AAAAAAA$。而另一位英國數學家William Oughtred（1574～1660）則把A的七次方記爲$Aqqc$，其意義是A平方、平方、立方（之乘積）。

瑞士數學家Jobst Bürgi（1552～1632）却是將羅馬數字寫在係數上面來表示乘冪，例如，x^4+3x^2-7x乃是寫成

$$\overset{\text{iv}}{1}+\overset{\text{ii}}{3}-\overset{\text{i}}{7}$$

荷蘭數學家Simon Stevin（1548～1620）則是將乘冪寫在圓圈內而放在係數上面，例如，x^4+3x^2-7x乃是寫成

$$\overset{4}{1}+\overset{2}{3}-\overset{1}{7}$$

Stevin更進一步地指出，他的指數記號也可以用於分數乘冪（雖然Oresme早就提出這種概念，可是所發生的影響並非甚大），他雖然沒有正式使用過分指數的記號，但他却說明在圓圈內寫1/2時乃

是指平方根，在圓圈內寫$\frac{3}{2}$時乃是指其立方的平方根。對於整指數的有關性質，Stevin 在他西元 1585 年的著作 L'Arithmetique 中作了有系統的討論。

稍後，另外一位荷蘭數學家 Albert Girard（1590～1633）也認爲這類分指數記號可用以代替方根的記號，如$\sqrt{\ }$與$\sqrt[3]{\ }$等。不過，Girard 的表示記號却有所改變，例如，他把 $5x^2$ 寫成爲 5(2)，把 $49^{\frac{3}{2}}$ 寫成（$\frac{3}{2}$）49，把 $\sqrt[6]{2000}$ 寫成（$\frac{1}{6}$）2000。在 Girard 的著作 Invention nouvelle en l'algèbre（西元 1629 年）問世的那段期間，符號化代數正在快速的發展；事實上，八年後 Descartes 的著作 La géométrie 就出版了。

約在 Girard 的同一時期，法國人 Pierre Hérigone 在西元 1634 年至 1637 年間所著的 Cursus mathematicus 中，使用 $a2$，$a3$，$a4$ 來表示 a^2，a^3，a^4，這種寫法可能受到 Girard 的影響。

現代數學中所使用的指數記號是法國數學家 René Descartes（1596～1650）在他西元 1637 年的著作 La géométrie 中最先使用的，僅有的差別是他把 x 的平方還寫成 xx，至於其他的指數記號則已是現代數學中的形式。一般而言，La géométrie 這部著作，可以說是現代的學生在學習時不會在使用記號方面發生困難的第一部書籍。

Descartes 的指數記號，到了英國數學家 John Wallis（1616～1703）手上，雖然 x^2 仍然寫成 xx（事實上，一直到了西元十八世紀末葉，xx 才普遍地被寫成 x^2），可是，Wallis 在他西元 1655 年所著的 Arithmetica infinitorum 中，對於負指數及分指數的重要性作了一番闡述；他證明 x^0 必須被指定等於 1，而且提出了下面這些關係式：

$$x^{-1}=\frac{1}{x} \qquad x^{-n}=\frac{1}{x^n}$$

$$x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x} \qquad x^{\frac{1}{q}}=\sqrt[q]{x}$$

$$x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2} \qquad x^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{x^p}$$

英國大數學家 Isaac Newton（1642～1727）自稱在代數方面受 Wallis 影響甚大，所以，在指數記號方面，他採用 Wallis 的寫法，例如，在他西元 1669 年所著的 De analysi per aequationes numero terminorum infinitas 中，就使用過 $x^{\frac{5}{3}}$ 及 x^{-3} 這種記號。事實上，Newton 能夠在無窮級數方法的幫助下，順利得出二項式定理，這種適當的指數記號之使用，應該也是一項主要因素。因爲正整指數的二項式定理早在西元十二世紀就已爲人所知，Jerome Cardan（1501～1576）與 Blaise Pascal（1623～1662）等人對二項式係數間的關係也都已了解，但因爲他們都未曾使用 Descartes 的指數記號，所以，都沒能很快地由正整指數的二項式定理推廣得分指數的二項式定理；Stevin 與 Girard 等人雖然也提出了分指數，不過，他們並沒有眞正地使用過分指數，因此，二項式定理才在 Descartes 與 Wallis 的指數記號廣泛使用之後被分析數學大師 Newton 所發現。

乙、對數的發明

一、Stifel 的構想

對數的基本概念可以說是Michael Stifel（1487～1567）最先引進的。在他1544年的著作Arithmetica Integra中，Stifel指出：等比數列

$$1, r, r^2, r^3, \cdots\cdots$$

的各項與等差數列

$$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$$

的各項間作成一個對應 $n \longmapsto r^n$；在這個對應之中，等比數列的項就是以 r 爲底而以其在等差數列中的對應項爲指數所得之乘冪；等比數列中兩項之乘積在等差數列中的對應項乃是該兩項在等差數列中對應值之和；等比數列中兩項之商在等差數列中的對應項乃是該兩項在等差數列中對應值之差。這項對應關係在Nicolas Chuquet（1445？～1500？）的著作Triparty en la sciences des nombres中已經指出了，只是，Stifel把這項對應關係擴充到負指數以及分指數。例如，r^2 除以 r^3 得 r^{-1}，此值應對應到等差數列中的 -1。可惜，Stifel未曾將前面這項關係進一步推廣以引進對數。

二、Napier 對數

John Napier（1550～1617）是蘇格蘭的Murchiston男爵，他從其父親手中繼承了廣大的房地產，在不愁衣食的狀況下得以專研他的計算術以及三角學。他發現Stifel所指出來的等比數列與等差數列間的對應關係由於相鄰項的間隔太大而不能適用於計算，正當他對此種情形想謀求改善時，蘇格蘭國王James四世的醫生Dr. John Craig來訪，而告訴Napier關於他隨同James四世前往丹麥迎娶時的一些見聞。James四世的船碰到暴風因而停泊在距離丹麥天文學家Tycho Brahe（1546～1601）的天文臺不遠處的海邊，在等候天氣轉好的那段時間中，國王及其隨行人員得到Tycho Brahe的款待，而Dr. Craig則見識到這個天文臺用來計算的prosthaphaersis方法，prosthaphaersis這個字是一個希臘字，其意義是加與減；而所謂prosthaphaersis方法，乃是將函數之乘積轉變成和或差的方法。西元十六世紀的天文學家（包括Tycho Brahe在內）所常用的prosthaphaersis公式乃是三角學中的積化和差，例如

$$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$$
$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$$

他們的方法是這樣的：要計算98436與79253時，先從三角函數值表中找到兩個角 A 與 B，使得

$$\cos A=0.49218=\frac{1}{2}\times 0.98436$$

$$\cos B=0.79253$$

其次，再由三角函數值表中找到 cos（$A+B$）及 cos（$A-B$），則其和的 10^{10} 倍就是 98436 與 79253 之乘積（當然是近似值）。Napier 從Craig 處了解了天文學家的計算方法之後，得到很大的鼓勵，因而加倍努力，終於在西元 1614 年發表一部稱爲Mirifici logarithmorum canonis descriptio 的著作，他死後，其子Robert Napier 在西元 1619 年發表他的另一部稱爲Mirifici logarithmorum canonis constructio 的著作，這兩部著作闡述了Napier 的對數。

Napier 對數的精義說來很簡單，由於Napier 認爲等比數列

$$\cdots\cdots, r^{-2}, r^{-1}, 1, r, r^2, r^3, \cdots\cdots$$

中兩數的間隔可能太大，一種改善的辦法就是選取一個很接近 1 的數來作爲 r。於是，Napier 選擇了 $r=1-10^{-7}=0.9999999$，如此則上述數列中各項的間隔就會很小（事實上，就 $r=1-10^{-7}$ 來說，間隔實在太小了）；其次，爲了避開小數點的麻煩，Napier 把每個乘冪都乘上 10^7，換句話說，若

$$N=10^7(1-10^{-7})^L$$

則Napier 稱 L 爲 N 的"對數"，我們把它記爲

$$\text{Nap. }\log N=L$$

於是，可得

$$\text{Nap. }\log 10^7=0$$
$$\text{Nap. }\log 9999999=1$$

當Nap. $\log N=L$ 時，我們可得

$$\frac{N}{10^7}=\left((1-10^{-7})^{10^7}\right)^{\frac{L}{10^7}}$$

根據 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n=\frac{1}{e}$，可知 $(1-10^{-7})^{10^7}$ 很接近 $\frac{1}{e}$，事實上，這兩數的小數點後面有七位相同，亦即

$$\frac{N}{10^7}\doteqdot\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{L}{10^7}}$$

因此，可知

$$\frac{L}{10^7}\doteqdot\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)$$

換言之，下面這兩個關係式頗爲相近：

$$\text{Nap. } \log N = L$$

$$\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right) = \frac{L}{10^7}$$

由於有上面這種關係，所以有人認爲Napier 是自然對數的發明人；事實上，這種說法並不正確，因爲Nap. log與 $\log_{\frac{1}{e}}$ 並不是確實相同，何況Napier並沒有引進“對數之底”的概念。

Napier 引進對數的方法並不像前面所說的那麼代數化，他的方法是幾何式的。下面我們來介紹他的定義方法：取二線 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$，令 $\overline{AB}$ 之長爲 10^7。動點 P 沿 $\overline{AB}$ 由 A 點移動至 B 點，動點 Q 沿

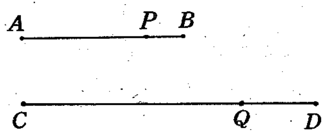

圖 1

$\overline{CD}$ 由 C 點移動至 D 點。P 點的初速度爲 10^7，而在位置 P 時的速度爲 $\overline{PB}$。Q 點 $\overline{CD}$ 上保持等速，其初速度也是 10^7，假設兩動點同時出發，某段時間後兩動點分別到達 P 與 Q 的位置，他定義 $\overline{CQ}$ 爲 $\overline{PB}$ 的對數，即

$$\overline{CQ} = \text{Nap. } \log \overline{PB}$$

上面這個定義與前面所說的 $N = 10^7(1-10^{-7})^L$ 爲什麼相同呢？我們可以作如下的解說：假設我們把 P 點由 A 點移動至 B 點所需的時間等分成 n 段，每段之長爲 t，並設 $0<t<1$，在第 i 段之始其位置爲 P_{i-1}，在第 i 段之末其位置爲 P_i；Q 點的情形亦同。假定在每個 $\overline{P_{i-1}P_i}$ 上，P 點保持等速並設其速度與在 P_{i-1} 點之速度相同，則可得

$$\begin{aligned}\overline{P_{i-1}P_i} &= t\cdot\overline{P_{i-1}B}\\ \overline{P_iB} &= \overline{P_{i-1}B} - \overline{P_{i-1}P_i}\\ &= (1-t)\,\overline{P_{i-1}B}\end{aligned}$$

由此可知，下面這個數列是等比數列，其公比爲 $1-t$：

$$\overline{P_0B},\ \overline{P_1B},\ \overline{P_2B},\ \overline{P_3B},\ \cdots\cdots$$

另一方面，由於 Q 點是等速運動，故得

$$\begin{aligned}\overline{Q_{i-1}Q_i} &= 10^7\,t\\ \overline{CQ_i} &= \overline{CQ}_{i-1} + \overline{Q_{i-1}Q_i}\\ &= \overline{CQ}_{i-1} + 10^7\,t\end{aligned}$$

因此，下面這個數列是等差數列，其公差爲 $10^7\,t$：

$$\overline{CQ_0}\ ,\ \overline{CQ_1}\ ,\ \overline{CQ_2}\ ,\ \overline{CQ_3}\ ,\ \cdots\cdots$$

更進一步地，因為$\overline{P_0B}=10^7$，$\overline{CQ_0}=0$，故得$\overline{P_iB}=10^7(1-t)^i$，且$\overline{CQ_i}=10^7\cdot it$，於是，若令$t=10^{-7}$，則得

$$\overline{P_iB}=10^7(1-10^{-7})^{\overline{CQ_i}}$$

由此可看出Napier 的對數就是我們前面所介紹之意義。

下面我們以現代數學的嚴密角度來觀察Napier 的對數。根據Napier 所規定的條件，設

$$\overline{PB}=x(t)\ ,\ \overline{CQ}=y(t)$$

則可得

$$\frac{dx(t)}{dt}=-x(t)$$

$$\frac{dy(t)}{dt}=10^7$$

$$x(0)=10^7$$

因此，得

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{10^7}{x}$$

由此解得

$$y=-10^7\log_e x+c$$

因為當$x=10^7$時，$y=0$，故得

$$\begin{aligned} y&=-10^7\log_e x+10^7\log_e 10^7\\ &=-10^7\log_e\left(\frac{x}{10^7}\right)\\ &=10^7\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right)\end{aligned}$$

由此可知，根據Napier 所規定的狀況，可得

$$y=\text{Nap. }\log x$$

$$\frac{y}{10^7}=\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

兩式的意義完全相同。另一方面，若由$N=10^7(1-10^{-7})^L$，則只能得出

$$\frac{L}{10^7}=\log_{(1-10^{-7})^{10^7}}\left(\frac{N}{10^7}\right)$$

換言之，依Napier所規定的狀況，所謂L是N的Napier對數，乃是指

$$\frac{L}{10^7}=\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N}{10^7}\right)$$

至於說所謂L是N的Napier對數，乃是表示$N=10^7(1-10^{-7})^L$，這種說法只是根據Napier所規定的狀況而選出一種求近似值之方法而已；也就是說，若$N=10^7(1-10^{-7})^L$，則N是L之Napier對數的一個（良好）近似值。

Napier所引進的對數並沒有完全達到“化乘爲加”的理想，因爲

$$\begin{aligned}\text{Nap. log}(N_1N_2)&=10^7\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N_1N_2}{10^7}\right)\\&=10^7\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N_1}{10^7}\right)+10^7\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{N_2}{10^7}\right)+10^7\log_{\frac{1}{e}}(10^7)\\&=\text{Nap. log}\,N_1+\text{Nap. log}\,N_2+\text{Nap. log}(10^{14})\end{aligned}$$

或是說，

$$\text{Nap. log}\,N_1+\text{Nap. log}\,N_2=\text{Nap. log}\left(\frac{N_1N_2}{10^7}\right)$$

由此可得，若n爲正整數，則

$$n\cdot(\text{Nap. log}\,N)=\text{Nap. log}\left(\frac{N^n}{10^{7(n-1)}}\right)$$

另一方面，因爲

$$-(\text{Nap. log}\,N)=\text{Nap. log}\left(\frac{10^{14}}{N}\right)$$

故當n是正整數時，

$$-n\cdot(\text{Nap. log}\,N)=\text{Nap. log}\left(\frac{10^{7(n+1)}}{N^n}\right)$$

關於除法，則爲

$$\text{Nap. log}\,N_1-\text{Nap. log}\,N_2=\text{Nap. log}\left(\frac{10^7N_1}{N_2}\right)$$

Napier對這些關係式自然相當熟悉，所以，在其著作中才提到：若兩數的比值爲2：1，則其（Napier）對數之差爲6931469.22；若兩數的比值爲10：1，則其（Napier）對數之差爲23025842.34。這兩個註解可與下面兩值比較：

$$\log_e 2=0.69314\cdots\cdots$$
$$\log_e 10=2.30258\cdots\cdots$$

事實上，Napier 對於這些關係式的敍述都採用比例的方法，顯然地，若$a:b=c:d$，則$ad=bc$，依前面的乘法公式，可知Nap. log a + Nap. log d = Nap. log b + Nap. log c。Napier 在他的著作中所列出來的關係式以現代數學術語表示，乃是

(1) 若$a:b=c:d$，則Nap. log b − Nap. log a = Nap. log d − Nap. log c。

(2) 若$a:b=b:c$，則Nap. log c = 2 Nap. log b − Nap. log a。

(3) 若$a:b=b:c$，則2 Nap. log b = Nap. log a + Nap. log c。

(4) 若$a:b=c:d$，則Nap. log d = Nap. log b + Nap. log c − Nap. log a。

(5) 若$a:b=c:d$，則Nap. log b + Nap. log c = Nap. log a + Nap. log d。

(6) 若$a:b=b:c=c:d$，則3 Nap. log b = 2 Nap. log a + Nap. log d，而且3 Nap. log c = Nap. log a + 2 Nap. log d。

Napier 在他西元1619年的著作Mirifici logarithmorum canonis constructio中，把他用以製作對數表的方法做了詳盡的介紹，在製表時，他並不是使用他的定義中那種幾何方式，而是使用數值的計算。同時，值得一提的是，Napier 原先不是使用 logarithm這個名稱，而稱之爲人造數（artificial number），後來則爲強調比例的關係，因而採用希臘文中的 logos（比例）及 arithmos（數）而合併成一個字，此字演化成今日英文中的 logarithm。所以，logarithm 一字的原義是比例數（ratio number）。

下面我們簡略地介紹Napier 製作對數表的方法。首先，我們要指出一點：Napier 引進對數概念的目的是要使他在（球面）三角學上的計算能夠簡化，所以，他所製作的對數表其實是三角函數對數值表。他以 sin 90° 爲 10^7，然後，求出每隔1分的正弦值（請注意，他的正弦值其實是現代數學中正弦值的 10^7 倍），對這些正弦值他求得其對數值，例如，他所求的 89°57′ 的正弦值爲 9999996（$\sin 89°57' = 0.9999996\cdots$），然後他逐次計算

$$10^7,\ 10^7(1-10^{-7}),\ 10^7(1-10^{-7})^2,\ 10^7(1-10^{-7})^3,\ \cdots$$

而發現 $10^7(1-10^{-7})^4 = 9999996.\cdots$，於是，他的對數表中有

$$\text{Nap. log}(10^7 \sin 89°57') = \text{Nap. log } 9999996 = 4$$

又如，他所求的 3′ 的正弦值爲 8727（$\sin 3' = 0.0008726645\cdots$），然後又得出$10^7(1-10^{-7})^{70439564} = 8726.667\cdots$，於是，在他的對數表中有

$$\text{Nap. log}(10^7 \sin 3') = \text{Nap. log } 8727 = 70439564$$

下表是Napier 對數表中的一小部分，從其中不難找出 3、8727、70439564，以及 (89)57、9999996、4 等數值，由此也可以了解Napier 對數表的編寫方式。其中的 differentiae一欄乃是表示其左、右兩個對數值之差，例如，

$$70439560 = 70439564 - 4$$

$$= \text{Nap. log}\,(10^7 \sin 3') - \text{Nap. log}\,(10^7 \sin 89°57')$$
$$= \text{Nap. log}\,(10^7 \sin 3') - \text{Nap. log}\,(10^7 \cos 3')$$
$$= \text{Nap. log}\,(10^7 \tan 3')$$

因此，differentiae一欄中的數值可視爲正切函數（或餘切函數）的對數值。

Gr. 0 0			+	−		
	sinus	logarithmi	differentiae	logarithmi	sinus	
0	0	infinitum	infinitum	0	10000000	60
1	2909	81425681	81425680	1	10000000	59
2	5818	74494213	74494211	2	9999998	58
3	8727	70439564	70439560	4	9999996	57
4	11636	67562746	67562739	7	9999993	56
5	14544	65331315	65331304	11	9999989	55

當我們要計算 10^7，$10^7(1-10^{-7})$，$10^7(1-10^{-7})^2$，……中的各項時，並不必各項都作了很高乘方的自乘，意思是說，$10^7(1-10^{-7})^{100}$ 並不必把 $1-10^{-7}$ 自乘100次再乘以 10^7，一種實用的計算方法是這樣的：令 $a_n = 10^7(1-10^{-7})^n$，$n \geqslant 0$，則可得

$$a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{10^7}$$

或許Napier就是根據上述關係式由 a_n 求 a_{n+1}，而在冗長的計算中使他“忘掉”了他在計算乘冪，因而沒有發現對數與指數間的密切關係：即

$$y = \text{Nap. log}\, x \quad 或 \quad \frac{y}{10^7} = -\log_e\left(\frac{x}{10^7}\right)$$

與

$$\frac{x}{10^7} = \exp\left(-\frac{y}{10^7}\right)$$

同義。

爲使其計算更爲精密起見，Napier曾以幾何方法證明下面的不等式：

$$10^7 - x < \text{Nap. log}\, x < \frac{10^7(10^7 - x)}{x}$$

這個不等式可依Napier對數與自然對數的關係而由微積分方法很易證得。有了這個不等式，Napier

把許多Nap. log x 之值取爲 10^7-x 與 $\frac{10^7(10^7-x)}{x}$ 的平均值。

三、常用對數

Napier 發明對數的動機是爲了簡化計算的工作，因此，他西元1614 年的著作問世之後，立刻得到大家的歡迎，其中有一位很熱心的英國數學家Henry Briggs（1561～1639）在西元1615年前去拜訪Napier，兩人討論如何進一步地改進對數的方法。Briggs建議使用10的乘冪（做底），Napier表示同意並說明他曾一度想定義對數使得 $\log 1=0$，而 $\log 10=10^{10}$（後者是爲了要避開小數點）；最後，他們兩人決定1的對數應該是0而10的對數應該是1（換言之，以10爲底）。可惜，Napier 已沒有精力把他們的決定付諸實施，因爲他在西元1617年就逝世了。於是，這個製作常用對數值表（亦即，以10爲底的對數）的工作就落在Briggs的肩上，他從 $\log 10=1$ 出發，逐次取方根而求其他對數，例如，由 $\sqrt{10}=3.162277$ 得 $\log 3.162277=0.5000000$，由 $10^{3/4}=5.623413$ 得 $\log 5.623413=0.7500000$。在Napier 逝世的當年Briggs就發表了一部稱爲Logarithmorum chilias prima 的作品，其中他求出1至1000的十四位常用對數值。西元1624年，在另一部著作Arithmetica logarithmica 中，他把常用對數值表加長到包含1至20000以及90000至100000的十四位常用對數值，至於20000至90000間各數的常用對數，則是荷蘭出版商Adriaen Vlacq（1600～1666）所補上的。有關對數的算術性質都已經完全清楚，因爲這些性質都在Briggs製作對數值表時使用過了。甚至連mantissa（尾數）這個字也是Briggs在Arithmetica logarithmica 中最先使用的，至於characteristic（首數）則是Briggs所提出而Vlacq最先使用。因爲這些成就，所以近代數學中通常把常用對數稱爲Briggs對數。

正當Briggs忙著製作常用對數表時，另一位英國數學家John Speidell 則致力於三角函數之自然對數表的製作；Speidell 的對數表記載於他西元1619年的著作New Logarithmes 之中。在Speidell 的表中，有

$$\text{Sp. log } \sin 30' = 525861$$

之結果，由此推算，Speidell 的對數表以現代對數表示，應該是

$$\text{Sp. log } x = 10^5(10+\log_e x)$$

因爲 $\sin 30'=0.0087265\cdots$，$\log_e \sin 30'=-4.741386\cdots$，$10+\log_e \sin 30'=5.258613\cdots$，乘以 10^5 即得其近似值。不過，對於後半部（45°以上）的正切、正割之值的對數值，Speidell 把“+10”省略了，例如，他表中有

$$\text{Sp. log } \tan 89^\circ = 404812$$

而 $\tan 89^\circ=57.289961\cdots$，$\log_e \tan 89^\circ=4.04812541\cdots$，可見他所列出的近似值乃是直接將 $4.04812541\cdots$ 乘以 10^5 而得的。事實上，早在西元1616年，英國人Edward Wright（1559～1615）翻譯Napier 的第一部著作時，其附錄中就有一個表，其中 $\log 10=2.302584$，由此知此

對數之底爲 e，因爲 $\log_e 10=2.30258509\cdots$，不過，此表可能是英國數學家William Oughtred（1574～1660）所作。西元1620年，Briggs的一位同事Edmund Gunter（1581～1626）發表了一個以分爲單位的正弦、正切之七位常用對數值表。

把對數傳入德國而使大衆所知的是德國人 Johann Faulhaber（1580～1635）在西元1630年的著作Canonem Logarithmicum。把對數傳入法國的是英國人Edmund Wingate（1596～1656）在他西元1625年的著作Arithmétique logarithmique。而把對數傳入義大利的則是Bonaventura Cavalieri（1598～1647）在他西元1632年的著作Directorium universale uranometricum，其中有正弦、正切、正割、正矢、及其對數值的八位值表。

數學上很少有一項新發現能夠像對數一樣，一問世就立刻吸引了許多人的興趣，其結果是他們所製作的對數表已超出了當時所需要的程度。不過，也難怪他們樂此不疲，因爲對數的發明確實帶給計算方面太多的方便（尤其是天文學方面），法國數學家Pierre-Simon Laplace（1749～1827）就曾經說過：對數的發明減輕了天文學家的工作而延長了他們的壽命（The invention of logarithms by shortening the labors doubled the life of the astronomer）。

附帶提出一件事：西元1924年至西元1949年間，英國人爲慶祝對數發明三百年，編製了一個二十位對數表。

四、Bürgi 對數

在對數的發明方面，能與Napier爭奪“誰先發明對數”之榮譽的是瑞士的一位鐘錶師傅Jobst Bürgi（1552～1632），Bürgi 因爲後來轉到天文臺工作而對於計算引發了興趣。他從西元1558年就開始探討對數的概念，在時間上比Napier早了六年，因爲Napier在他的descriptio（西元1614年）書中自稱他埋首此項工作二十年。另一方面，Bürgi 却在西元1620 年才發表他的成果，比Napier的descriptio又晚了六年。Bürgi在西元1620年的著作名稱爲Arithmetische und geometrische Progress-Tabulen，依此名稱，可見他的對數概念也跟Napier 一樣從等比數列與等差數列間的關係出發，而且兩人所使用的基本原理也相同。不過，兩人所用的符號與數值方面却有兩點差異：

(1) Napier選取一個比1略小的正數 $1-10^{-7}$ 爲等比數列的公比，而Bürgi則選取一個比1略大的數 $1+10^{-4}$ 爲等比數列的公比。因此，以現代數學術語表示，Napier的對數函數是遞減函數，而Bürgi的對數函數則是遞增函數。

(2) Napier把等比數列的各項乘以 10^7 來避開小數，而Bürgi則乘以 10^8 來達到同樣的目的，換言之，Bürgi是在

$$N=10^8(1+10^{-4})^L$$

的關係下來建立 L 與 N 的對數關係，不過，他不是直接稱 L 爲 N 的對數，而又加了一道手續：$10L$ 稱爲 N 的對數。不僅如此，他不曾使用對數這個名稱，而使用另一種名稱：當 N 與 L 滿足上面的關係時，他稱 $10L$ 爲“紅”數（Die Rothe Zahl）而與“黑數”N 對應。

根據前面的說法，若

$$10L = \text{Bü. log}\,N$$

則表示

$$L = 10^4 \log_{(1+10^{-4})^{10^4}} \left(\frac{N}{10^8} \right)$$

換言之，對任意正數 x，可得

$$\text{Bü. log}\,x = 10^5 \log_{(1+10^{-4})^{10^4}} \left(\frac{x}{10^8} \right)$$

乍看起來，由於 $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e$，好像可得

$$\text{Bü. log}\,x \doteqdot 10^5 \log_e \left(\frac{x}{10^8} \right)$$

可惜這個近似值過分粗略，這是因為 $(1+10^{-4})^{10^4}$ 與 e 不夠接近的緣故，事實上，

$$e = 2.7182818\cdots$$
$$(1+10^{-4})^{10^4} = 2.7181459\cdots$$

因此，在 Bürgi 的表中，

$$\text{Bü. log}\,10^9 = 230270.022$$

另一方面，

$$10^5 \log_e 10 = 230258.509\cdots$$

兩者之間有相當的差距。下表係 Bürgi 對數表最前面的一小段：

	0	500	1000	1500	2000
0	100000000	100501227	101004966	101511230	102020032
10	……10000	……11277	……15067	……21381	……30234
20	……20001	……21328	……25168	……31534	……40437
30	……30003	……31380	……35271	……41687	……50641

其中上列與左行合併為紅數，中間部分為黑數，例如，表中黑數……21328（實際應為 100521328）所對應的紅數為 520（上列的 500 加上左行的 20），其意為

$$\text{Bü. log}\,100521328 = 520$$

或是

$$10^{8}(1+10^{-4})^{52} \doteqdot 100521328$$

嚴格地說，Bürgi 的表不是對數表而是乘方表，因爲它提供給我們由 52 求 $10^{8}(1+10^{-4})^{52}$。另外，Bürgi 對數也跟Napier 對數一樣，沒有完全達到“化乘爲加”的地步。事實上，

$$\text{Bü. log}(N_1 N_2) = \text{Bü. log}\,N_1 + \text{Bü. log}\,N_2 + \text{Bü. log}(10^{16})$$

或是說，

$$\text{Bu. log}\,N_1 + \text{Bu. log}\,N_2 = \text{Bu. log}\left(\frac{N_1 N_2}{10^{8}}\right)$$

由此可得，若 n 爲正整數，則

$$n \cdot (\text{Bu. log}\,N) = \text{Bu. log}\left(\frac{N^{n}}{10^{8(n-1)}}\right)$$

另一方面，因爲

$$\text{Bu. log}(10^{8}) = 0$$

故得

$$-(\text{Bu. log}\,N) = \text{Bu. log}\left(\frac{10^{16}}{N}\right)$$

於是，當 n 爲正整數時，

$$-n(\text{Bu. log}\,N) = \text{Bu. log}\left(\frac{10^{8(n+1)}}{N^{n}}\right)$$

關於除法，則爲

$$\text{Bu. log}\,N_1 - \text{Bu. log}\,N_2 = \text{Bu. log}\left(\frac{10^{8}N_1}{N_2}\right)$$

這些關係式，都與Napier 對數的關係式頗爲類似。

（下期待續）