Zeller曜日計算公式的研討與改進

林濟卿

國立臺灣教育學院數學系

本文主要在導出筆者的曜日計算改進公式

$$S = R_n - 2\left(H_R + \left[\frac{n}{4}\right]\right) + [\,2.6\,(M+1)\,] + D - 1 \qquad \text{（本文第(7)式）}$$

首先逐步的演導 Zeller 曜日計算公式

$$S = 5H + \left[\frac{H}{4}\right] + n + \left[\frac{n}{4}\right] + [\,2.6\,(M+1)\,] + D - 1 \qquad \text{（本文第(4)式）}$$

然後再繼續研討及導演筆者的改進式

一、在初學程式設計時最能引起學生興趣的一種題材是曜日計算，即解答某年某月某日是星期幾 的問題

（以下本文所述均爲公元年月日）

這個問題當然很容易解，所依據的祇不過是下面 4 條件：

1. 元年元旦是星期一。
2. 4 的倍數年是閏年。
3. 100 的倍數年是平年。
4. 400 的倍數年是閏年。

原理雖簡單但筆算起來却也相當的煩人，也是常叫小朋友頭痛的一則算術題，不過一旦設計編爲程式交給計算機算却能瞬卽顯示正確答案，頗能令人疑爲神技。

不過稍爲思考一下便能瞭解如果沒有閏年，曜日應是每一年增1日（因爲平年有365日），每四年、四百年因有一閏年，故應多增一個曜日，此示祇要能知道Y年M月D日比元年元旦多增幾個曜日，再求除以 7 的係數便是答案。於是很快就有下面的計算式：

$$S = Y + [\,Y/4\,] - [\,Y/100\,] + [\,Y/400\,] + M(m) + D - 1 \qquad (1)$$

再求　$S = x \mod (7)$　x 卽爲所求

$$[Y/a]=\text{int}(Y/a)=\frac{Y}{a}\text{的整數部分}$$

$M(m)$：1月至$(M-1)$月的總日數

例1　1982年3月29日是星期幾？

解：　$S=1982+495-19+4+59+29-1=2549$

$2549=1 \mod(7)$　∴　1982年3月29日是星期一

顯然(1)式尚有許多改進的餘地

設　$Y=100H+n$　代入(1)式

$$S=100H+n+[\frac{100H+n}{4}]-[\frac{100H+n}{100}]+[\frac{100H+n}{400}]+M(m)+D-1$$

$$=100H+n+25H+[\frac{n}{4}]-H+[\frac{H}{4}]+M(m)+D-1$$

∵　$124H=5H \mod(7)$ 故得

$$S=5H+[\frac{H}{4}]+n+[\frac{n}{4}]+M(m)+D-1 \qquad (2)$$

例2　1982年3月29日是星期幾？

解：　$H=19$　$n=82$

$$S=5\times19+[\frac{19}{4}]+82+[\frac{82}{4}]+59+29-1=288$$

$288=1 \mod(7)$　∴ 1982年3月29日是星期一

計算數值的確縮減不少，不過還有2點可以改進

1. M(m)的計算
2. Y年是否閏年，M月是否1，2月的判斷

因爲Y年若是閏年，則必須判斷M是否1，2月以便決定是否加上當年的閏日一天。

第一點衹要事先製備如下一表便可迎刃而解

表(一)

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	31	28	31	30	31	30	31	31	30	31	30	31	
$M(m)$	0	31	59	90	120	151	181	212	243	273	304	334	365
mod(7)	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	

實際所用到的祇是最後一欄mod(7)

表(二)

M	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
mod(7)	0	3	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5

例3　1982年3月29日是星期幾？

解：　$H=19$　$n=82$　$M=3$　$\therefore M(m)=3$

$S=95+4+82+20+3+28=232$

$232=1 \mod(7)$　星期一

第二點就較爲困難些

法人Zeller就把每年的基準月從1月移到3月，巧妙的避開了判斷Y年是否閏年，M月是否1，2月的問題。

也就是說Y年1，2月D日要先改爲（$Y-1$）年13，14月D日，再代入(2)式計算，當然表(二)也要稍爲修改

表(三)

M	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
mod(7)	3	6	1	4	6	2	5	0	3	5	1	4

例4　1980年2月1日是星期幾？

1980年3月1日是星期幾？

解：　1980年2月1日：$\because M=2$　$\therefore Y=1980-1=1979$。$M=14$再代入(2)式

$$S=5\times 19+\left[\frac{19}{4}\right]+79+\left[\frac{79}{4}\right]+4+1-1=201$$

$201=5 \mod(7)$　1980年2月1日是星期五

1980年3月1日：　$M=3$　$\therefore$直接代入(2)式

$$S=5\times 19+\left[\frac{19}{4}\right]+80+\left[\frac{80}{4}\right]+3+1-1=202$$

$202=6 \mod(7)$　1980年3月1日　星期六

Zeller更把表(三)定式化成爲

$$M(m)=[\,2.6(M+1)\,] \tag{3}$$

把(2)式改進爲

$$S=5H+\left[\frac{H}{4}\right]+n+\left[\frac{n}{4}\right]+[\,2.6(M+1)\,]+D+1 \tag{4}$$

於是不必製表(三)祇憑(4)式便可算出所要的解答的確令人感佩，這就是衆所周知的Zeller曜日計算公式，1882年提出至今仍爲一般人所沿用。

二、不過筆者認爲此式仍有改進的餘地

元年元旦爲星期一，以後每年增一個曜日數，每4年增五個曜日數，而一週有七個曜日數，所以應爲28年一小循環週期。

表㈣

元旦曜日				年			
1	2	3	4	1	2	3	4
6	0	1	2	5	6	7	8
4	5	6	0	9	10	11	12
2	3	4	5	13	14	15	16
0	1	2	3	17	18	19	20
5	6	0	1	21	22	23	24
3	4	5	6	25	26	27	28

由此表應可看出　1，29，57，85年元旦爲星期一

15，43，71，99年元旦爲星期四

4，32，60，88年元旦爲星期四

……………………

在1～99年間均爲4年一閏，故表㈣均爲有效。但到100年又還爲平年故表㈣失效，實際上101年爲星期六而不是星期日。

由⑵式前2項　$5H+[\frac{H}{4}]$　得知，H增1即Y增100年，S便要增加5個曜日數，H增2，3，S便要增加10，15個曜日數。故100，200，300年元旦應爲星期五，星期三，星期一，而在400年應增21個曜日數，故400年元旦爲星期六，401年爲星期一，還原與元年元旦相一致（請注意100，200，300年爲平年，400年爲閏年），可知曜日表以400年爲一大循環週期，而在每100年區段間則以28年爲一小循環週期。

現把以上所述逐步予以定式化，首先可把表㈣定式化爲

$$W=R_n-2\left[\frac{n}{4}\right]\qquad \mathrm{mod}(7) \tag{5}$$

$$R_n=\frac{n}{4}\text{的餘數}$$

⑸式當n爲4的倍數時計算結果就會多一天

如$n=4$：　$W=0-2\times1=-2=5\quad \mathrm{mod}(7)$

但查表㈣，4年元旦應爲星期四而不是星期五，這似乎是缺點，可是若把多出來的一天認爲是閏年應加上的閏天，就可配合 Zeller 關於月的定式⑷和解釋，而利用無誤，於是反而變成優點了。

既然知道曜日以400年爲一大週期，400的倍數年當可刪去祇考慮$H_R=\frac{H}{4}$的係數即可，因每百年增加5個曜日，故可把⑸式修正爲

$$W=5H_R+R_n-2\left[\frac{n}{4}\right]$$

$$=-2H_R+R_n-2\left[\frac{n}{4}\right] \quad \because \quad 5H_R\equiv-2H_R \quad \mathrm{mod}(7)$$

$$W=R_n-2\left(H_R+\left[\frac{n}{4}\right]\right) \tag{6}$$

再與(3)式配合

$$S=R_n-2\left(H_R+\left[\frac{n}{4}\right]\right)+\left[2.6\left(M+1\right)\right]+D-1 \tag{7}$$

即為筆者所欲導出的 Zeller 曜日計算公式的改進式，此式無須任何數表，單憑計算便可定出元年元旦以後的任意年月日的曜日。

例5　1982年3月29日　星期幾？

解：　$H=19 \quad n=82 \quad M=3 \quad D=29$

$H_R=\frac{19}{4}$的餘數$=3$　$R_n=\frac{82}{4}$的餘數$=2$

$S=2-2(3+20)+[2.6\times 4]+29-1=-6$

$-6\equiv 1 \quad \mathrm{mod}(7)$　星期一

1980年2月1日　星期幾？

解：　$\because M=2 \quad \therefore \quad M=14 \quad H=19 \quad n=79$

$S=3-2(3+19)+[2.6\times 15]+1-1=-2$

$-2\equiv 5 \quad \mathrm{mod}(7)$　星期五

筆者認為(7)式優於(4)式，應可取而代之，尤其是Y甚大時其優勢更為顯然。

例6　11335577年3月29日　星期幾？

解：　$H_R=3$　（祇計$\frac{55}{4}$的餘數便可）　$R_n=1 \quad \left[\frac{77}{4}\right]=19$

$S=1-2(3+19)+[2.6\times 4]+29-1=-5$

$-5\equiv 2 \quad \mathrm{mod}(7)$　星期二

輕而易舉筆算即可得解，但若代入(4)式，恐怕就沒有這麼容易。

由上列的推演可以看出，Zeller 可能忽略了兩點，第一曜日表以400年為一大週期，第二曜日表以28年為一小週期，不然以他達成表(三)的定式(3)式的洞察力，要推定(5)，(6)式應為舉手之勞才是。

三、應用

有了(7)式便可製定萬年曆，因為確定了某年元旦的曜日及該年是否閏年，便可印出該年全部的曜日表。

至於判斷某年是否閏年，當然可利用該年是否為4，100，400的倍數而予以判斷，但如果第(7)式已建立成為程式，也可利用它計算某年的2月29與3月1日是否同曜日而加以判斷，若是即為平年

，反之即為閏年，後法雖然有些本末顛倒的味道，但因判斷次數少，所以程式好設計，速度上比之前法也無何遜色。

例7 400年是否閏年？

解： 400年2月29日： $H=3$ $n=99$ $M=14$

$S=3-2(3+24)+[2.6\times15]+29-1=16=2 \quad \mathrm{mod}(7)$

400年3月1日： $H=4$ $n=0$ $M=3$

$S=0-2(0+0)+[2.6\times4]+1-1=10=3 \quad \mathrm{mod}(7)$

$2\neq3$ $\therefore$ 400年為閏年

278年是否閏年？

278年2月29日： $H=2$ $n=77$ $M=14$

$S=1-2(2+19)+[2.6\times15]+29-1=26=5 \quad \mathrm{mod}(7)$

278年3月1日 ： $H=2$ $n=78$ $M=3$

$S=2-2(2+19)+[2.6\times4]+1-1=-30=5 \quad \mathrm{mod}(7)$

$5=5$ $\therefore$ 278年是平年

200年是否閏年？

200年2月29日： $H=1$ $n=99$ $M=14$

$S=3-2(1+24)+[2.6\times15]+29-1=20=6 \quad \mathrm{mod}(7)$

200年3月1日 ： $H=2$ $n=0$ $M=3$

$S=0-2(2+0)+[2.6\times4]+1-1=6 \quad \mathrm{mod}(7)$

$6=6$ $\therefore$ 200年是平年

紙上計算似乎很繁，其實計算機瞬間即可完成，曜日表的印出當然可以一邊計算，一邊印出。其實曜日表有元旦為星期一，……，星期日七種，每種又有平、閏年之分別，總共才有14種而已，吾人可事先精心設計好每一種的精美型式曜日表存記在如磁碟等記憶體上，應用時只須判斷所指定年為此14種的那一種，便可予以迅速印出。 □

註：雖然觀點有異，但殊途同歸，彰化頂番國小老師張明章也曾整理得出本文(6)式相似結果。

[見 數學傳播第五卷第二期(70年6月) P. 40"有關週日問題換算公式的研究"]