

物體在楔形木塊上滑行引起的相對運動

李 偉

國立臺灣師範大學附屬中學

在最近的高中物理教學中，物體在楔形木塊斜面的滑行問題相當熱門⁽¹⁾。此問題原係大專教材⁽²⁾⁽³⁾，能訓練學生作嚴密的思維，但若提前至高中教學時討論，對高中學生而言，此問題因涉及相對運動，動量守恒與能量守恒觀念的靈活運用，並非一蹴可及。本文的目的在闡明，分析此種問題時應注意的觀念，期望能對教學有所幫助。

將物體 m 置於楔形木塊 M 的斜面上，設 m 與 M 及 M 與水平地面間皆無摩擦，則當 m 自 h 高處自由下滑時， m 與 M 因相互作用而有相對運動的現象。 m 向斜面底端滑行，而 M 向另側平移，故討論此類問題時，應自相對運動著手。

圖(1)顯示物體 m 位於楔形木塊 M 的斜面上，設 m 自由下滑至斜面底端時， m 對 M 的相對速度為 $\vec{v}_{mM}$ ， M 對實驗室座標（即水平地面）的速度為 $\vec{v}_M$ ，則 m 對實驗室座標的速度為

$$\vec{v}_m = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

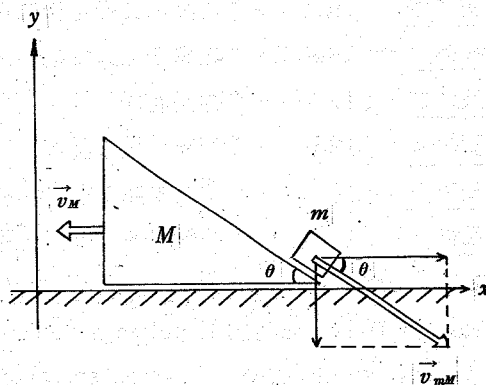
式中 v_x 及 v_y 為 $\vec{v}_m$ 在 x 軸及 y 軸方向的分量

$$\begin{cases} v_x = v_{mM} \cos \theta - v_M \\ v_y = -v_{mM} \sin \theta \end{cases}$$

於實驗室座標中，此系統因水平方向未受外力作用，故 x 軸方向應遵守動量守恒；垂直方向受重力作用，即所受淨力不為零，故 y 軸方向的動量不能守恒；垂直方向作用的淨力僅與重力有關，重力為保守力，故整個系統的機械能守恒。則

$$\begin{cases} m(v_{mM} \cos \theta - v_M) + M(-v_M) = 0 \dots\dots\dots ① \\ \frac{1}{2}m(v_{mM} \cos \theta - v_M)^2 + \frac{1}{2}m(v_{mM} \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}Mv_M^2 = mgh \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

由①、②二式可以解得楔形木塊與物體的速度為



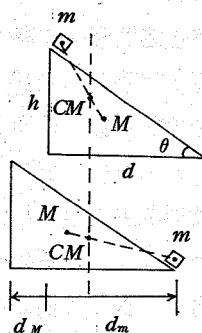
圖(1)

$$\begin{cases} v_M = \sqrt{\frac{2gh \cos^2 \theta}{(k+1)(k+\sin^2 \theta)}} \dots\dots\dots ③ \\ v_m = \sqrt{\frac{2gh [k^2 + (2k+1)\sin^2 \theta]}{(k+1)(k+\sin^2 \theta)}} \dots\dots\dots ④ \end{cases}$$

於上二式中， $k = M/m$ 。

物體 m 自斜面頂端滑行至底端時，對楔形木塊 M 的水平相對位移為 d ，即楔形木塊的底長。由於整個系統在水平方向所受的外力為零，故其質心的水平位置不變，根據圖(2)可推得楔形木塊與物體水平位移的大小為

$$\begin{cases} d_M = \frac{m}{M+m} d \dots\dots\dots ⑤ \\ d_m = \frac{M}{M+m} d \dots\dots\dots ⑥ \end{cases}$$



圖(2)

物體 m 與楔形木塊 M 均由靜止開始運動，兩者所受的淨力均為定值，故各作等加速度運動。根據等加速度運動之末速度與位移間的關係式

$$a = \frac{v^2}{2s} \dots\dots\dots ⑦$$

式中 v 為末速度， s 為運動距離，將③、⑤二式代入式⑦，以 v_M 代 v 、 d_M 代 s ，注意 $h/d = \tan \theta$ ，即可解得楔形木塊的加速度大小為

$$a_M = \frac{mg \sin 2\theta}{2(M + m \sin^2 \theta)}$$

物體 m 的運動是二維運動，其水平方向的位移為 d_m ，而垂直方向的位移為 h ，故欲推算其加速度時，應先分別求其分量 a_x 與 a_y ，再以向量和表示其加速度。即

$$\begin{cases} a_x = \frac{(v_{mM} \cos \theta - v_M)^2}{2d_m} = \frac{Mg \sin 2\theta}{2(M + m \sin^2 \theta)} \\ a_y = \frac{(v_{mM} \sin \theta)^2}{2h} = \frac{(M+m)g \sin^2 \theta}{M + m \sin^2 \theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$

至於物體與楔形木塊間的相互作用力 $\vec{N}$ ，可以用下述二種想法推求。參看圖(3)得知

(A) 自 M 的運動來說，楔形木塊所受作用力計有重力 $M\vec{g}$ ，地面對木塊的正向力 $\vec{P}$ 及 m 對 M 的垂直作用力 $\vec{N}$ 三項。其中僅 $\vec{N}$ 的水平分力使楔形木塊獲得加速度 a_M ，即

$$N \sin \theta = M a_M \dots\dots\dots ⑧$$

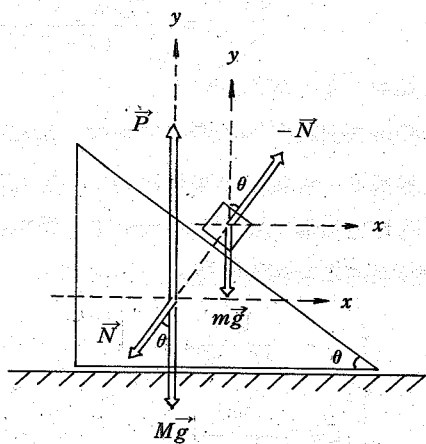
(B) 自 m 的運動來說，物體所受作用力計有重力 $m\vec{g}$ ， M 對 m 的反作用力 $-\vec{N}$ 二項。其中 $-\vec{N}$ 的水平分力使物體 m 獲得加速度 a_x ，重力與 $-\vec{N}$ 的垂直分力使物體獲得加速度 a_y ，即。

$$\begin{cases} N \sin \theta = m a_x \cdots \cdots \cdots \textcircled{9} \\ mg - N \cos \theta = m a_y \cdots \cdots \cdots \textcircled{10} \end{cases}$$

由式⑧、⑨或⑩，均可求得 m 與 M 間的相互作用力為

$$N = \frac{Mmg \cos \theta}{M + m \sin^2 \theta}$$

歸納上述速度、位移、加速度與槽相互作用力的推算，得到二個結論：第一，物體 m 與楔形木塊作相對運動，因相互作用力為未知條件，故不容易由運動方程式依序推得二者的加速度、速度與位移；應由相對速度換算對實驗室座標的絕對速度，利用動量守恆與機械能守恆解之，再由相對位移換算絕對位移，而加速度與相互作用力隨即可得。第二，楔形木塊的運動為一維運動，故僅需考慮其水平方向的分量即可；而物體 m 的運動屬於二維運動，討論問題時需將諸



圖(3)

諸向量分解為 x 軸及 y 軸二方向的分量，分別計算後再以合向量表示即可。

本文曾與陳垣三先生研討，特此致謝。

□

註(1) 台北區公立高中七十學年度第一次聯合模擬考試物理科試卷。

註(2) D. Halliday and R. Resnick, Fundamentals of Physics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1974, p.152.

註(3) 國立編譯館，師範專科學校物理上冊，正中書局，民國七十年版，p.160.