“幫蜜蜂一個忙”——一個數學趣味問題探討

～涓夫～
臺北縣立土城國中

一、前　　言：

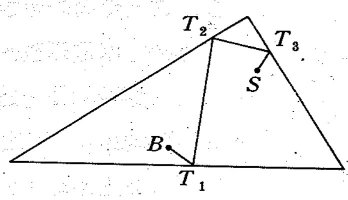
偶然翻閱舊期刊，在科教月刊第二十二期〔1〕中“數學應用與實際問題”一文裡，對陳教授舉出的十一個數學應用問題，發生了極大的興趣。筆者於敬佩該文的精彩論析之餘，特對“問題 10 ”的別具教育性與“高度的數學興趣”多所鍾情。以下謹就個人粗略探討所得，提出一點“心得報告”，或聊可做爲諸君補充教材的參考。本文所著意的是問題解法的探索。雖然問題本身與眞實世界的眞正關係已然脫離，筆者相信，在教學上仍有它的益處的。

二、問題轉錄：〔1：P32，問題10〕

有一隻蜜蜂與一小塊糖分別在一三角形的內部兩個不同的位置。這隻蜜蜂想要到這塊糖上。設這隻蜂到這塊糖之前，必要接觸到這三角形的三個邊。試問在這個條件下，那條路線最短？

三、本　　文：

首先我們將問題改述爲“一三角形內部任意兩點，自一點與三邊上的點先作連線，再到達另一點的最短路徑爲何？”如右圖：



路徑 $B-T_1-T_2-T_3-S$ 即隨意選擇之一例。

如何能求得最短路徑呢？我們發覺，如果將問題適當簡化，從：

(a) 一直線外兩點與線上某點作連線，所得的最短路徑爲何？

(b) 一角（兩射線）內部兩點，自一點與兩邊作連線再到達另一點的最短路徑爲何？

先就以上(a)，(b)兩種情形加以探討如下：

(a) 直線的情形：直線 L，線外兩點 P、Q。

(1)　取定法：1.　作 $\overleftrightarrow{PD} \perp L$，取 $\overline{PD}=\overline{DP'}$ 。

2.　連接 $\overline{P'Q}$，與 L 交於 T 點。

3.　路徑 $P-T-Q$ 即為所求。

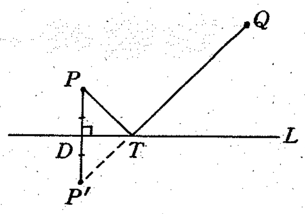


圖 (a) - (1)

(2)　說明：如圖(a)- (2)，T_1 、T_2 表不同於連接點 T 之二例。

因　$\overline{PT}=\overline{P'T}$，$\overline{PT_1}=\overline{P'T_1}$，$\overline{PT_2}=\overline{P'T_2}$

$\overline{P'T_1}+\overline{T_1Q}>\overline{P'Q}$ 且 $\overline{P'T_2}+\overline{T_2Q}>\overline{P'Q}$

（三角形兩邊長的和大於第三邊長。）

而　$\overline{P'T_1}+\overline{T_1Q}$ 與 $P-T_1-Q$ 之路線等長，

$\overline{P'T_2}+\overline{T_2Q}$ 與 $P-T_2-Q$ 之路線等長，

$\overline{P'Q}$ 與 $P-T-Q$ 之路線等長。

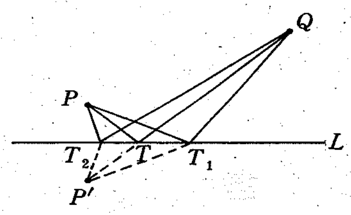


圖 (a) - (2)

(b)　角的情形：一角的兩邊 L 、M，角內兩點 P、Q。

(1)　取定法：1.　將兩邊 L 、M 視為二鏡面，兩點 P 、Q 就較近邊分別作映像點 P'、Q'。

2.　連接 $\overline{P'Q'}$ ，與 L 交於 T_1 ，與 M 交於 T_2 。

3.　路徑 $P-T_1-T_2-Q$ 即為所求。

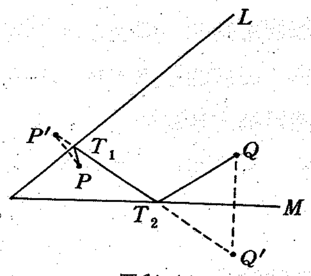


圖 (b) - (1)

(2)　說明：如圖(b) - (2)，$P-T_3-T_4-Q$ 及 $P-T_5-T_6-Q$ 表其他路徑之一般例。以 $P'-T_3-T_4-Q'$ 及 $P'-T_5-T_6-Q'$ 代替，與 $P'-T_1-T_2-Q'$（$=P-T_1-T_2-Q$）比較，即可知 $P-T_1-T_2-Q$ 是為最短者（折線長大於直線長）。

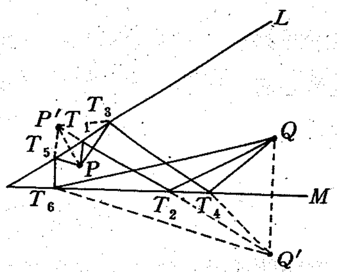


圖 (b) - (2)

(3)　討論：1.　利用(a)之原理推廣，對兩邊同時作像點，即可定出兩邊上之連接點 T_1 ，T_2 位置。

2.　P ，Q 同時可能對 L 、M 兩邊作映像，應取距離最小者優先作像點，另點再對另一邊作像點。

3.　如圖(b) - (3)，比較 P 、Q 分別與 L 、M 之距離，知 P 最接近 L，故選取 L 做 P' ，而 Q 則對 M 做 Q' 。若選取 P'' 及 Q'' 則得 $P-T_3-T_4-Q$，但 $\overline{P''Q''}>\overline{P'Q'}$ 。

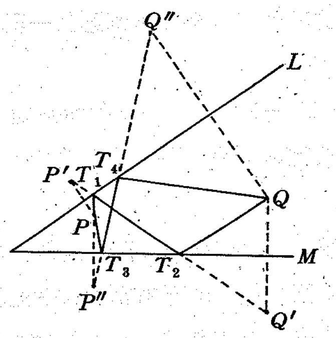


圖 (b) - (3)

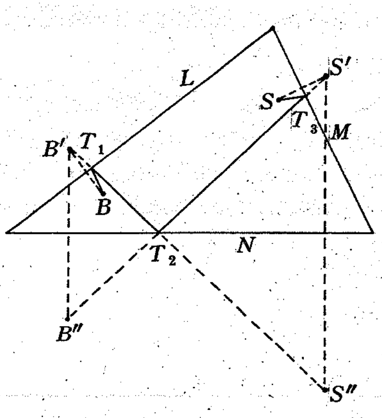
(c) 三角形的情形：三邊 L、M、N，三角形內部兩點 B、S。

(1) 取定法：1. B、S 兩點分別對最近邊作映像點 B'、S'。

2. 以另一邊（N）爲鏡面，作 B'（或 S'）之像 B''（或 S''）。

3. 連接 $\overline{B''S'}$（或 $\overline{S''B'}$），與邊 N 相交於 T_2，與邊 M 交於 T_3。

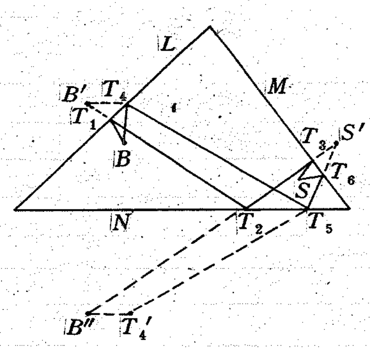
4. 連接 $\overline{T_2B'}$ 與 L 邊交於 T_1，則 $B-T_1-T_2-T_3-S$ 即爲所求。



B：蜜蜂
S：糖
B'：B 之像點
B''：B' 之像點
S'：S 之像點
S''：S'' 之像點
$\overline{B'S''}=\overline{B''S'}=B-T_1-T_2-T_3-S$

圖(c)-(1)

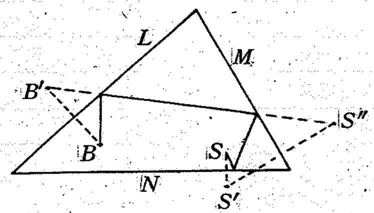
(2) 說明：如圖(c)-(2)，路徑 $B-T_1-T_2-T_3-S$ 等於 $B''S'$ 成一直線。路徑 $B-T_4-T_5-T_6-S$ 表其他任意路徑，它可代換成 $B''-T_4'-T_5-T_6-S'$，爲一折線，顯然比 $B''S'$ 爲長。



圖(c)-(2)

(3) 討論：1. 由(b)之情形再次利用(a)之原理推廣，視 B' 與 S' 爲線（N 邊）外兩點，作映像點 B'' 或 S''（結果所得相同），即可得最短路徑長 $\overline{B''S'}$ 或 $\overline{B'S''}$。

2. 蜜蜂應選擇距它最近的一邊作爲首先接觸對象。但如糖亦以此邊爲最近邊，而且較蜜蜂更靠近此邊時，則應選擇第二接近的邊爲最先接觸邊。



B 與 S 同時以 N 邊爲最近邊，但 S 較 B 爲接近 N，故 B 須選取 L 邊作映像點 B'，把 N 邊“讓給”S！

圖(c)-(3)

四、結　　語：

由瞭解問題、分析問題，把問題數學化、簡單化，尋求一個基本而有用的法則，再漸次推廣，做某種程度的猜測，設法求證它的正確性。這種觀察歸納的過程是深具教育性的。儘管問題本身可能毫無眞實性，然而在教學上的價值卻不容抹殺！對於一個問題，未曾經過探討以前，往往很難估計它的難易程度。筆者對此問題作了粗淺的討論，寄望能因此引起大家對一般問題加以探索的興趣，算是內心最大的願望了！ □