包　絡　線

趙文敏

國立臺灣師範大學數學系

包絡線（envelope）是幾何學中探討曲線理論的一種重要方法，它的意義是這樣的：設坐標平面上有一個含一參數的曲線族 $f(x, y, c)=0$，其中 c 是參數，則在坐標平面上，與此曲線族中每一曲線都相切（或者說，都有公切線）的曲線就稱爲此曲線族的**包絡線**。

例如，曲線族 $(x-c)^2+y^2=1$ 的包絡線是 $y=1$ 與 $y=-1$，因爲不論 c 值爲何，圓 $(x-c)^2+y^2=1$ 都與直線 $y=1$，$y=-1$ 相切。

早在西元十七世紀，微積分學的發明人之一的Gottfried Leibniz（1646－1716，德國人）就知道由曲線族方程式 $f(x, y, c)=0$ 計算其包絡線方程式的方法，他的方法是先將 $f(x, y, c)$ 對 c 求偏導函數 $f_c(x, y, c)$，再由 $f(x, y, c)=0$ 及 $f_c(x, y, c)=0$ 消去 c，所得的方程式就是其包絡線的方程式。

例如：若 $f(x, y, c)=(x-c)^2+y^2-1$，則

$$f_c(x, y, c)=-2(x-c)$$

於是，由

$$\begin{cases}(x-c)^2+y^2=1\\ -2(x-c)=0\end{cases}$$

消去 c，即得 $y^2=1$。

本期封面、封底介紹的四種簡單的包絡線爲：四角星形線、三角星形線、心臟線、與蚶線。

甲、四角星形線

設 a 爲一正常數，在坐標平面上，直線 $L_c^{\pm}$：$\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}=1$ 被兩坐標軸所截出的線段長都等於 a（與 c 值無關），則直線族 $L_c^{\pm}$ 的包絡線就稱爲**四角星形線**（astroid）（參看封面左下圖，在此圖中，每條直線 $L_c^{\pm}$ 都只畫出在兩坐標軸間那一段）。

利用Leibniz 的方法求四角星形線的方程式時，應該由下面兩個方程式中消去 c，（根據對稱性，我們只考慮 $c>0$ 及 L_c^{+} 的情形）：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{c}+\dfrac{y}{\sqrt{a^2-c^2}}=1\\[2ex] -\dfrac{x}{c^2}+\dfrac{cy}{\sqrt{(a^2-c^2)^3}}=0\end{cases}$$

由第二式，可得

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2-1=\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{2}{3}}$$

更進一步地，可得

$$c=\frac{ax^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}}$$

代入第一式，即得

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$$

這就是四角星形線的直角坐標方程式，而其參數方程式可寫成

$$\begin{cases} x=a\cos^3\theta \\ y=a\sin^3\theta \end{cases} \qquad (0\le\theta\le 2\pi)$$

四角星形線的長為

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}d\theta$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3a\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$=6a$$

四角星形線所圍的面積為

$$4\int_0^{1}\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}dx$$
$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin^2 t\,dt \qquad (\text{令 } x=a\sin^3 t)$$
$$=12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,dt-12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t\,dt$$
$$=\frac{9}{4}a^2\pi-\frac{15}{8}a^2\pi$$
$$=\frac{3}{8}a^2\pi$$

乙、三角星形線

設 a 為一正常數，對每個 $\theta\in[0,2\pi]$，令 L_θ 表示連接點 $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ 與點 $(a\cos(\pi-2\theta), a\sin(\pi-2\theta))$ 的直線，則直線族 L_θ 的包絡線就稱為**三角星形線**（deltoid）（參看封底圖）。

顯然地，直線 L_θ 的方程式為

$$(\sin\theta-\sin 2\theta)x-(\cos\theta+\cos 2\theta)y+a\sin 3\theta=0$$

將上式對 θ 偏微分，得

$$(\cos\theta-2\cos 2\theta)x+(\sin\theta+2\sin 2\theta)y+3a\cos 3\theta=0$$

由上面兩式解出 x 與 y，即得

$$\begin{cases} x=2a\cos\theta+a\cos 2\theta \\ y=2a\sin\theta-a\sin 2\theta \end{cases} \qquad (0\leq\theta\leq 2\pi)$$

這就是三角星形線的參數方程式。

三角星形線的長為

$$\begin{aligned} &3\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &=12a\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\sin\frac{3}{2}\theta\,d\theta \\ &=16a \end{aligned}$$

三角星形線所圍的面積為

$$\begin{aligned} &2\int_0^{\pi}(2a\sin\theta-a\sin 2\theta)(2a\sin\theta+2a\sin 2\theta)\,d\theta \\ &=4a^2\int_0^{\pi}(2\sin^2\theta+\sin\theta\sin 2\theta-\sin^2 2\theta)\,d\theta \\ &=2\pi a^2 \end{aligned}$$

三角星形線有另一種意義：任取一圓及其一內接三角形，根據Robert Simson（1687－1768，英國人）的定理，此圓上任一點 P 到此內接三角形三邊之垂線的垂足必共線，所共之線稱為 P 點的Simson線。現在，考慮此圓上每一點的Simson線所成的直線族，這個直線族的包絡線是三角星形線。封底圖中的圓以及由粗線條畫成的內接三角形就是配合該三角星形線所需的圓及三角形。該圖內尚有一個小三角形，此三角形是這樣作出來的：對任意三角形 ABC，將三個內角都三等分，則 $\angle B$ 與 $\angle C$ 的四條三等分角線會相交於四點，令此四點中最接近 $\overline{BC}$ 那一點為 A'，仿此作 B'，C'，則 $\triangle A'B'C'$ 是一個等邊三角形，稱為 $\triangle ABC$ 的Morley三角形，這個名稱是為了紀念Frank Morley（1860－1937）而定的，因為這個三角形是等邊三角形這個性質是他在西元1899年發現的。

丙、心臟線

在平面上任取一圓及圓上任一點 A，對於此圓上每一點 Q，令 C_Q 表示以 Q 為圓心 $\overline{QA}$ 為半徑的圓，則圓族 C_Q 的包絡線就稱為**心臟線**（cardioid）（參看封面右圖上）。

若此圓為 $(x-a)^2+y^2=a^2$，而 A 為原點，則圓上任意點 Q 都可以表示成 $(a+a\cos\theta, a\sin\theta)$ 之形式，其中 $0\leq\theta\leq 2\pi$。如此，則圓 C_Q 的方程式為

$$x^2+y^2-2ax(1+\cos\theta)-2ay\sin\theta=0$$

對 θ 偏微分，得

$$x\sin\theta-y\cos\theta=0$$

解出 x 與 y，即得

$$\begin{cases} x=2a\cos\theta(1+\cos\theta), \\ y=2a\sin\theta(1+\cos\theta), \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

這就是心臟線的參數方程式。

若以極坐標表示，則得心臟線的極坐標方程式為

$$r=2a(1+\cos\theta), \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

請注意，封面心臟線方程式是 $r=2a(1+\sin\theta)$ 之形式。

心臟線的長為

$$\begin{aligned} &2\int_0^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+r^2}\,d\theta \\ &=8a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta \\ &=16a \end{aligned}$$

心臟線所圍的面積為

$$\begin{aligned} &2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\,d\theta \\ &=4a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\,d\theta \\ &=6\pi a^2 \end{aligned}$$

丁、蚶　線

在平面上任取一圓 C 及任意一點 A，對於圓 C 上每一點 Q，令 C_Q 表示以 Q 為圓心 $\overline{QA}$ 為半徑的圓，則當 A 點不在圓 C 上時，圓族 C_Q 的包絡線就稱為**蚶線**（lamicon）（參看封面右圖下）。

設圓 C 的方程式為 $(x-a)^2+y^2=b^2$，而 A 為原點，其中 a 與 b 為正數，則圓 C 上任意點 Q 都可表示成 $(a+b\cos\theta, b\sin\theta)$ 之形式。如此，圓 C_Q 的方程式為

$$x^2+y^2-2x(a+b\cos\theta)-2by\sin\theta=0$$

對 θ 偏微分，得

$$x\sin\theta-y\cos\theta=0$$

解出 x 與 y，得

$$\begin{cases} x=2\cos\theta(a\cos\theta+b) \\ y=2\sin\theta(a\cos\theta+b) \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

這就是蚶線的參數方程式。

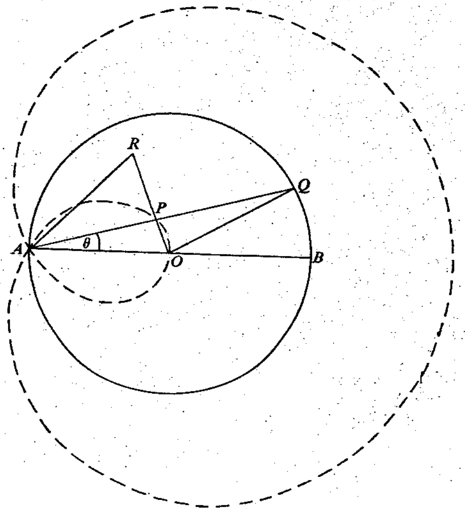
若以極坐標表示，則得蚶線的方程式為

$$r=2a\cos\theta+2b \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

當 $a=b$ 時，蚶線其實就是心臟線；而當 $a<b$ 時（亦即，A 點在圓 C 內部），蚶線不過 A 點，

其形狀像是把心臟線的尖點向外推出而得的；當 $a>b$ 時（亦即，A 點在圓 C 外部），蚶線的形狀才是封面圖中之形式，分成內外兩圈。除了原點之外，它與 x 軸的正方向還有兩個交點，即 $\theta=0$ 與 $\theta=\pi$ 所對應的點，而原點所對應的 θ 值爲 $\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$ 與 $2\pi-\cos^{-1}\left(-\frac{b}{a}\right)$。

封面右圖中的蚶線滿足 $a=2b$ 的條件，此種曲線另有一名稱是**三等分角曲線**（trisectrix），因爲這種曲線可用來將任意角三等分。在下圖中，$\angle BAR$ 是要三等分的角，我們把 B 及 R 點選成滿足 $\overline{AB}=2\overline{AR}=2a$，利用 a，$b\left(=\frac{a}{2}\right)$，$A$ 點，直線 AB（作爲 x 軸）作出一蚶線（實際上是三等分角曲線），設 O 是 $\overline{AB}$ 的中點，連接 $\overline{OR}$，若 $\overline{OR}$ 與蚶線的內圈交於 P，則 $\angle BAP$ 是 $\angle BAR$ 的三分之一。



當 $b>a$ 時，蚶線所圍的面積爲

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta\\
&=2\int_0^{\pi}2\left(a^2\cos^2\theta+2ab\cos\theta+b^2\right)d\theta\\
&=\left(2a^2+4b^2\right)\pi
\end{aligned}
$$

配合前面所求的心臟線所圍的面積，可知上面的公式當 $a=b$ 時也成立。

當 $a=2b$ 時，三等分角曲線的外圈所圍的面積爲

$$
\begin{aligned}
&2\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta\\
&=4\int_0^{\frac{2}{3}\pi}\left(a^2\cos^2\theta+a^2\cos\theta+\frac{a^2}{4}\right)d\theta=2a^2\pi+\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2
\end{aligned}
$$

而內圈所圍成的面積爲

$$2\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}\frac{1}{2}r^2d\theta$$

$$=4\int_{\pi}^{\frac{4}{3}\pi}(a^2\cos^2\theta+a^2\cos\theta+\frac{a^2}{4})\,d\theta$$

$$=a^2\pi-\frac{3}{2}\sqrt{3}\,a^2$$

因此，內外兩圈之間的面積爲 $a^2\pi+3\sqrt{3}\,a^2$ 。 □

科教簡訊

中小學科學教育年終檢討會獲得九項結論

七十一年度中小學科學教育年終檢討會於八月二十四日上午在教育部舉行，會議由部長朱匯森主持，出席人員有教育部有關司、室，省市教育廳、局，科學教育館，教育資料館及本中心等單位主管。

會中檢討過去一年推展科學教育業務的成效，作爲以後改進的依據。會中獲得下列結論：

(一) 希各級政府參照業務發展及物價指數逐年增加科教經費以加強擴大科學教育措施提高科學教育水準。

(二) 新編高中自然科學課程實驗教材正由中正預校實驗中，仍需繼續實驗修訂，在教師尙未充分瞭解此項教材特性及所需教具尙未能充分配合製作前，暫緩普遍使用，並希利用各種機會及方法對此項新教材特點予以報導說明，俾增進社會大衆之了解，以減少將來使用時不必要之困擾，另爲求新教材之妥善，可再選部分高級中學進行試驗及修訂，以利將來普遍實施。

(三) 中等學校課程標準將分別修訂，希納入科技新知，以配合時代需要，惟有關科技常識之納入，要特別顧及學生之吸收能力。在未修訂前，可應用補充教材，以資彌補。

(四) 科學教師出國考察，學生研習活動及獎勵等工作非常重要，應繼續加強辦理。辦理學生研習活動要注意培養其研究興趣及創造能力，並與相關學科相配合。科教考察人員的建議事項，應予重視，可採行者應即研究採行。

(五) 幼稚園推行科學教育頗有成效，希繼續加強辦理，並希妥編教材，輔導教師使用。

(六) 圖書、儀器對推行科學教育非常重要，有關設立製作供應中心之建議，請中教司積極研究其可行性及具體辦法。

(七) 改進科學教學評量方法，研究改進入學考試命題辦法，以導引學校教學正常化。

(八) 有關研訂科學資優學生輔導辦法，各方建議很多，希歸納整理並邀請學者專家研訂草案，以便辦理資優學生輔導。

(九) 經實驗良好之教材、教法、教具應充分推廣利用，並應評量其使用之成效。