

$$\text{從 } 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$\text{到 } (1 + \frac{k}{k+1}\alpha)^{k+1} > (1 + \alpha)^k$$

台中市私立曉明女中

葉東進

一、楔 子

六十三年聯考出現了一道這樣的問題：

利用不等式 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$ 估計

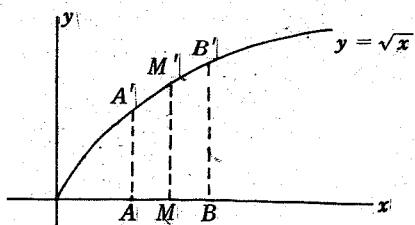
$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{10000}} \text{ 的值。}$$

有些人不免疑惑：這個不等式是怎麼來的？

底下試著分析：

$$\begin{aligned} 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) &< \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} &< \sqrt{n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{2} &< \sqrt{n} < \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2} \end{aligned}$$

考慮函數 $y = \sqrt{x}$ 的圖形：



(圖一)

在 x 軸上取點 A, M, B ，其坐標分別是 $n-1, n, n+1$ ，並令其在函數 $y = \sqrt{x}$ 的像點分別是 A', M', B' ，則有

$$\text{從 } 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \text{ 到 } (1+\frac{\alpha}{k+1})^{k+1} > (1+\alpha)^k$$

$$AA' = \sqrt{n-1}, MM' = \sqrt{n}, BB' = \sqrt{n+1}, \text{ 及}$$

梯形 $AMM'A'$, $MBB'M'$ 的中線分別是

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2} \quad \text{與} \quad \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}$$

由 $y = \sqrt{x}$ 遞增，知

$$\frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{2} < MM' = (\sqrt{n}) < \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}$$

上面的分析，顯示一件事：情：

一形一數之間可能有某種關係。

在一本有關國際數學競試集（註）上，看到這樣的問題：

$$\text{求 } \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{1,000,000}} \text{ 的和}$$

解答裡，它利用底下的不等式：

$$\frac{3}{2} [\sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{n^2}] < \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{3}{2} [\sqrt[3]{n^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}]$$

仔細觀察，便可發現這個不等式與前述的不等式在型式上有某種相似處，因而聯想歸納：

$$\frac{k+1}{k} [\sqrt[k+1]{(n+1)^k} - \sqrt[k+1]{n^k}] < \frac{1}{\sqrt[k+1]{n}} < \frac{k+1}{k} [\sqrt[k+1]{n^k} - \sqrt[k+1]{(n-1)^k}]$$

並臆測對一般的正整數 k ，它均成立。

上面的敘述是要顯示另一件事情：觀察、聯想歸納、臆測是數學的一種方法。

二、本 題

把上面臆測的不等式作如下的分析：

$$\begin{aligned} & \frac{k+1}{k} [\sqrt[k+1]{(n+1)^k} - \sqrt[k+1]{n^k}] < \frac{1}{\sqrt[k+1]{n}} < \frac{k+1}{k} [\sqrt[k+1]{n^k} - \sqrt[k+1]{(n-1)^k}] \\ \Leftrightarrow & \sqrt[k+1]{(n+1)^k} - \sqrt[k+1]{n^k} < \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[k+1]{n}} < \sqrt[k+1]{n^k} - \sqrt[k+1]{(n-1)^k} \\ \Leftrightarrow & \sqrt[k+1]{n^k} + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[k+1]{n}} > \sqrt[k+1]{(n+1)^k} \text{ 且 } \sqrt[k+1]{n^k} - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{\sqrt[k+1]{n}} > \sqrt[k+1]{(n-1)^k} \\ & \text{(兩邊除以 } \sqrt[k+1]{n^k} \text{)} \\ \Leftrightarrow & 1 + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n} > (1 + \frac{1}{n})^{\frac{k}{k+1}} \text{ 且 } 1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n} > (1 - \frac{1}{n})^{\frac{k}{k+1}} \\ \Leftrightarrow & (1 + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n})^{k+1} > (1 + \frac{1}{n})^k \text{ 且 } (1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n})^{k+1} > (1 - \frac{1}{n})^k \end{aligned}$$

因此，如果證明了

$$\begin{cases} \left(1 + \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \\ \left(1 - \frac{k}{k+1} \cdot \frac{1}{n}\right)^{k+1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k \end{cases}$$

便就證明了原先的臆測是正確的。

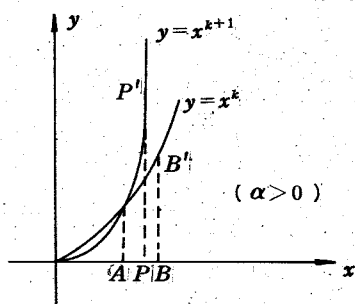
這裡，我們要證明的是更一般的情形：

$$\left(1 + \frac{k}{k+1} \cdot \alpha\right)^{k+1} > (1+\alpha)^k, \text{ 其中 } \alpha \neq 0, 1+\alpha > 0, k \in N$$

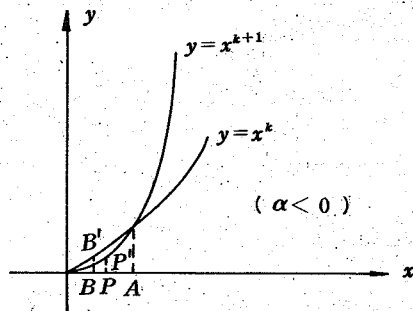
證明中，我們仍賴形數之間的關係來處理：

考慮函數 $f_n(x) = x^n, n \in N$

分別取 $n = k$ 及 $n = k+1$ ，得函數 $f_k(x) = x^k$ 及 $f_{k+1}(x) = x^{k+1}$ 在第一象限的圖形如下：



(圖二)



(圖三)

在 x 軸取兩點 A, B 其坐標分別為 1 及 $1+\alpha$ (如果 $\alpha > 0$ ，見圖二；如果 $\alpha < 0$ ，見圖三)，又考慮線段 AB 上的分點 $P, \overline{PA} : \overline{PB} = k : 1$ 及 P 在函數 $y = x^{k+1}$ 的

像點 P' ，則 P 的坐標為 $\frac{k(1+\alpha)+1}{k+1} = 1 + \frac{k}{k+1} \alpha$

而得 $\overline{PP'} = \left(1 + \frac{k}{k+1} \alpha\right)^{k+1}$ 及 $\overline{BB'} = (1+\alpha)^k$

我們將先證明：對任意正整數 k ，恒有 $\overline{PP'} \not\leq \overline{BB'}$

證明：
$$\overline{PP'} \leq \overline{BB'}$$

$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{k}{k+1} \alpha\right)^{k+1} \leq (1+\alpha)^k \quad (1+\alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{k\beta+1}{k+1}\right)^{k+1} \leq \beta^k \quad (\text{取 } 1+\alpha = \beta)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k\beta+1}{k+1} \leq \beta^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\text{從 } 2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}} < 2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) \text{ 到 } (1+\frac{k}{k+1}\alpha)^{k+1} > (1+\alpha)^k$$

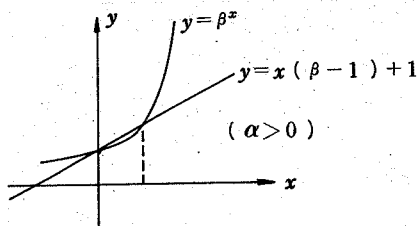
$$\Rightarrow h\beta + 1 - h \leq \beta^h \quad \left(\text{取 } \frac{k}{k+1} = h, \text{ 則 } 0 < h < 1 \right)$$

由上面的分析，知 h 是不等式：

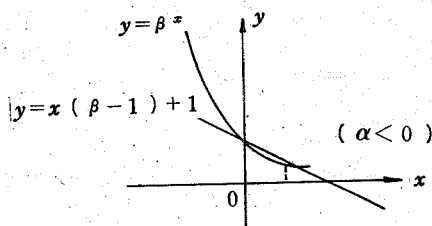
$$x(\beta-1)+1 \leq \beta^x \text{ 的一個正數解}$$

但是相關曲線 $y = x(\beta-1)+1$ 與 $y = \beta^x$ 僅有兩個交點 $(0, 1)$ 及 $(1, \beta)$

因而 $x(\beta-1)+1 \leq \beta^x$ 的正數解是 $x > 1$ (見圖四及圖五)



(圖四)



(圖五)

由於 $0 < h < 1$ ，便因此產生了矛盾。

故有 $\overline{PP'} > \overline{BB'}$

$$\text{即 } \left(1 + \frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1} > (1+\alpha)^k$$

三、後 記

在面對 $\left(1 + \frac{k}{k+1}\alpha\right)^{k+1} > (1+\alpha)^k$ 的證明這件事時，起初一直想用代數的方法來處理，

先考慮到如果是 $\alpha > 0$ 的話，那麼利用二項式定理將不等式兩邊分別展開比較應該可以證得，事實是如此；但是當 $\alpha < 0$ 時，證明上卻遭遇了困難，無法突破。之後，才有前面利用形數關係的證明的產生。在此，不妨也把剛剛所提的代數的方法的證明一併寫出，比較之後，也足以顯示形數關係的運用的威力。

$$\text{展開 } \left(1 + \frac{k}{k+1}\alpha\right)^k = 1 + C_1^{k+1} \frac{k}{k+1} \alpha + C_2^{k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 \alpha^2 + \cdots + C_{k+1}^{k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k+1} \alpha^{k+1}$$

$$(1+\alpha)^k = 1 + C_1^k \alpha + C_2^k \alpha^2 + \cdots + C_k^k \cdot \alpha^k, \quad \text{其中 } \alpha > 0$$

由底下的分析：

$$C_r^{k+1} \left(\frac{k}{k+1}\right)^r \geq C_r^k$$

$$\Leftrightarrow \frac{(k+1)!}{r!(k+1-r)!} \cdot \frac{k^r}{(k+1)^r} \geq \frac{k!}{r!(k-r)!}$$

$$\Leftrightarrow k^r \geq (k+1)^r - r(k+1)^{r-1}$$

$$\Leftrightarrow (rC_1^{r-1} - C_2^r)k^{r-2} + (rC_2^{r-1} - C_3^r)k^{r-3} + \cdots + (rC_{r-1}^{r-1} - C_r^r) \geq 0$$

及

$$rC_m^{r-1} - C_{m+1}^r \geq 0$$

$$\Leftrightarrow r \cdot \frac{(r-1)!}{m!(r-1-m)!} \geq \frac{r!}{(m+1)!(r-m-1)!}$$

$$\Leftrightarrow m! \leq (m+1)!$$

知

$$\left(1 + \frac{k}{k+1} \alpha\right)^k > (1 + \alpha)^k, \text{ 其中 } \alpha > 0$$

(註) 數學趣味問題競試集，徐氏基金會出版，吳英格譯。

特殊的魔方陣舉例 ● 勇清 ●

下面這個八階魔方陣的特異處是：(1)將各數改成它的平方時，所得的方陣仍是一個八階魔方陣，而每一列、每一行、每一對角線上的共同和是11180。(2)如果我們將這個魔方陣等分成十六個 2×2 階子方陣，則這十六個 2×2 階子方陣中每個對角線上兩數之和都等於65。

7	53	41	27	2	52	48	30
12	58	38	24	13	63	35	17
51	1	29	47	54	8	28	42
64	14	18	36	57	11	23	37
25	43	55	5	32	46	50	4
22	40	60	10	19	33	61	15
45	31	3	49	44	26	6	56
34	20	16	62	39	21	9	59

滿足上述性質(1)的魔方陣稱為雙重魔方陣。

在構建上面這個例子時，條件(2)與下面這個算術性質有很密切的關係：若 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 是不大於 n^2 的正整

數而且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{2}n(n^2 + 1)$ ，則

$$\sum_{i=1}^n (n^2 + 1 - a_i)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2, \text{ 因為}$$

$$\sum_{i=1}^n (n^2 + 1 - a_i)^2 = n(n^2 + 1)^2 - 2(n^2 + 1) \sum_{i=1}^n a_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n a_i^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$