教育部委辦高級中學數學及自然科學課程改進計畫

各科試用教材摘介(五)

本中心

本中心接受教育部委辦國中、高中、技職學校數學及自然科學課程改進計畫，邀請國內各大學教授一百二十多位、中學教師四十多位，在教育部科學教育指導委員會主任委員吳大猷先生及各位指導委員、暨諮詢委員指導下，進行編寫各有關課程之教科書、教學指引、實驗手册、實驗活動本等試用教材。

數年來，各分項計畫分別依原定時間編寫完成有關教材，並順利地在教育部及廳局指定之學校進行試教。茲以本中心編印之試用教材，將提供教育部做爲將來修訂各有關學校科學課程之參考，而科學教育事關國家大計與萬千學子之修習發展，爲求集思廣益，乃請各計畫編輯小組，就所編各科試用教材教科書中各擷取一章，藉本中心發行之科學教育月刊逐期分科摘介，提請教育界先進及同仁就其內容及編寫方式惠予指教，以做爲修訂之參考。

本期刊登之內容，係高二物理中之一章。

高二物理

第七章　功、動能、位能

功、動能、位能

第四章和第五章敍述了牛頓的三個運動定律，並由之導出動量守恆定律。本章將引入動能、位能和功的觀念，並導出力學能量守恆定律，可以說完成了動力學的基礎了。

Ⅶ-1 「功」的定義

在力學中，「功」是一個有確切意義的物理量，「功」(work)的定義是：

功＝力和施力的方向所經的位移的乘積。

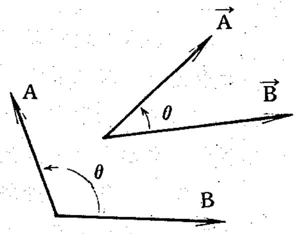
例如施一力$\vec{F}$(於一物體)，使(物體的)位移爲$\Delta\vec{S}$。$\vec{F}$與$\Delta\vec{S}$兩向量的夾角爲θ，則功的定義爲

$$W = F\Delta S\cos\theta 。\qquad (Ⅶ\text{-}1)$$

我們定義兩向量$\vec{A}$和$\vec{B}$的「內乘積」爲

$$\vec{A}\cdot\vec{B} \equiv AB\cos\theta ,\qquad (Ⅶ\text{-}2)$$

式中同爲A與B的夾角〔見圖(Ⅶ-1)〕，A爲$\vec{A}$的量値，B爲$\vec{B}$的量値。故$\vec{A}\cdot\vec{B}$係一純量，不是向量。



圖(Ⅶ-1) 兩向量的"內乘積" $\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$

按此定義(Ⅶ-2)，功的定義乃可寫成下式

$$W = (\vec{F}\cdot\Delta\vec{S}) 。\qquad (Ⅶ\text{-}3)$$

如力的方向與位移的方向垂直，則此力無論量値多大，它的「功」仍爲零。例如一物體在光滑水面滑動，物體所受的重力(地心引力)所作的「功」爲零。

又如人以大力高舉一靜止的重物，則力雖大，因$\Delta S = 0$，此力仍未作「功」。

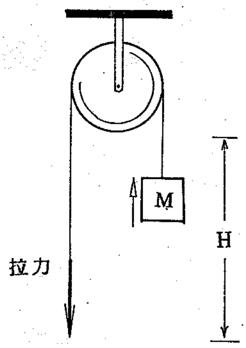
按定義(Ⅶ-3)，當一質量爲M(公斤)的物體，由高度爲H(公尺)處自由降落地面，則重力(地心引力)所作的「功」爲

$$W = MgH ,$$
$$= 9.8\ MH \text{牛頓}\cdot\text{公尺}。$$

現定義功的單位：一牛頓之力與在同一方向作一公尺的位移的乘積爲功的單位，稱爲一焦耳(joule)。故上式爲

$$W = 9.8\,MH \text{焦耳}。$$

如我們用一滑輪。見圖(Ⅶ-2)，將一質量爲M公斤的物體，慢慢的拉升一垂直高度H公尺，則拉力務須稍微大於重力Mg故此拉力作了功W，



圖(Ⅶ-2)

$$W = 9.8\ MH \text{焦耳}。$$

上文的「慢慢」兩字的意義，是因爲避免在作功MgH之外，獲得一速度U。如有速度，則需給予物體以動能$\frac{1}{2}MU^2$(見下文節Ⅶ-3、Ⅶ-4)。

Ⅶ-2　動能與位能

在物理學中，「能」（energy）或「能量」是有確定意義的物理量。上節曾作了「功」的定義，現在我們定義「能」爲可以作「功」的物理量。由這個定義我們已見「能」和「功」是同「因次」「同類」的物理量；「能」可以作「功」—— 換言之，「能」可以變成「功」。

如「能」的定義是"可以作「功」的物理量"，則這隱含了"可以有許多形式的「能」"，在本課程中我們將知道確有許多形式的「能」，現先引入兩種形式的「力學能」。

Ⅶ-2(1)　動能與位能的定義

A. 設由地面上高H處，使一質量爲M的物體自由下落一距離 Δz。由定義（Ⅶ-3）式，重力所作的「功」爲

$$\Delta W = Mg\Delta Z \qquad (Ⅶ-4)$$

因重力加速度g係一常數（在地面高度H不大的範圍內），物體自高度H下落至地面時，重力所作的「功」爲

$$W = MgH。 \qquad (Ⅶ-5)$$

按第二章（Ⅱ-21）式，物體M以等加速度g行經距離H後，其速度V符合下式

$$\frac{1}{2}V^2 = gH, \qquad (Ⅶ-6)$$

如乘兩方以M，即得

$$\frac{1}{2}MV^2 = MgH。 \qquad (Ⅶ-7)$$

由（Ⅶ-5）、（Ⅶ-7）二式，得見物體M所受的重力Mg所作之「功」MgH，等於一個量值爲 $\frac{1}{2}MV^2$ 的物理量。

B. 現由地面給予物體M以向上的速度V。再按第二章（Ⅱ-21B）式，該物體以減速度g（即負的加速度）行進，其速度由V減至零時，所經距離H爲 $H = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g\left(\frac{V}{g}\right)^2$。由此得

$$gH = \frac{1}{2}V^2 \qquad (Ⅶ-8)$$

故該物體可上昇達到的高度，與（Ⅶ-6）下落的H相同。

我們可以採取下述的觀點：

物體固有速度V，便可以上昇至高度H，到H高度時，物體即停止，此後物體將可藉其下墜而作「功」$W = MgH$，如（Ⅶ-5）式。故物體由於其有速度V，便有「能」$\frac{1}{2}MV^2$，可作 $MgH = \frac{1}{2}MV^2$

的「功」。

因此我們可以說物體有了「$\frac{1}{2}MV^2$」的物理量，便可以作「MgH」的功。按「能」的定義，這$\frac{1}{2}MV^2$是一種「能」。

由(Ⅶ-5)式，得見物體M由於它在地心引力場的位置(高於地面H處)，具有可以作「功」MgH的「能」，故我們定義MgH為物體M在重力場(高度為H)的「位能」(Potential energy)。

由(Ⅶ-8)式，得見質量為M的物體由於它的速度V，具有可以作「功」MgH的「能」，故我們定義$\frac{1}{2}MV^2$為物體M有速度V時的「動能」(kinetic energy)。

「位能」與「動能」，皆稱為「力學能」(mechanical energy)。(有些書用「機械能」的名稱，但「力學能」較妥)。

設在上第Ⅶ-2(1)A.節中的物體，由高H自由下墜距離(H－Z)至高Z處，則按(Ⅶ-7)式其速度U為

$$\frac{1}{2}MU^2 = Mg(H-Z)。 \qquad (Ⅶ\text{-}9)$$

設在上第Ⅶ-2(1)B節中，由地面以速度V拋M至高度Z處，其速度由V減至U值，

$$\frac{1}{2}MU^2 = \frac{1}{2}MV^2 - MgZ^* \qquad (Ⅶ\text{-}10)$$

Ⅶ-3 力學能之守恆

由上節的(Ⅶ-7)、(Ⅶ-8)、(Ⅶ-9)、(Ⅶ-10)各式，一質量為M的物體在下墜或拋上時的位能及動能，可總合表列如下頁：

由下表，得見一關係；在任何高度z(由z＝0至z＝H)，

$$動能+位能=常量 \qquad (Ⅶ\text{-}11)$$

$$\frac{1}{2}MU^2 + Mgz = 常量,$$

$$= MgH = \frac{1}{2}MV^2 \qquad (Ⅶ\text{-}12)$$

這關係謂在地面上的重力場中，一物體的總「能」(位能與動能之和)為一常量。表中首(橫)行的箭向表示在下墜時，位能轉變為動能；在上昇時，動能轉變為位能。但在運動中二者之和不變。

---

*註：使t為由地面上昇至高Z處所需的時間，則$U = V - gt$，及$Z = Vt - \frac{1}{2}gt^2$，見第二章第(Ⅱ-19)和(Ⅱ-20)式。由此二式消去t，即得(Ⅶ-10)。

表（Ⅶ-1）

高度	物體運動態	下落時 位能 → 動能		上拋時 動能 → 位能	
H	靜止	MgH	0	0	$MgH=\frac{1}{2}MV^2$ （Ⅶ-8）式
Z	速度U	MgZ	$\frac{1}{2}MU^2$ $=Mg(H-Z)$ （Ⅶ-9）式	$\frac{1}{2}MU^2$	$MgZ=\frac{1}{2}MV^2-\frac{1}{2}MU^2$ $=\frac{1}{2}M(V^2-U^2)$ （Ⅶ-10）式
0	速度V	0	$\frac{1}{2}MV^2$ $=MgH$ （Ⅶ-1）式	$\frac{1}{2}MV^2$	0

這是「力學能的守恆定理」。我們之所以稱之為「定理」者，係因為（Ⅶ-13)式，乃可以由物體的等加速運動定律導出來的。我們將來會知道這個守恆關係，是一個廣義的普遍性的「守量守恆定律」的一個特例。廣義的能守恆定律，是包括力學能以外的其他形式的「能」，如熱能、化學能、電能、核能等。

我們務須注意下一點：（Ⅶ-13)式的「守恆定律」，係指在“均匀重力場”（等加速度 g ）下的情形。如高度H不限於幾百公尺而可達到幾百公里，則重力場不是均匀的而是遵守牛頓萬有引力反平方定律的；（Ⅶ-13）式中的 g ，須代以高度 Z 函數的 g(Z)

$$g(Z)=\left(\frac{R}{R+Z}\right)^2 g_0 \qquad (\text{Ⅶ-13})$$

R是地球半徑，g_0 是在地面（$Z=0$）的重力加速度之值。見第六章Ⅵ-2(2)節例(1)，g(Z) 的方向是向地心的。

在 g(Z)沿 Z 改變的情形下〔如（Ⅶ-14）式〕，Mg 重力經位移 ΔZ所作之「功」為

$$\Delta W=Mg(Z)\Delta Z$$

求此力Mg(Z)經由 $Z=0$ 到 $Z=Z$ 所作之功，乃係求下列的和之極限值

$$\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{i=1}^{N} Mg(Z_i)\Delta Z\ ,\ \Delta Z=\frac{Z-0}{N},$$

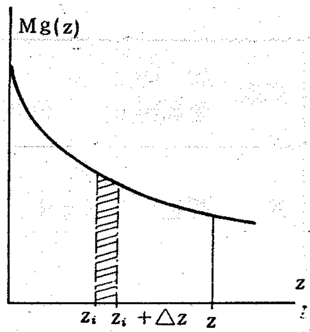
此式是圖（Ⅶ-3）Mg（Z）曲線下，在 $Z=0$ 至 $Z=Z$ 兩垂線間的面積。

我們以 $V(Z)-V(0)$ 代表力 Mg(z)在 $Z=0$ 至 $Z=Z$ 所作的功，

$$V(Z)-V(0)=\lim_{\Delta Z\to 0}\sum_{i=1}^{N} Mg(Z_i)\Delta Z \qquad (\text{Ⅶ}-14)$$

這個式代替了(Ⅶ-5)式的 $W=MgH$,(如 $g(Z_i)$ =一常數 g,則(Ⅶ-14)式的右方即簡化為 MgH)。

我們定義 $V(Z)-V(0)$ 為質量 M 在 Z 點的位能(以地面作起點計算)。故在反平方引力場的情形下,力學能守恒定理成為下式



圖(Ⅶ-3) 力 Mg(z) 所作之功,等於 Mg(z) 曲線下的面積。

$$\frac{1}{2}Mv^2+V(Z)-V(0)=\text{常數},\ V(0)=\text{定值}。$$

或
$$\frac{1}{2}Mv^2+V(Z)=\text{常數} \qquad (\text{Ⅶ}-15)$$

上述的「力學能守恆」是純就力學能而言。如有摩擦阻力,則有熱能產生。(Ⅶ-15) 式就不再成立了。

例 VII-1:

我們再看第五章第 V-2(1)節的例 V-2,〔第(V-18)及(V-19)式〕。

(A) 設兩個質點 m_1 及 m_2,其速度各為 $\vec{v}_1(v_{1x},v_{1y})$,$\vec{v}_2(v_{2x},v_{2y})$,碰撞後速度變為 $\vec{u}_1(u_{1x},u_{1y})$,$\vec{u}_2(u_{2x},u_{2y})$,括弧中的 (u_{1x},u_{1y}) 等係在一正交坐標系中的分量。

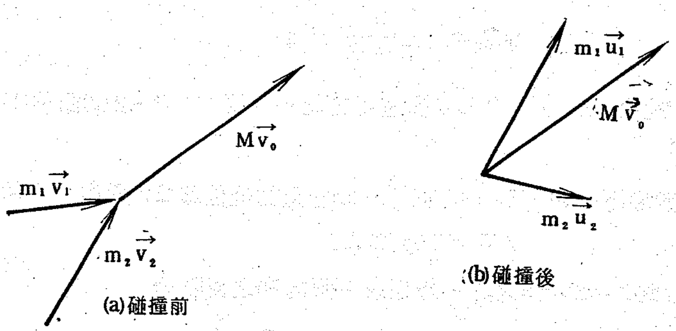
按動量守恆定理(第五章(V-18)式)。

$$m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{u}_1+m_2\vec{u}_2 \qquad (\text{Ⅶ}-16)$$

或寫成分量式

$$m_1v_{1x}+m_2v_{2x}=m_1u_{1x}+m_2u_{2x},$$
$$m_1v_{1y}+m_2v_{2y}=m_1u_{1y}+m_2u_{2y}。 \qquad (\text{Ⅶ}-17)$$

由(Ⅶ-16)式,得見兩質點的質心的速度 $\vec{v}_0$ 不變。這情形可以圖(Ⅶ-4)表之,



圖(Ⅶ-4) $M=m_1+m_2$

動能守恆定理,現乃係下式,

$$\frac{1}{2}m_1(v_{1x}^2+v_{1y}^2)+\frac{1}{2}m_2(v_{2x}^2+v_{2y}^2)$$

$$=\frac{1}{2}m_1(u_{1x}^2+u_{1y}^2)+\frac{1}{2}m_2(u_{2x}^2+u_{2y}^2) \qquad (\text{Ⅶ-18})$$

由(Ⅶ-17)和(Ⅶ-18)三個方程式，我們不能確定(u_{1x}, u_{1y}, u_{2x}, u_{2y})四個未知數。這情形相當於在圖(Ⅶ-4)(b)中，$M\vec{v_0}$是固定的量，但可以有無數對的($m_1\vec{u_1}$, $m_2\vec{u_2}$)，構成以$M\vec{v_0}$爲爲對角線的四邊形。

(B) 如在上例(B)中，兩質點的運動，碰撞前後皆在同一直線上，則(Ⅶ-17)，(Ⅶ-18)式便簡化爲

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1u_1+m_2u_2=\text{常數} \qquad (\text{Ⅶ-19})$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m_1u_1^2+\frac{1}{2}m_2u_2^2 \qquad (\text{Ⅶ-19A})$$

〔在(Ⅶ-19)式中U、V等是代數值，在正負值而非向量)，由(Ⅶ-19)式卽得

$$m_1(u_1-v_1)=-m_2(u_2-v_2)。$$

由(Ⅶ-19A)式，卽得

$$m_1(u_1^2-v_1^2)=-m_2(u_2^2-v_2^2)$$

由此二式，卽得

$$u_1+v_1=u_2+v_2$$

或

$$(u_2-u_1)=-(v_2-v_1) \qquad (\text{Ⅶ-20})$$

這是一個極重要的關係，謂兩質點1和2碰撞後的相對速度，等於碰撞前的相對速度的負值。

(Ⅶ-20)式關係，是用“質點”導來的。質點是沒有內部結構的複雜特性的，它是遵守“力學能守恆”定理的。在實際的物體則不然；它們在碰撞時，會被壓縮而變形(如一個橡皮球，甚至一個鋼球亦然)，碰撞後又會恢復原形。這便引入了「彈性」的觀念。我們將在下節講“彈性”。(Ⅶ-20)式將成爲“彈性”的一個測定或區別準則。

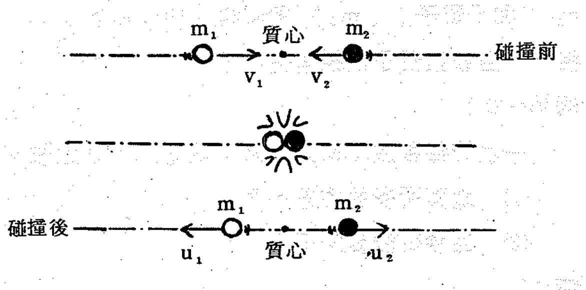
(C) 如在上(B)情形下，採取質心坐標系(兩質點的總動量等於零)，則(Ⅶ-19)式成

$$m_1v_1+m_2v_2=0, \qquad m_1u_1+m_2u_2=0$$

以此代入(Ⅶ-19A)式並利用(Ⅶ-20)式，卽得

$$|v_1|=|u_1|, \quad |v_2|=|u_2|$$

此謂$\vec{u_1}$的量值與$\vec{v_1}$的等，$\vec{u_2}$ 的量值與$\vec{v_2}$的等，其結果有如碰撞使$\vec{v_1}$與$\vec{v_2}$同時轉了一個角ϑ，見圖(Ⅶ-5)。



圖(Ⅶ-5)在質心坐標系中兩質點的碰撞

例Ⅶ-2：

一質量爲m的質點以速度v_0與原爲靜止的質量爲M的質點碰撞，求碰撞後m和M的速度。

解：

使m和M之速度爲v和V；二者質心的速度爲U。U值守恒不變，故

$$U=\frac{mv+MV}{M+m}=\frac{mv_0}{M+m} \qquad (\text{Ⅶ}-21)$$

由能守恆定律，即得

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv_0^2 。 \qquad (\text{Ⅶ}-22)$$

由(Ⅶ-21)式得

$$MV=m(v_0-v),$$

由(Ⅶ-22)式得

$$m(v_0^2-v^2)=MV^2 。$$

由此二式，可得

$$v=\frac{m-M}{M+m}v_0,$$

$$V=\frac{2m}{M+m}v_0 。$$

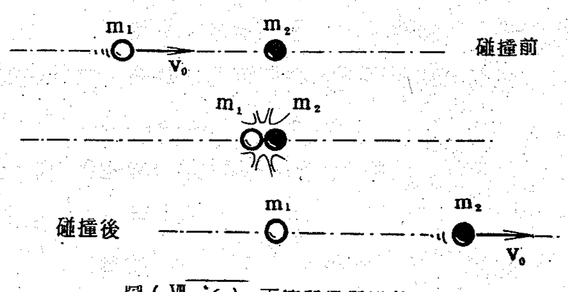
由此二式，可得m傳給M的動能爲

$$\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}MV^2=\frac{4mM}{(M+m)^2}\left(\frac{1}{2}mv_0^2\right) \qquad (\text{Ⅶ}-23)$$

故傳給M的最大的能量是當M＝m的情形。如M＝m，則

$$\frac{1}{2}MV^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

換言之，如m_1與一靜止的m_2碰撞，且$m_2=m_1$，則m_1將其全部動能給予m_2，m_1自身將靜止了，見圖(Ⅶ-6)。這是一個有重要實際應用的特例(如1932年美國物理學家Chadwick發現「中子」的實驗中，「中子」(圖中的m_1)和「質子」(m_2)的碰撞，中子將質子撞出，由觀察質子而推論得中子。)



圖(Ⅶ-6)　兩等質量質點的碰撞

例Ⅶ-3：

一水管每秒放出M公斤水，垂直流下H距離。問

(1)　地面所受的力若干？

(2)　每秒得能量若干？

解：

(1)　水流下H公尺時之速度v〔按(Ⅶ-6)式〕，爲

$$v=\sqrt{2gH}$$

每秒流下的水量爲M公斤。按牛頓第二定律，地面所受之力，乃動量時變率 Mv，即

$$Mv = M\sqrt{2gH} \text{ 牛頓}$$

(2) 每秒流下水的質量爲M，故其所作之「功」的時率，按（Ⅶ-5）式，爲

$$W = MgH \text{焦耳／秒。（注意：M係公斤／秒）}$$

例 Ⅶ-4：重力場的位能

一行星，質量爲m，於一圓周繞太陽運行，太陽與行星間的相互作用力乃牛頓的萬有引力，試求行星的動能及位能。（假定太陽的質量極大，故可視爲一固定中心）。

解：

(1) 太陽與行星間的引力，提供了使行星作圓周運動所需的向心力。如行星軌道半徑爲R，速率爲v，則

$$\frac{GMm}{R^2} = \frac{mv^2}{R}$$

故行星的動能爲

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2R} \text{。} \qquad (Ⅶ\text{-}24)$$

動能永係正值的。

(2) 欲不用積分法求位能，可計算如下：我們先將結果寫下，再證明其爲正確的。

$$\text{位能} V(R) = -\frac{GMm}{R},$$

此值是以無限遠處（$R\to\infty$）爲位能的零點計算。故此係一負值。距太陽愈近，則位能愈低。

證：

沿半徑方向，取距太陽爲R及R＋ΔR的二點。按位能的定義，由R＋ΔR 點下墜至R點，太陽重力F所作之功，等於位能在兩點之差〔見（Ⅶ-14）式〕。

$$-F\,\Delta R = V(R+\Delta R) - V(R)\text{。}$$

左方的負號，係因F的方向係向中心，而R向外增大，故ΔR係向外的。由（Ⅶ-25）式。

$$-F\,\Delta R = -\frac{GMm}{R+\Delta R} - \left(-\frac{GMm}{R}\right)$$

$$= -\frac{GMm}{R(R+\Delta R)}\left[R-(R+\Delta R)\right]$$

$$= \frac{GMm}{R^2}\Delta R \text{，（如}\Delta R\text{遠小於}R\text{）} \qquad (Ⅶ\text{-}26)$$

故在距太陽R處，太陽重力$\vec{F}$爲

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{R^2} \text{（向太陽）} \qquad (Ⅶ\text{-}27)$$

這正是牛頓的反平方定律，故（Ⅶ-25）式是正確的。

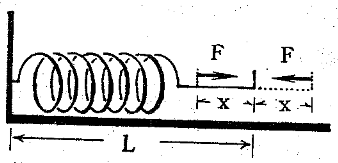
由（Ⅶ-24）及（Ⅶ-25）式，得到下面的重要關係：在反平方引力場的圓形軌道中，動能是位能量值（絕對值）的二分之一，即

$$\frac{1}{2}mv^2=-\frac{1}{2}V(R)。 \qquad (Ⅶ\text{-}28)$$

這是一個很重要的結果，它在電場（氫原子中的核與電子間的庫倫反平方引力）亦同樣的有效。它在反平方引力場的橢圓軌道中，平均動能和平均位能亦符合（Ⅶ-28）式。

例 VII-5：彈簧的位能

一個彈簧的平衡長為L，如由L扯長為L＋x，則彈簧的收縮力與x成正比；如由L壓縮至L－x，則彈簧的伸張力亦與x成正比，見圖（Ⅶ-7），求彈簧端上一質量m的位能和動能。



圖（Ⅶ-7）

解：

彈力F與長度的改變x有虎克的經驗定律。

$$F=-kx。 \qquad (Ⅶ\text{-}29)$$

式中負號乃表示：當x＞0時，F的方向係使x減小；當x＜0時，F的方向係使彈簧增長，換言之，F的方向，永係與長度改變的方向相反。

欲計算位能V(x)（以x＝0處的位能V(0)為零）而不用積分法，我們先假定。

$$V(L+x)=\frac{1}{2}kx^2, \qquad (Ⅶ\text{-}30)$$

再證明其正確性。

由位能的定義〔用（Ⅶ-5）式〕，V由長＝L＋x＋Δx與L＋x之差，是彈力F所作之功。

$$V(L+x+\Delta x)-V(L+x)=-F\Delta x。$$

右方的負號，乃因力F的方向與x方向相反之故，見圖（Ⅶ-7）。由（Ⅶ-29）式，

$$-F\Delta x=V(L+x+\Delta x)-V(L+x)$$

$$=\frac{k}{2}[(x+\Delta x)^2-x^2]$$

$$=k[x\Delta x+\frac{1}{2}(\Delta x)^2]$$

$$=kx\Delta x,（因\Delta x遠小於x）$$

故

$$F=-kx。$$

這正與（Ⅶ-29）式相符。這證明（Ⅶ-30）式的正確。欲求動能，我們用力學能守恆定律。

動能＋位能＝常數＝W。

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=E \qquad (Ⅶ\text{-}31)$$

此常數E之值，可求之如下：設開始時彈簧伸長x_0，即當

$x=x_0$時，彈簧係靜止的，$v=0$，

則

$$E=\frac{1}{2}kx_0^2\text{。}$$

如當彈簧回到平衡長度 L（即 $x=0$）時，質點的速度 $v=v_0$，則

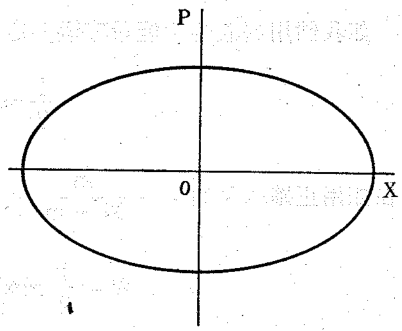
$$\frac{1}{2}mv_0^2=E=\frac{1}{2}kx_0^2\text{。}$$

由（Ⅶ-31）式，可見動能與位能互作消長，二者之和恆等於開始時的 E 值。

如引入動量 $P=mv$，則（Ⅶ-31）式可變為

$$\frac{p^2}{2m}+\frac{k}{2}x^2=\frac{k}{2}x^2=W \qquad (Ⅶ\text{-}32)$$

按此方程式，p 與 x 的曲線是一橢圓，如圖（Ⅶ-8）。每改變開始的 x_0（亦即開始時的能 W），即得另一橢圓。每一橢圓代表動能加位能守恆的一個運動（彈簧振盪）。



圖（Ⅶ-8） 橢圓曲線，見（Ⅶ-32）式

Ⅶ-4 彈性、摩擦力、力學能不守恆

我們取下舉的問題：

質量為 m 的槍彈，以速度為 v 平射入一置於光滑平面的靜止木塊，木塊的質量為 M。子彈射入木塊後即嵌入其中，試求木塊的速度 V。

1. 按動量守恆定律，即得

$$mv=(M+m)V$$

故嵌有子彈的木塊之速度為

$$V=\frac{m}{M+m}v\text{。} \qquad (Ⅶ\text{-}33)$$

2. 如取力學能守恆定律，則得

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2\text{.}$$

故

$$V=\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,v \qquad (Ⅶ\text{-}34)$$

這兩個 V 的結果，顯不相同。二者至少必有一是錯的。問題是：那一答案是正確的？

動量守恆定律，是牛頓第二和第三運動定律的直接結果。除非第二和第三定律有錯誤，否則（Ⅶ-33）式是正確的。

次一問題是：（Ⅶ-34）式是由力學能守恆定理得來的。如有錯誤，則錯誤來自何處？

答案是：子彈在木塊內停止了，表示子彈受到（子彈和木塊間的）摩擦力。這摩擦力F作了功W。如子彈在木塊內行經S後停止，又如摩擦力的平均值爲F，則

$$W = FS 。$$

此種功既非動能，亦非位能。由實驗得知，子彈射入一物體，使物體溫度增高。我們將（於本書第二册）知道這功轉變爲熱能。

如我們用廣義的「能量守恆」定律——包括了力學能和熱能，則（Ⅶ-34）式應代以

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + W 。 \qquad (Ⅶ\text{-}35)$$

現在如用正確的V值 $V = \frac{m}{M+m}v$，則可以計算產生了若干熱能W

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{M}{M+m}\right)mv^2$$

換言之，子彈和木塊的碰撞，將子彈原來的動能 $\frac{1}{2}mv^2$ 的 $\left(\frac{M}{M+m}\right)$ 分數，轉變爲熱能。

我們稱子彈和木塊的碰撞，爲“非彈性”碰撞。

由（Ⅶ-33）和（Ⅶ-34）二式，得見這兩個方程式是不能共存的。換言之，祇要子彈嵌入木塊，二者合而爲一，則碰撞必是“非彈性”的，力學能是不守恆的。

反過來說，Ⅶ-3節的例（Ⅶ-1B），是說如我們假定「動量守恆」（Ⅶ-19）式和「力學能守恆」（Ⅶ-19A）式的關係，則必得（Ⅶ-20）式的關係。如 m_1 碰撞前、後的速度（同在一直線）爲（v_1, V_1）；m_2 的爲（v_2, V_2），則（Ⅶ-20）式變爲

$$(V_2 - V_1) = -(v_2 - v_1)$$

這式可作爲“完全彈性”的必需條件。我們定義

$$-\frac{V_2 - V_1}{v_2 - v_1} = e \qquad (Ⅶ\text{-}37)$$

爲兩個物體的“恢復係數”（restitution coefficient）。如 $e = 1$，則物體係“完全彈性”。如 $e < 1$，則係“非彈性”。

上述的子彈和木塊的例子，$v_1 = v$, $V_1 = V$, $v_2 = 0$, $V_2 = V$。故

$$e = \frac{0}{v} = 0 ,$$

這是說子彈之嵌入木塊，係“完全非彈性”的碰撞。

我們日常的用語，說橡皮是“彈性”的。如取一橡皮球，使之下墜一橡皮地板上，量其前後的速度 v_1, V_1，計算恢復係數 e；以此結果與一鋼珠由鋼板反躍的結果比較，則發現鋼的 e 值，遠比橡皮的 e 爲接近於 1，換言之，鋼是很接近“完全彈性”。

我們在本書的前些章，一再用“質點”來代替“物體”，現在可以解釋一下了。第二章Ⅱ-1 節首段曾略說引用“理想化”質點的原因。現在可以申述那時未能提及的一點。

一個物體（以固體言），即堅硬如鋼，仍是有限度而非完全的彈性體。在碰撞時，它有變形（雖然可恢復它的形狀），在變形和恢復形狀時，物體內部的阻力（黏性力）將力學能（動能）的一部，轉變爲熱能。故實際的物體的運動，並不遵守力學能守恆的定律，問題是很複雜的。爲了闡明力學的基本原理，我們乃代“物體”以理想化的“質點”。“質點”是沒有“內部結構”的，使問題簡化許多。

我們當然不能永遠不講眞實物體而永用質點。但我們講固體的力學時，先引入一個理想化的“剛體”的觀念，仍然先避免由上述的“變形”所引致的“產生熱能”的複雜問題。

一個物體，除了質心的運動（見第四章 Ⅳ-5 節，第五章 V-2 節）外，還有（繞著質心）轉動的運動。爲了暫不引入“轉動”，故到此章爲止，我們都用“質點”的觀念。

例 VII-6：

一木球由一公尺高處墜至地面，回躍升至 10 公分，一橡皮球由同高下墜，回躍爲 60 公分。一鋼球由同高處下墜於鋼板上，回躍爲 80 公分。問木、橡皮及鋼的恢復係數各爲若干？

解：

$v_1 = 1$ 公尺，$v_2 = V_2 = 0$，

木 $v_1 = -0.10$ 公尺；橡皮 $V_1 = -0.60$ 公尺，

鋼 $V_1 = -0.80$ 公尺。

故木 $e = 0.10$，橡皮 $e = 0.60$；鋼 $e = 0.80$。

Ⅶ-5　功　率

在許多情形下，除了力所作的功外，我們還想知道作功的時率，即每秒所作的功。功率將以 P（Power）代之，故

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad (\text{Ⅶ}-38)$$

P 之單位，爲每秒作一焦耳之功。此單位稱爲瓦特（Watt）。

故

$$\begin{aligned} 1\text{瓦特} &= 1\text{焦耳}/\text{秒} \\ &= 1\text{牛頓公尺}/\text{秒} \end{aligned} \qquad (\text{Ⅶ}-39)$$

如火車的機車產生一個恆力 F（克服摩擦力和空氣阻力等所需的力），其速度爲 v，則機車的功率 P 爲

$$P = F\frac{\Delta S}{\Delta t} = Fv\text{。}$$

我們日常用電的電費計算法，是以「能」爲標準的。由於用電的功率隨時不同，故

$$\text{能量} = \text{功率} \times \text{時間}$$
$$= \sum_i \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_i \Delta t$$

通常電費的能量單位，爲「一千瓦特的功率」，用「時間一小時」——常稱爲“度”。

$$\text{電能量 } 1 \text{“度”} = 1 \text{ 千瓦特小時}$$

例 VII-7：

如某月某戶的用電量爲460度，問這是若干焦耳。這能量可舉1000公斤物體上升若干公尺？

解：

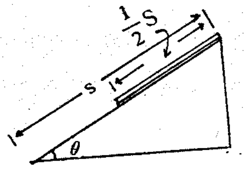
$$W = 460 \times 1000 \times 60 \times 60 \text{ 焦耳}$$

$$h = \frac{W}{1000 \times 9.8} = \frac{1656 \times 10^3}{9.8} \simeq 168 \times 10^3 \text{ 公尺。}$$

習　題

1. 下列何者作功爲零
   (A) 人造衞星繞地球一週，萬有引力對衞星作功
   (B) 單擺之張力對擺錘作功
   (C) 提皮箱走路作等速度運動
   (D) 手用力提重物100 kg，提1小時並未運動
   (E) 斜向拋物運動由初拋至落下，重力對物體作功
2. 一物體質量m由靜止受力大小 $F = kt$，與時間成正比，則最初t秒此力作功爲何？
3. 一彈簧長20公分，若施以20牛頓之力，可伸長至25公分，今施力於該彈簧使其由15公分之長度壓爲10公分之長度，則所需之功爲若干焦耳？
4. 一質子質量爲 1.6×10^{-27} 公斤，在一迴旋加速器中由靜止加速至末速率爲十分之一光速，則迴旋加速器中電力對質子加速所作的功爲若干焦耳？
5. 一均勻的鏈長 ℓ 質量m置於無摩擦之桌面上，其長度的 $\frac{1}{5}$ 懸於桌邊，將鏈的懸吊部分拉回至少須作功若干？
6. 汽船引擎功率爲6仟瓦，能使船以18公里／時等速行駛，則船所受阻力爲若干牛頓？
7. 質量2公斤之物體自高45公尺處自由落下，當其達地之瞬間功率爲若干瓦特？
8. 一人以 v_0 之初速滑雪，不愼撞入雪堆中，深入S且經t秒才停止，若雪堆加於人之平均阻力爲f，則人之質量爲何？
9. 在衝擊擺之實驗中，設子彈質量爲m，木塊質量爲M，且木塊的上升高度爲H，則在整個過程中，系統內能之變化量爲何？
10. 如圖(Ⅶ-9)：斜面長S，斜角 θ，一段均質繩長1/2 S質量m，上端與斜面平齊，放置於斜

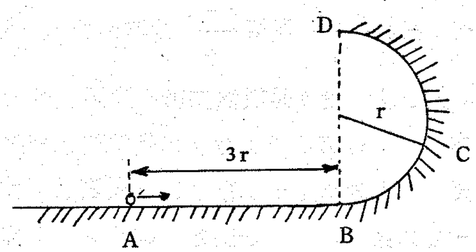
面任其自由下滑，假設不計摩擦，當繩索全部滑離斜面而達下方平面時之動能爲何？



圖（Ⅶ－9）

11. 一線性彈簧其力常數爲K，垂直懸掛一質量爲m之物體自下端掛上後，突然釋放則物體之最大動能爲何？

12. 如圖（Ⅶ-10）中，設平面AB與曲面BCD 均光滑，若欲使自A發射之小物體經B、C、D，各點後落回A點，則於A點發射小物體時其速度大小應爲若干？



圖（Ⅶ－10）

13. 密度爲 d_1 的球，自水面上h高處落入密度爲 d_2 的水中，已知 $d_2 > d_1$，若不計空氣及水的阻力，則此球落下的最大深度爲何？

14. 在一高度爲100公尺處將一質量爲1公斤的物體，用一100公分／秒的速度垂直向上拋射。問:

(A) 這物體之總機械能爲何？

(B) 在回落到地面時這物體之速度爲何？

15. 長爲 ℓ 之單擺二個，擺錘質量相等，二擺同懸於一點，其中一擺鉛直下垂，另一擺向一側舉高 h後釋放之，若二者間爲完全非彈性碰撞，則碰撞後共同質心升高若干？

16. 設地面上的重力場大小爲 g，地球半徑爲 r 時，自地面發射一質量爲m的人造衞星至距地面爲 r 高處使之作圓運動所需的功爲何？

17. 一衞星在距地面Re之處繞地球運動，若爲等速圓周運動且 g_0 爲在地面之重力加速度，Re 爲地球半徑，試求此衞星的動能，週期及軌道速率。

18. 人造衞星質量m，距地表 r 處作等速圓周運動，若地球質量M，萬有引力常數G，將此衞星改送到距地表2r 處作等速圓周運動，需再供給多少能量？

19. 球自H高處自由落下，反跳高度 h，則其恢復係數爲若干？

20. 質量m之球自距地面h高度自由落下，若其與地面間之恢復率爲 e，則當其達地反彈後損失之機械能爲若干？

21. 利用定滑輪以100克重之力提起80克重之重物作等速運動，當被提高50 公分時，已有若干功由於摩擦的消耗而損失？

22. 一物體自高為2公尺之光滑斜面上滑下，至底端以水平方向繼續運動，此時物體在水平面間摩擦係數為0.5，則木塊在水平面上滑行距離為若干公尺？

奇數階魔方陣構建方法之二

● 勇清 ●

下面所要介紹的方法，是Bachet de Meziriac 所發現的，其作法如下：設n表示階數，將數字1寫在中心的一格，即第$\frac{n-1}{2}$列第$\frac{n+1}{2}$行的位置。其次，當數字k已經填妥後，我們就六種情形來說明$k+1$的填法：設k是填寫在第i列第j行，

(1) 若k的右上方（即第$i-1$列第$j+1$行）仍是空格，則將$k+1$填在這一格；

(2) 若k的右上方（即第$i-1$列第$j+1$行）已經填寫了小於k的某個整數，而k的正上方第二格（即第$i-2$列第j行）仍是空格，則將$k+1$填在這一格；

(3) 若$i=1$而$j<n$，則將$k+1$填寫在第n列第$j+1$行的位置；

(4) 若$i>1$而$j=n$，則將$k+1$填寫在第$i-1$列第1行的位置；

(5) 若$i=1$而$j=n$，則將$k+1$填寫在第$n-1$列第n行的位置；

(6) 若$i=2$，$j<n$，而k的右上角已經填寫了小於k的某個整數，則將$k+1$填寫在第n列第j行。

利用這個方法所作出來的五階及七階魔方陣如下：

23	6	19	2	15
10	18	1	14	22
17	5	13	21	9
4	12	25	8	16
11	24	7	20	3

46	15	40	9	34	3	28
21	39	8	33	2	27	45
38	14	32	1	26	44	20
13	31	7	25	43	19	37
30	6	24	49	18	36	12
5	23	48	17	42	11	29
22	47	16	41	10	35	4