

教育部委辦國民中學數學及自然科學 課程改進計畫

各科試用教材摘介 (一)

本中心

本中心接受教育部委辦國中、高中、技職學校數學及自然科學課程改進計畫，邀請國內各大學教授一百二十多位、中學教師四十多位，在教育部科學教育指導委員會主任委員吳大猷先生及各位指導委員、暨諮詢委員指導下，進行編寫各有關課程之教科書、教學指引、實驗手冊、實驗活動本等試用教材。

數年來，各分項計畫分別依原定時間編寫完成有關教材，並順利地在教育部及廳局指定之學校進行試教。茲以本中心編印之試用教材，將提供教育部做為將來修訂各有關學校科學課程之參考，而科學教育事關國家大計與萬千學子之修習發展，為求集思廣益，乃請各計畫編輯小組，就所編各科試用教材教科書中各擷取一章，藉本中心發行之科學教育月刊逐期分科摘介，提請教育界先進及同仁就其內容及編寫方式惠予指教，以做為修訂之參考。

本期刊登之內容，係國一數學中第二冊第一章前半部（後半部下期續完）。

國一數學

1 二元一次聯立方程式

1-1 二元一次聯立方程式的意義

我們已學過用一元一次方程式來解決日常生活中有關數量的問題，例如：

某汽車代銷商代售甲、乙兩型汽車。每售出一輛甲型汽車可賺 2,500 元，乙型的可賺 2,000 元；已知今年二月售出的乙型汽車的輛數是甲型的 2 倍，共賺 65,000 元。問該代銷商今年二月各售出甲、乙兩型汽車多少輛？

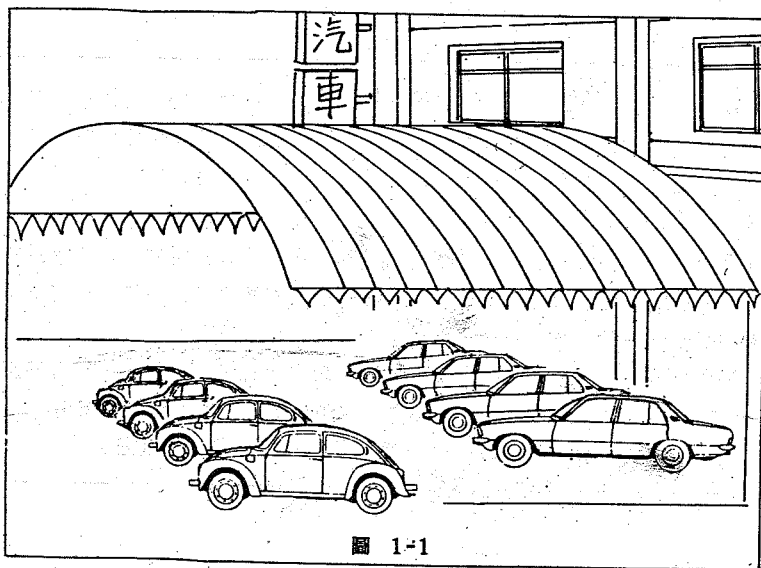
設該代銷商今年二月售出甲型汽車 x 輛，則售出乙型汽車 $2x$ 輛。售出 x 輛甲型汽車可賺 $2500x$ 元，而售出 $2x$ 輛乙型汽車可賺 $2000 \times 2x = 4000x$ (元)。依題意，今年二月共賺 65000 元，可列式得

$$2500x + 4000x = 65000$$

即 $6500x = 65000$

解此方程式，得 $x = 10$ 而 $2x = 20$

所以該代銷商今年二月售出甲型汽車 10 輛，乙型汽車 20 輛。



同樣這個問題，我們也可以設甲型汽車售出 x 輛，乙型售出 y 輛。

因乙型汽車售出的輛數為甲型的 2 倍，所以 $y = 2x$ 。

又售出 x 輛的甲型汽車與 y 輛的乙型汽車共賺

$$2500x + 2000y \text{ (元)}$$

故依題意列式得 $2500x + 2000y = 65000$

也就是本問題的數量，可用下面兩個併列的等式表示：

$$\begin{cases} y = 2x & \dots\dots\dots (1) \\ 2500x + 2000y = 65000 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

如果我們能找出符號 x 與 y 所代表的數，使得上面兩個等式都成立，那麼我們就可知道今年二月該代銷商分別售出的甲、乙型汽車數了！

在等式(1)或(2)中，含有兩個文字符號 x 與 y ，而且它們的次數都是 1，我們通常稱這類等式為二元一次方程式。這兩個二元一次方程式併列在一起，就叫做二元一次聯立方程式或二元一次方程組。同時使得這兩個等式成立的 x 與 y 之值，就叫做這個聯立方程式的解；求出聯立方程式的解，就叫做解聯立方程式。

練習 下列那一組 x 與 y 所代表的數是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} y = 2x \\ 2500x + 2000y = 65000 \end{cases} \quad \text{的解?}$$

① $x = 15, y = 30$ ② $x = 30, y = 45$

③ $x = 10, y = 20$ ④ $x = 18, y = 10$

從以上的練習中，我們可以發現 $x = 10, y = 20$ 是聯立方程式

$$\begin{cases} y = 2x & \dots\dots\dots (1) \\ 2500x + 2000y = 65000 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

的解。

在(2)式中的 y ，以(1)式的 $y = 2x$ 代入，就可得

$$2500x + 2000 \times 2x = 65000$$

即 $2500x + 4000x = 65000$

這就是一個一元一次方程式了！

現在再讓我們看看另外的例子：

與國作化學實驗，拿來酒精一瓶，連瓶共重 800 公克；當他用完四分之三的酒精後，連瓶還剩 350 公克。試問瓶子與酒精原重各若干公克？

在這個問題中，若設酒精原重為 x 公克，則瓶重為 $(800 - x)$ 公克

與國用完 $\frac{3}{4}$ 的酒精後，即用完 $\frac{3}{4}x$ 公克的酒精，連瓶還剩 350 公克，故可列式得

$$800 - \frac{3}{4}x = 350$$

解此方程式，可得 $x = 600$ 而 $800 - x = 200$

所以酒精原重 600 公克，瓶重 200 公克。

如果我們用 x 公克表示原有酒精的重量， y 公克表示瓶子本身的重量，因連瓶共重 800 公克，所以

$$x + y = 800$$

用完四分之三的酒精後，還剩酒精 $\frac{1}{4}x$ 公克，連瓶共剩

$$\left(\frac{1}{4}x + y\right) \text{ (公克)}$$

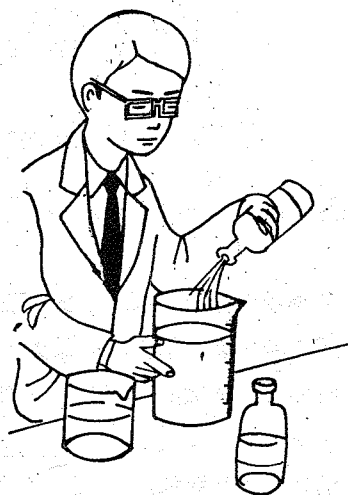


圖 1-2

故可得

$$\frac{1}{4}x + y = 350$$

也就是本問題的數量，可用下面兩個並列的等式表示：

$$\begin{cases} x + y = 800 & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{4}x + y = 350 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

練習 下列那一組 x 與 y 所代表的數是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x + y = 800 \\ \frac{1}{4}x + y = 350 \end{cases} \text{ 的解？}$$

① $x = 500, y = 300$

② $x = 400, y = 300$

③ $x = 600, y = 200$

④ $x = 400, y = 250$

由以上的練習，我們也知 $x = 600, y = 200$ 為聯立方程式

$$\begin{cases} x + y = 800 & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{4}x + y = 350 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

的解。

在(1)式中，可得 $y = 800 - x$

以 $y = 800 - x$ 代入②就可得

$$\frac{1}{4}x + (800 - x) = 350$$

即 $800 - \frac{3}{4}x = 350$

它也是一個一元一次方程式。

- 練習** ①某農場出售雞、鴨若干隻。已知每隻雞平均可賺12元，鴨可賺14元。鴨數是雞數的 $\frac{3}{5}$ ，共賺1632元；若用 x 表示售出的雞數， y 表示售出的鴨數，依題意可列出二元一次聯立方程式_____。
- ②已知大小兩數的和為7，它們的差為1。若用 x 表示大數， y 表示小數；依題意可列出二元一次聯立方程式_____。
- ③已知父子年齡和為84歲，且父年為子年的3倍。若用 x 表示父年， y 表示子年；依題意可列出二元一次聯立方程式_____。

習題 1 - 1

1. 下列那一組文字符號 x 與 y 所代表的數是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases} \text{ 的解?}$$

- (1) $x = 2, y = 0$ (2) $x = -1, y = 8$ (3) $x = 1, y = 2$

2. 下列那一組文字符號 x 與 y 所代表的數是二元一次聯立方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x - 6y = 9 \end{cases} \text{ 的解?}$$

- (1) $x = 9, y = -1$ (2) $x = 7, y = 2$ (3) $x = 5, y = 1$

3. 已知華氏溫度度數 = $\left(\frac{9}{5} \times \text{攝氏溫度度數}\right) + 32$; 因此若用文字符號 x, y 分別代表攝氏溫度與華氏溫度的度數, 則可列式得出一個二元一次方程式 _____。

4. 已知水泥每包是 85 元; 若用 x 代表水泥的包數, y 代表 x 包水泥的錢數, 則 x 與 y 的關係, 可列出一個二元一次方程式 _____。

5. 已知 x 個 5 元的硬幣與 y 個 1 元的硬幣, 共計 32 元, 則 x 與 y 的關係, 可寫成 _____。

6. 矩形的長是 x , 寬是 y , 周長是 10, 則 x 與 y 的關係可寫為 _____。

7. 已知甲數的 5 倍等於乙數的 4 倍, 且甲數的 3 倍比乙數的 2 倍多 2。若用 x 與 y 分別代表甲、乙兩數, 則 x 與 y 的關係, 可列出二元一次聯立方程式 _____。

8. 設雞 x 頭, 兔 y 頭, 已知雞兔共 10 頭, 腳數共 28 隻, 則由 x 與 y 的關係, 可列出二元一次聯立方程式 _____。

1-2 代入消去法

從上一節中, 我們知道許多有關數量問題, 可列成二元一次聯立方程式。下面, 我們討論解這種聯立方程式的一種方法。

例 1 解聯立方程式 $\begin{cases} y = 2x & \dots\dots\dots (1) \\ x + y = 12 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

解 我們想求出 x 與 y 的值, 使得(1)、(2)兩個等式能同時成立。若以(1)式中的 $y = 2x$ 代入(2)式中的 y , 得到

$$x + 2x = 12 \quad \dots\dots\dots (3)$$

解方程式(3)，得 $x = 4$

再以 $x = 4$ 代入(1)式或(2)式，求得 y ：

$$\text{由(1)式} \quad y = 2 \cdot 4 = 8$$

$$\text{由(2)式} \quad 4 + y = 12$$

$$y = 8$$

故得 $x = 4$ ， $y = 8$

檢驗：以 $x = 4$ ， $y = 8$ 代入(1)、(2)兩式，得到

$$\begin{cases} 8 = 2 \cdot 4 \\ 4 + 8 = 12 \end{cases}$$

所以 $x = 4$ ， $y = 8$ 是它的解

$$\text{例 2 解聯立方程式} \quad \begin{cases} 3x + 2y = 13 & \text{..... (1)} \\ x - 3y = -3 & \text{..... (2)} \end{cases}$$

解 由(2)式，可得到

$$x = 3y - 3 \quad \text{..... (3)}$$

若把(3)式中的 $x = 3y - 3$ 代入(1)式中的 x ，得到 $3(3y - 3) + 2y = 13$ (4)

解方程式(4)，得 $y = 2$

再以 $y = 2$ 代入(3)式，得 $x = 3 \cdot 2 - 3 = 3$

檢驗：以 $x = 3$ ， $y = 2$ 代入(1)、(2)兩式，得到

$$\begin{cases} 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13 \\ 3 - 3 \cdot 2 = -3 \end{cases}$$

所以 $x = 3$ ， $y = 2$ 是它的解

練習 仿照例 1 或例 2 解下列聯立方程式：

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} y = 3x \\ x + y = 9 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{cases} x + y = 6 \\ x = y - 4 \end{cases}$$

上面兩個例題的解法，叫做代入消去法，簡稱代入法，它的一般步驟說明如下：

(一) 選定一個方程式的一個未知數，用另一未知數表示出來。

例如：例 1 中(1)式 $y = 2x$ ；例 2 中(3)式 $x = 3y - 3$

(二) 把第一步所表示出來的等式，代入另一個方程式中，消去一個未知數，得到只含另一未知數的一元一次方程式。

例如：例 1 中(3)式 $x + 2x = 12$

例 2 中(4)式 $3(3y - 3) + 2y = 13$

(三) 解第二步所得到的二元一次方程式，求出一個未知數的解。

(四) 把第三步所得到的未知數之解，代入第一步所得的式子中，就可以求出另一未知數。

例3 用代入消去法解聯立方程式

$$\begin{cases} y = 2x & \dots\dots\dots (1) \\ 2500x + 2000y = 65000 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解 把(1)式中 $y = 2x$ 代入(2)消去 y ，得

$$2500x + 4000x = 65000$$

$$\text{即 } 6500x = 65000$$

$$\text{解得 } x = 10$$

$$\text{再以 } x = 10 \text{ 代入(1)式得 } y = 20$$

所以 $x = 10$ ， $y = 20$ 是它的解。

(也就是在第一節所提到的例題中，售出甲型汽車 10 輛，乙型汽車 20 輛)

例4 用代入消去法解聯立方程式

$$\begin{cases} x + y = 800 & \dots\dots\dots (1) \\ \frac{1}{4}x + y = 350 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\text{解 由(1)式，得 } x = 800 - y \dots\dots\dots (3)$$

把(3)式代入(2)式消去 x ，得

$$\frac{1}{4}(800 - y) + y = 350$$

$$\text{即 } 200 + \frac{3}{4}y = 350 \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{解(4)式，得 } y = 200$$

$$\text{再以 } y = 200 \text{ 代入(3)式，得 } x = 800 - 200 = 600$$

所以 $x = 600$ ， $y = 200$ 是它的解。

(也就是在第一節例題中，興國所取來的酒精原重 800 公克，而空瓶重 200 公克)

練習 用代入消去法解下列各聯立方程式

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x - 2y = 9 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

例5 用代入消去法解聯立方程式

$$\begin{cases} 2p + 3q = 21 & \dots\dots\dots (1) \\ 5p + 2q = 25 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$\text{解 由(1)式，得 } p = \frac{1}{2}(21 - 3q) \dots\dots\dots (3)$$

把(3)式代入(2)式消去 p ，得到

$$\frac{5}{2}(21 - 3q) + 2q = 25 \quad \dots\dots\dots (4)$$

解(4)式，得 $q = 5$

再以 $q = 5$ 代入(3)式，得 $q = \frac{1}{2}(21 - 3 \cdot 5) = 3$

答： $p = 3$ ， $q = 5$

練習 用代入消去法解下列各聯立方程式：

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} \begin{cases} 3y = 5 - 2x \\ 4x + 3y = 11 \end{cases} & \textcircled{2} \begin{cases} 5p + 2q = 12 \\ 3p - 2q = 4 \end{cases} \\ \textcircled{3} \begin{cases} 2m + 4n = 10 \\ 2m - 4n = 2 \end{cases} & \textcircled{4} \begin{cases} 3x + 4y = 0 \\ 2x - 2y = 7 \end{cases} \end{array}$$

以上所列舉的二元一次聯立方程式都恰有一組解。那麼是否每一個這樣的聯立方程式也都恰有一組解呢？我們來看看下面的例子：

例 6 解聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 5 & \dots\dots\dots (1) \\ 2x + 2y = 10 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

解 由(1)式，得 $x = 5 - y$ $\dots\dots\dots (3)$

把(3)式代入(2)式消去 x ，得到

$$2(5 - y) + 2y = 10 \quad \dots\dots\dots (4)$$

由(4)式，得到

$$0 \cdot y = 0$$

所以不論 y 代表那一個數都能使(4)式成立；在(3)式中以任意一個數 a 取代 y ，得到 $x = 5 - a$ ，都是原聯立方程式的解。

例如： $y = 1$ ， $x = 4$ ； $y = 2$ ， $x = 3$ ； $y = -1$ ， $x = 6$ ； $y = -2$ ， $x = 7$ ；……都是它的解。

因此原聯立方程式有無限多組解。

例 7 解聯立方程式 $\begin{cases} x + y = 5 & \dots\dots\dots (1) \\ 2x + 2y = 15 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

解 由(1)式，得 $y = 5 - x$ $\dots\dots\dots (3)$

把(3)式代入(2)式消去 y ，得到

$$2x + 2(5 - x) = 15 \quad \dots\dots\dots (4)$$

由(4)式，得到

$$0 \cdot x = 5$$

所以(4)式是無解方程式；因此原聯立方程式無解。

從上面的例子，我們知道有些二元一次聯立方程式恰有一組解，有些有無限多組解，也可能沒有解。

練習 下列那些聯立方程式有無限多組解？那些是無解？

$$\textcircled{1} \begin{cases} 3x + 4y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} m + n = 2 \\ 3m + 3n = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 4x - 2y = 7 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} x - y = 2 \\ 4x = 8 + 4y \end{cases}$$

習題 1 - 2

1. 用代入消去法解下列各二元一次聯立方程式：

$$(1) \begin{cases} x = 3 \\ x + y = 8 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = y - 2 \\ y = 6 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 3y = 2 \\ y = x \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 4m + 3n = 5 \\ 2m - n = -5 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} 3c - 2d = -4 \\ 3c + d = 2 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{5}y = 1 \\ 5x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$*(7) \begin{cases} 0.6x + 1.6y = 4.4 \\ 2x - 0.4y = 3.2 \end{cases}$$

$$(8) \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 4y = 5 \end{cases}$$

$$*(9) \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 2 \\ 0.4x - 0.2y = 0.2 \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} 5x - 3y = 7 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{2}y = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$(11) \begin{cases} 3(s + t) = 2s + 5t + 2 \\ 2s = 4(1 + t) \end{cases}$$

$$*(12) \begin{cases} 1.5x - y - 1.5 = x - 2y \\ \frac{1}{2}x - y = 2 \end{cases}$$

2. 用代入消去法解下列聯立方程式，並加以驗算：

$$*(1) \begin{cases} 3x - 4y - 1 = 3(2x - y + 2) \\ 2(4x + 2y + 3) = 7x + y + 9 \end{cases}$$

$$*(2) \begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 2.25 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = 1.45 \end{cases}$$

3. 已知長方形的周長為 24 公寸，長的 2 倍等於寬的 5 倍。若用 x 代表長方形的長， y 代表它的寬。

(1) 列出二元一次聯立方程式來表示這個長方形長與寬的關係。

(2) 求該長方形的長與寬各多少公寸。

1-3 加減消去法

前一節中我們學過用代入消去法解二元一次聯立方程式。這個解法就是從兩個二元一次方程式中，先消去一個未知數，求出另一個未知數。想要達到這個目的，還可以用下面所要討論的加減消去法。

例 1 解聯立方程式
$$\begin{cases} 5x + 2y = 12 & \dots\dots\dots (1) \\ 3x - 2y = 4 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解 在(1)、(2)兩式中不論 y 代表那一個數， $2y$ 與 $-2y$ 互為相反數；因此，把(1)、(2)兩式相加

$$\begin{array}{r} 5x + 2y = 12 \\ +) 3x - 2y = 4 \\ \hline 8x + 0 = 16 \end{array}$$

可得 $8x = 16$ ，也就是 $x = 2$

再以 $x = 2$ 代入(1)式，得到

$$5 \cdot 2 + 2y = 12 \quad \dots\dots\dots (3)$$

解(3)式，得 $y = 1$

檢驗：以 $x = 2$ ， $y = 1$ 分別代入(1)、(2)兩式，得到

$$\begin{cases} 5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 12 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 4 \end{cases}$$

所以 $x = 2$ ， $y = 1$ 是它的解。

例 2 解聯立方程式
$$\begin{cases} x + 3y = -7 & \dots\dots\dots (1) \\ x - 7y = 3 & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

解 仔細觀察(1)、(2)兩式，把(1)式減去(2)式可以消去未知數 x ，得到 $10y = -10$ ，也就是 $y = -1$

再以 $y = -1$ 代入(1)式，可得

$$x + 3 \cdot (-1) = -7 \quad \dots\dots\dots (3)$$

解(3)式，得 $x = -4$

檢驗：以 $x = -4$ ， $y = -1$ 分別代入(1)、(2)兩式，得到

$$\begin{cases} (-4) + 3 \cdot (-1) = -7 \\ (-4) - 7 \cdot (-1) = 3 \end{cases}$$

所以 $x = -4$ ， $y = -1$ 是它的解。

練習 將下列聯立方程式的兩個方程式相加或相減，求出 x 與 y ；並各加以檢驗：

$$\textcircled{1} \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases} \quad \textcircled{2} \begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + y = 8 \end{cases} \quad \textcircled{3} \begin{cases} 2x - y = 4 \\ y + 3x = 1 \end{cases}$$

上面兩個例題的解法就叫做**加減消去法**；它與代入消去法一樣，都是消去聯立方程式中的一個未

知數，求出另一個未知數。我們可以發現用加減法解二元一次聯立方程式有時候是很簡便的！

下面我們再看看用加減消去法解聯立方程式的其他例子。

例3 解聯立方程式
$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 & \text{..... (1)} \\ 4x + 5y = 13 & \text{..... (2)} \end{cases}$$

解 仔細觀察(1)式 $2x$ 與(2)式 $4x$ ，因 $4x = 2 \cdot (2x)$ 所以(1) $\cdot 2$ ，得到

$$4x + 6y = 14 \quad \text{..... (3)}$$

以(3)式減去(2)式，得

$$y = 1$$

再以 $y = 1$ 代入(1)式，得到

$$2x + 3 = 7$$

也就是 $x = 2$

答： $x = 2$ ， $y = 1$

在例3中我們也可以由(1)式 $3y$ 與(2)式 $5y$ ，因

$$5 \cdot (3y) = 3 \cdot (5y)$$

所以用下列步驟消去 y ，求得 x

$$(1) \cdot 5, \text{ 得 } 10x + 15y = 35 \quad \text{..... (4)}$$

$$(2) \cdot 3, \text{ 得 } 12x + 15y = 39 \quad \text{..... (5)}$$

(5) - (4) 得 $2x = 4$ ，也就是 $x = 2$

再以 $x = 2$ 代入(1)式，得 $4 + 3y = 7$ ，也就是 $y = 1$

練習 用加減消去法解下列各聯立方程式：

$$\textcircled{1} \begin{cases} x + 3y = -7 \\ -x - 7y = 19 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} 5x - 2y = 6 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$

$$\textcircled{4} \begin{cases} 4x + 2y = -2 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{5} \begin{cases} 4x + y = 4 \\ 3x - 2y = 3 \end{cases}$$

$$\textcircled{6} \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases}$$

(待續)