# 方程式論發展史簡介（二）

趙文敏

國立台灣師範大學數學系

## 丁、印度人與阿拉伯人的成就

Diophantus 的生存年代，是希臘數學第一次衰微後的中興時期，數學史上通常把這個時期稱爲希臘數學的銀色時期（silver age），以別於紀元前 300 年至 200 年間的黃金時期。Diophantus 之後，希臘後期的數學家如 Pappus 等都沒有在代數學方面有特殊的成就，而西元 476 年西羅馬帝國滅亡之後，歐洲淪入黑暗時代，五、六百年之間，沒有出現任何有價值的著作，要談這段時期內的代數發展，應該介紹印度、阿拉伯、與中國。事實上，就代數學方面而言，印度、阿拉伯、與中國人在這段時期內的成就，是非常卓越而輝煌的。

在代數學方面，必須一提的中世紀印度數學家有四位，他們是：Aryabhata（西元五世紀），Brahmagupta（西元七世紀），Mahāvīra（西元九世紀），以及 Bhāskara（西元十二世紀）。

印度人在數學上的重要貢獻之一是發明了印度-阿拉伯數字，但是，直到西元六世紀，印度人對於 10 的倍數，都還使用特殊的記號。由此可見，在六世紀以前，印度人的「進位」觀念似乎尚未成熟，而中國人至少在商朝的甲骨文上就出現有「五百四十七」這樣的字眼，而且考古學者也未曾發現中國人曾使用過特殊記號來表示 10 的倍數，換言之，中國人在紀元前十四世紀至十一世紀的商朝就有了十進位的概念。因此，印度人很可能向中國人學到了十進位的觀念，才會發明出所謂的印度-阿拉伯數字。

零的概念，在中國古代的算籌上，都是以空出一位來表示，也就是說，沒有一個表示零的特殊記號。用圈來表示零，首先出現在中國印刷物的是西元 1247 年秦九韶所著的數書九章。而印度人却在西元九世紀就以一個小圈圈來表示零，因此，有些人認爲中國人所使用的記號是直接由印度傳來，不過，却沒有積極的證據。關於零對加、減、乘所扮演的角色，Mahāvīra 已經有正確的了解，不過，關於分數之分母是零的問題，甚至連 Bhāskara 都還沒弄清楚。

在西元 628 年左右，Brahmagupta 引進負數的概念，當時，負數用來表示債務，而相對地，正數則表示資產。至於負數在四則運算中的規則，Brahmagupta 都已作詳實的介紹。Bhāskara 還指出：每個正數都有兩個平方根，一爲正數，一爲負數。同時，他也說明負數沒有平方根（當時自然還沒有虛數的觀念）。

印度人的另一項成就是開始處理無理數的問題，例如，Bhāskara 曾提出下面這兩個原則：

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}},$$

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{(\sqrt{\frac{a}{b}}+1)^2 b},\ a>b。$$

在處理二次方程式時，由於他們已容許部分係數為負數，因此，印度人已不像巴比倫人或希臘人需要分別考慮 $ax^2+bx=c$， $ax^2=bx+c$， $ax^2+c=bx$ ( $a$、$b$、$c$ 都是正數 ) 等三種情形，而逕行考慮 $px^2+qx+r=0$ 這樣的二次方程式。他們所使用的方法是配方法，這當然並非印度人的最新創見，因為巴比倫人已經使用過了。不過，由於他們還對負數的平方根一無所知，所以，他們還不能解出所有的二次方程式。至於三次方程式，印度人很少涉及。

在不定方程式方面，印度人比希臘人又進步了許多。因為 Diophantus 還只考慮有理數解，可是，Aryabhata 已經提出求整係數二元一次方程式 $ax+by=c$ 之整數解的方法，他的方法略經改進，到了 Brahmagupta 已經知道如何求出 $ax+by=c$ 的全部整數解了，就這個問題而言，Brahmagupta 是第一人。

Brahmagupta 討論過 Pell 方程式，而 Bhāskara 則求出 $A=8,11,32,61,67$ 時，$x^2-Ay^2=1$ 的整數解。例如，$A=8$ 時，$(x,y)=(3,1)$ 是一組解；$A=11$ 時，$(x,y)=(10,3)$ 是一組解；$A=32$ 時，$(x,y)=(17,3)$ 是一組解；而當 $A=61$ 時，Bhāskara 所給出的解是 $x=1776319049$，$y=22615390$，這樣的解是需要很高超的計算技術才能求得的。

最後，我們再提出一個問題。在 Brahmagupta 作品中有一個題目是這樣的：有一根竹子 18 呎高，被風吹折後，頂端接觸地面的位置與根部相隔 6 呎，求折斷部分的長度。這個問題實際上與九章算術勾股章第十三題的內容相同，所不同的，只是兩題的數字而已。九章算術中的原題是這樣的：

「今有竹高一丈，末折抵地，去本三尺，問折者高幾何？」由於九章算術問世的年代比 Brahmagupta 要早，或許可由這個例子說明中國數學上的成就很早就已經傳入了印度。

談到阿拉伯人在代數學上的成就，第一個應該提到的，自然是更適合被稱為「代數學之父」的 Mohammed ibn Musa al-khowarizmi ( 780～850 )。al-khowarizmi 有兩本著作討論算術與代數，其中一本是 Al-jabr w'al muqābalah，這本書經由其拉丁譯本而傳遍歐洲。al-jabr 與 muqābalah 的確實意義雖不清楚，但一般以為 al-jabr 的意義是“修復”( restoration )，而 muqābalah 的意義是“相消”( reduction )；前者乃是指“移項”，而後者乃是指“消去”方程式兩邊的相同項。值得一提的是：algebra ( 代數學 ) 這個字，就是由前述的書名中 al-jabr 一字演變而得的，因為這部書傳入西班牙後，採用的譯名是 algebrista，而這個字就是西班牙文中的接骨醫生。

al-khowarizmi 的 Al-jabr w'al muqābalah ( 下面寫成 Algebra ) 是一本深入淺出的初等代數書籍，而其中的敍述還是在修辭的階段，這兩點是與 Diophantus 的 Arithmetica 不同的地方。一般的看法，認為 al-khowarizmi 是兼從巴比倫人、希臘人、及印度人 ( 特別是指 Brahmagupta ) 學得代數的。全書共分六章，討論的內容是一次及二次方程式，而 al-khowarizmi 分成三種來討論，即 roots ( 指一次項 )、squares ( 指二次項 )、及 numbers ( 指常數項 )。

第一章的內容是討論$ax^2=bx$之形式的方程式，其中包含有$x^2=5x$，$\frac{1}{3}x^2=4x$，及$5x^2=10x$，所得的根分別是$x=5$，$x=12$，及$x=2$（他沒有考慮$x=0$的根）。第二章的內容是討論$ax^2=c$之形式的方程式。第三章的內容是討論$bx=c$之形式的方程式。第四、五、六章分別討論$ax^2+bx=c$、$ax^2+c=bx$、$ax^2=bx+c$之形式的方程式。使用的方法是配方法，而只考慮正根。例如，第四章包含三個方程式$x^2+10x=39$，$2x^2+10x=48$，及$\frac{1}{2}x^2+5x=28$。第五章只包含$x^2+21=10x$一個方程式。

事實上，在一次及二次方程式中，有正根的必是上述六種中的一種（上述的$a$、$b$、$c$都是正數），而al-khowarizmi如此有系統的介紹，使得學習者非常容易了解與接受，這是他被認爲更適合「代數學之父」這個頭銜的一個原因。在初等代數的介紹方面，這部書的地位相當於Euclid的Elements，如果說要挑剔其缺點，那就是：要做爲現代的初等代數教科書，它必須徹頭徹尾地改寫，由修辭的形式改寫成符號的形式。

al-khowarizmi 在處理二次方程式的配方問題時，都採用了幾何的原理來"配"出平方，這一點可用以說明，al-khowarizmi 受到希臘幾何代數的影響。

在al-khowarizmi的另一部著作（此書僅傳下拉丁譯本，書名是De numero indorum,"Concerning the Hindu Art of Reckoning"）中，作者對印度-阿拉伯數字作了非常詳細的介紹，對這種數字的傳遍歐洲，功勞甚大；或許因爲如此，使得後世的人誤以爲這種數字是源自阿拉伯，而不知其實是源自印度。

與al-khowarizmi的Algebra同時或更早的另一部阿拉伯數學著作是abd-al-Hamid ibn-Turk的Logical Necessities in Mixed Equations，這部書流傳下來的斷簡殘篇中，有些內容與al-khowarizmi的Algebra相似，也使用幾何式的配方法，不過，有一點較完整的是，這部書已經利用幾何圖形說明：當判別式是負數時，該二次方程式就沒有解。

西元九世紀是阿拉伯數學的輝煌時代，在al-khowarizmi之後，又出現了一位重要數學家Thabit ibn-Qurra（826～901），如果把al-khowarizmi看成是阿拉伯的Euclid，則Thabit就相當是阿拉伯的Pappus，因爲他的重要貢獻之一是譯述的工作，擧凡Euclid，Archimedes，Apollonius，Ptolemy，Eutocius等人的著作都經由他而譯成阿拉伯文，這件工作對這些著作得以流傳後世，功不可沒。Thabit曾經得出一個有關友善數（amicable numbers）的公式；在方程式方面，他考慮過一些特殊的三次方程式，不過，並沒有發展出三次方程式的代數理論，只是使用幾何方法來求解。

Omar Khayyam（1050～1122）是必須一提的另一位阿拉伯數學家，他所著的Algebra被認爲是波斯人的代數著作中最好的。在其中他不僅使用代數與幾何方法討論了二次方程式，而且也討論三次方程式，不過，他誤以爲三次方程式不能使用代數方法求解，所以只討論幾何的求解方法。利用圓錐曲線的交點來討論三次方程式的解，事實上在Menaechmus，Archimedes及另一位阿拉伯數學家Alhazen（965～1039）就已有過，不過，Omar Khayyam却對這個問題有著深入的探討，他的方

法已經包含了所有具有正根的三次方程式。他把具有正根的三次方程式分成十三類，然後，分別以不同的圓錐曲線來討論該方程式的根。例如，以 $x^2=by$ 及 $y^2=x(c-x)$ 的交點討論 $x^3+b^2x=b^2c$ 的根；以 $xy=c^2$ 及 $y^2=c(x+a)$ 的交點討論 $x^3+ax^2=c^3$ 的根；以 $y^2=(x\pm a)(c-x)$ 及 $x(b\pm y)=bc$ 的交點討論 $x^3\pm ax^2+b^2x=b^2c$ 的根；等等。

另外一點也值得一提：Omar Khayyam在他的Algebra中提到了二項式定理，也發現了Pascal三角形。很奇妙的是，約在同一時期，東方的中國也得出了同樣的結果，這項巧合很難解釋，因爲當時的中國與阿拉伯間的學術交流並不發達，如果雙方的發現不是完全獨立獲得的話，可能的交換是由於當時中國與波斯間的絲路所造成的。

Omar Khayyam 之後，阿拉伯數學開始衰微，一直到西元十四世紀，都沒有再出現原有的輝煌情形。其間的Nasir Eddin al-Tusi（1201～1274），主要的貢獻在三角學及天文學。十五世紀的Al-Kashi ，則在計算技術方面頗爲出色，他曾使用所謂的Horner 方法求方程式之根，這個方法最早見於十三世紀的中國（參看後一節），而Al-Kashi 了解這個方法，一般以爲是由於蒙古人西征期間（西元1258年，蒙古人滅東阿拉伯帝國），由中國傳入阿拉伯的。

## 戊、中國人在代數學上的卓越成就

| | |
|---|---|
| 大衍求一術 | 帶從開立方 |
| 增乘開方法 | 開多乘方法 |
| 天元術 | 四元消法 |

九章算術的問世，象徵著中國古代數學體系已經初步完成。從這個既有的基礎上，由兩漢、歷魏、晉、南北朝、隋、唐，而迄宋、元，中國古代數學的發展達到了最高潮；在這個期間裡，名算學家輩出；更可貴的是，這些算學家的研究成果並不是零零碎碎地拼湊出來，而是有系統的探討。例如，由孫子算經中的「物不知其數」問題到秦九韶的「大衍求一術」，而得出近代數論中的中國剩餘定理。由九章算術中的「開平方、立方」、「帶從開平方」，到唐朝緝古算經中的「帶從開立方」，接著是賈憲的「增乘開方法」，最後是秦九韶的「開多乘方法」，把符號化以前的代數學發展到一個極致。由九章算術中的「一次聯立方程組之解法」，到李治的「天元術」，發展出朱出傑的「四元術」。由劉焯的「內挿法」發展成朱世傑的「垛積招差」。這些都是中國人在代數學方面有系統研究成果的最佳例證。

### 一、趙爽與劉徽

希臘人以幾何方法處理方程式的問題，這種作法也見於趙君卿的周髀算經注中的「勾股圓方圖注」之中，不過，勾股圓方圖注全文只有五百多字，其中有關直角三角形三邊長之關係的解說，只能算是畢氏定理之證明的一種構想。趙爽，字君卿，大約是魏、晉（西元三至四世紀）時期的人。有關他的生平，都不可考。

劉徽是西元三世紀的一位偉大數學家，他的身世與生平事迹，也幾乎沒有任何材料流傳下來。隋書律曆志中載有「魏陳留王景元四年（西元263年）劉徽注九章」的文字，由此可推斷劉徽是西元三世紀魏、晉時代的人。九章算術經過劉徽的注釋之後，就沒有更大的變動，一直流傳到現在。有了他的注釋，九章算術變得更有條理也比較容易了解。因爲九章算術中只是列出了算法，而很少作解釋或說明。劉徽的注釋，剛好補充了這個不足之處。除了九章算術注之外，劉徽在幾何方面，也有很大的貢獻，不過，這些幾何方面的成就，有一部分也載於九章算術注中。

我國古代十進位制記數的法則，以及正、負數的精確觀念，應該都是在劉徽手上才發展成熟的。關於十進位制記數法則，在少廣章第十六題後面劉徽注文曰：「微數無名者，以爲分子，其一退以十爲母，其再退以百爲母，退之彌下，其分彌細」。關於正、負數的觀念，在方程章第三題後面劉徽注文曰：「兩算得失相反，要令正、負以名之」。

## 二、中國剩餘定理與大衍求一術

孫子算經三卷，是中國古代的另一部重要數學著作，其中的中卷對開平方法解說得比九章算術詳細得多，同時對使用算籌於分數時的算法也介紹得很清楚。不過，孫子算經中最著名的還是下卷的第二十六題：

「今有物不知其數，三三數之賸二，五五數之賸三，七七數之賸二，問物幾何？」

「答曰：二十三。」

「術曰：三三數之賸二，置一百四十；五五數之賸三，置六十三；七七數之賸二，置三十；幷之，得二百三十三，以二百一十減之，卽得。凡三三數之賸一，則置七十；五五數之賸一，則置二十一；七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，卽得。」

像這類「孫子問題」，在中國民間流傳頗廣，有「秦王暗點兵」、「韓信點兵」、「剪管術」、「鬼谷算」等名稱。在宋朝的一本筆記中曾把前面這個問題的解法寫成四句詩：

三歲孩兒七十稀，五留廿一事尤奇；
七度上元重相會，寒食清明便可知。

明朝數學家程大位在他所著的算法統宗中，也有一首歌訣說明前面這個問題的解法：

三人同行七十稀，五樹梅花廿一枝；
七子團圓正半月，除百零五便得知。

「物不知其數」這種問題，是解聯立一次同餘方程式的問題。同餘的概念始見於十八世紀 Leonhard Euler（1707～1783）、Joseph Lagrange（1736～1813）、及 Adrien-Marie Legendre（1752～1833）等人的作品之中，但其理論則是自 Carl Gauss（1777～1855）起才開始蓬勃地發展。而孫子算經却在大約一千四百年前，就先行解出這個聯立一次同餘方程式的不定解析問題。孫子算經的這項成果，在魏、晉、南北朝期間，都被用在曆法上有關「上元積年」的推算，可惜得很，當時天文學家的推算方法都沒有流傳下來。一直到西元十三世紀，宋朝數學家秦九韶在其所著的數書九章（西元1247年）中才作有系統的介紹，秦九韶把他的方法稱爲「大衍求一術」。元朝以後，由於曆法家不再推算「上元積年」，而使得因爲曆法的需要而產生並發展的「大衍求一術」逐漸失傳；

直到清朝中葉，許多數學家們鑽研古代數學，才重新“發現”這個方法。

十八世紀以後，Euler, Gauss 等人對聯立一次同餘方程式進行研究，而發現早在五百多年前，中國的秦九韶已經得出了一個完整的結果，乃將「大衍求一術」中的結果稱之爲中國剩餘定理。這個定理的內容是這樣的：

設 $m_1, m_2, \cdots, m_k$ 爲全不爲 0 且兩兩互質的整數，則對任意整數 $a_1, a_2, \cdots, a_k$，必有一個整數 $N$，使得

$$
\begin{aligned}
N &\equiv a_1 \pmod{m_1}, \\
N &\equiv a_2 \pmod{m_2}, \\
&\vdots \\
N &\equiv a_k \pmod{m_k}.
\end{aligned}
$$

而且若整數 $N_1$ 與 $N_2$ 都滿足上述條件，則 $N_1 \equiv N_2 \pmod{m_1 m_2 \cdots m_k}$。

前面所使用的記號是 Carl Gauss 在他的著作 Disquisitiones Arithmeticae（西元 1801年）中最先使用的，它的意義是：$a \equiv b \pmod{m}$ 表示 $m$ 整除 $a-b$。

## 三、張邱建算經

大約在西元五世紀中葉南北朝時期，中國另一部算書張邱建算經在這個時期問世。在這部書的序文中，有「清河張邱建謹序」字樣，可知其作者是張邱建，清河人，却不能確定其著作年代。全書分成上、中、下三卷，在序文中，作者云：「夫學算者，不患乘除之爲難，而患通分之爲難」，所以，書中列出許多分數的應用問題。另上卷第二十二及二十三題是屬於等差數列的問題，分別是：已知首項、末項、項數而求總和，以及已知首項、項數、總和而求公差的問題。中卷最後一題是：

「今有弧田，弦六十八步五分步之三，爲田二畝三十四步四十五分步之三十一，問矢幾何？」

「答曰：矢一十二步三分步之二。」

「術曰：置田積步倍之爲實，以弦步數爲從，…。」

所謂弧田，乃是指弓形的田；弦，乃是指弓形的弦；而矢：乃是指弓形之弦中點與弧中點所連的線段。若以 $v$ 表矢長，$c$ 表弦長，$a$ 表弓形面積，九章算術中誤以爲 $a=\frac{1}{2}(v^2+cv)$，而張邱建也同樣地誤用這個“公式”，所以，他令 $c=68\frac{3}{5}$，$a=514\frac{31}{45}$，於是，得出下面這個方程式（一畝以二百四十步計算）：

$$v^2+68\frac{3}{5}v=514\frac{32}{45}\times 2,$$

或是

$$45v^2+3087v=46322,$$

張邱建算經所得的答案是對的，可是，由於「術曰」的後段已殘缺不全，不知作者是如何求解的，當然，他也可能就是利用九章算術的「帶從開方法」。

下卷的第九題也是要解二次方程式 $x^2+15x=594$，方程式之解 18 是對的，不過，導出方程式的過程却誤以 $\pi=3$。

張邱建算經下卷的最後一題就是有名的「百雞問題」：

「今有雞翁一，直錢五；雞母一，直錢三；雞雛三，直錢一；凡百錢買雞百隻，問雞翁、母、雛各幾何？」

「答曰：雞翁四，直錢二十；雞母十八，直錢五十四；雞雛七十八，直錢二十六。」

「又答：雞翁八，直錢四十；雞母十一，直錢三十三；雞雛八十一，直錢二十七。」

「又答，雞翁十二，値錢六十；雞母四，直錢十二；雞雛八十四，直錢二十八。」

「術曰：雞翁每增四，雞母每減七，雞雛每增三，即得。」

這個問題相當於解下述不定方程組

$$\begin{cases} x+y+z=100, \\ 5x+3y+\dfrac{1}{3}z=100. \end{cases}$$

而這個不定方程組的正整數解確實只有三個：$(x,y,z)=(4,18,78)$，$(x,y,z)=(8,11,81)$，$(x,y,z)=(12,4,84)$。但是，原書中的「術曰」過於簡單，作者是如何求出第一組解，又如何知道要將「雞翁加 4，雞母減 7，雞雛加 3」，這就不是後人所得而知了。

## 四、王孝通的緝古算經

中國古代算書中最先提到三次方程式的是唐朝王孝通所著的緝古算經。全書共計二十題，流傳下來的版本中，第十七、十八、十九、二十等四題已經殘缺不全。這二十題大抵可分成兩類：第一類是關於建築臺、堤、倉、窖、河道、隧道等而求其體積或容量的問題；第二類是關於勾、股、弦三者間關係的應用。這些問題都是要解出三次方程式，才能達到目的。例如，第十五題爲：

「假令有勾、股相乘冪七百六五十分之一，弦多於勾三十六十分之九，問三事各多少？」

「答曰：勾十四二十分之七，股四十九五分之一，弦五十一四分之一。」

「術曰：冪自乘，倍多數而一，爲實。半多數爲廉法，從開立方除之，即勾。以弦多數加之，即弦。以勾除冪，即股。」

若令冪爲 $b$，弦多於勾爲 $a$，則前面的「術曰」就是：以 $\dfrac{b^2}{2a}$ 爲常數項（在等號右方），這就是「冪自乘，倍多數而一，爲實」的意義，其次，以 $\dfrac{a}{2}$ 爲二次項係數，這就是「半多數爲廉法」的意義，於是，得三次方程式

$$x^3+\frac{a}{2}x^2=\frac{b^2}{2a}\text{。}$$

如此，解出來的方値就是勾。因爲設勾爲 $x$，則弦爲 $x+a$，依勾股定理，股的平方爲 $(x+a)^2-x^2=2ax+a^2$，依題意，得 $x^2(2ax+a^2)=b^2$，即 $x^3+\dfrac{a}{2}x^2=\dfrac{b^2}{2a}$。因爲 $a=36\dfrac{9}{10}$，$b=706\dfrac{1}{50}$

故此題方程式爲

$$x^3+\frac{369}{20}x^2=\frac{(35301)^2}{184500},$$

像這樣一個係數很大的方程式，早在唐朝時期的數學家，就已能使用所謂的「帶從開立方法」求得其解，而王孝通在緝古算經中並沒有把「帶從開立方法」做詳細的解說，或許可以表示，這個由「帶從開平方法」直接演變而得的「帶從開立方法」，可能發現得更早。西洋人是在十六世紀才得出三次方程式的解法，比起王孝通已經晚了九百多年。不過，王孝通所考慮的三次方程式都是$x^3+ax^2+bx=c$之形式，其中$a$、$b$、$c$都是正數，而且他只求正根。$a$、$b$、$c$三個係數，王孝通分別稱爲廉法、方法、實。

緝古算經還有一項特色，其中的問題所要的答案經常都很多。例如，第二題的答案共有28個項目，第三題則有25個項目。

王孝通這個人，雖然生平年代不可考，不過，依新唐書曆志所載，可知緝古算經的完成當在唐高祖武德九年（西元626年）之後。從他「上緝古算經表」中所云：「請訪能算之人，考論得失。如有排其一字，臣欲謝以萬金」，此人之自負可知。

## 五、李淳風與沈括

流傳下來的周髀算經、九章算術、海島算經、孫子算經、五曹算經、張邱建算經、五經算術、緝古算經等書，都載有「唐朝議大夫行太史令上輕車都尉臣李淳風等奉 勅注釋」的字樣，而書中的注文都冠以「臣淳風等謹按」字樣，這其中的李淳風乃是唐太宗、高宗時代的數學家，而「李淳風等」的「等」字，則通常包含國子監算學博士梁述及太學助教王眞儒。前面所列出的八部算書與夏侯陽算經、數術記遺合稱算經十書。這十部算書被列爲當時國子監學習用和科擧考試用的必讀書。而時至今日，這些書也是我們要了解漢、唐千餘年間中國數學發展情況的寶貴資料。

中國古代數學，經過漢、唐千餘年間的發展，形成了以「十部算經」爲基本內容的完整體系。到了西元十至十四世紀的宋、元兩代，又有了新的發展。此處，值得一提的是：北宋期間，雕板印刷術已很發達，因此，許多數學書籍都在這個期間以印刷本問世。雖然北宋時代除了沈括（1031～1095）之外沒有其他著名的數學家，但是，官方刋印許多數學書籍，對於中國古代數學的流傳後世有其重要的意義。

## 六、賈憲的增乘開方法

要介紹宋、元兩代中國人在代數上的成就，就年代而言，應該先介紹賈憲（大約西元十一世紀）的「增乘開方法」。這個方法乃是將九章算術中的開方法再做改進，而使它很容易地可推廣到高次的開方法。整個方法的特點在於隨乘隨加，而沒有古開方法中的進位與退位。不過，賈憲的著作業已失傳，但在南宋數學家楊輝所著的九章算法纂類中記載了賈憲的這種方法。我們以開立方爲例來解說。假設需要求解的問題是$\sqrt[3]{N}$，設其立方根爲$a+b+c$（例如，$\sqrt[3]{12812904}=234$，則$a=200$，

$b=30$, $c=4$），則立一個籌式如圖 10 中的(1)。接著，「以上商乘下法入廉，乘廉爲方；除實訖」

| 上商 | $a$ | $a$ | $a$ | $a$ |
|---|---|---|---|---|
| 實 | $N$ | $N-a^3$ | $N-a^3$ | $N-a^3$ |
| 方 | 0 | $a^2$ | $3a^2$ | $3a^2$ |
| 廉 | 0 | $a$ | $2a$ | $3a$ |
| 下法 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | (1) | (2) | (3) | (4) |

圖 10

。這段話的意思是：以上商的 $a$ 乘下法的 1，所得的乘積 $a$ 寫在廉的位置；再以上商的 $a$ 乘廉的 $a$，所得乘積 $a^2$ 寫在方的位置；再以上商的 $a$ 乘方的 $a^2$，再自實 $N$ 中減去所得的乘積 $a^3$；如此，就得圖 10 中的(2)。其次，「復以上商乘下法入廉，乘廉入方」。這段話的意思是：以上商的 $a$ 乘下法的 1，所得的乘積 $a$ 加入廉，即得新的廉爲 $2a$；再以上商的 $a$ 乘廉的 $2a$，所得的乘積 $2a^2$ 加入方，即得新的方 $3a^2$；如此，即得圖 10 中的(3)。再其次，「又乘下法入廉」。意思是：以上商的 $a$ 乘下法的 1，所得的乘積 $a$ 加入廉，即得新的廉 $3a$；如此，即得圖 10中的(4)，而有關上商 $a$ 的操作至此結束。讀者不妨以現代數學中的綜合除法來作比較：

$$
\begin{array}{lllll}
1 & 0 & 0 & -N & \underline{|a} \\
 & a & a^2 & & \\
\hline
1 & a & a^2, & -(N-a^3) & \\
 & a & 2a^2 & & \\
\hline
1 & 2a, & 3a^2 & & \\
 & a & & & \\
\hline
1, & 3a & & &
\end{array}
$$

可見賈憲的方法實際上已經就是在連續地使用綜合除法，而其代數意義乃是將 $x^3-N$ 以 $x-a$ 表示，即

$$x^3-N=(x-a)^3+3a(x-a)^2+3a^2(x-a)-(N-a^3)。$$

其次，求得第二位得數 $b$ 之後，「復商第二位得數，以乘下法入廉；乘廉入方；命上商，除實訖」。這段話的意思與前面由圖 10(1)得圖 11(2) 意思完全相同，只不過是以第二得數 $b$ 代替前面 $a$，如此，即得圖 11 的(6)。「復以次商乘下法入廉，乘廉入方」。如此，得圖 11的(7)。「又乘下法入廉」，如此，得圖 11 的(8)。而有關次商 $b$ 的操作至此結束。

與綜合除法比較，乃是

$$
\begin{array}{llll|l}
1 & 3a & 3a^2 & -(N-a^3) & b \\
 & b & 3ab+b^2 & 3a^2b+3ab^2+b^3 & \\
\hline
1 & 3a+b & 3a^2+3ab+b^2, & -(N-(a+b)^3) & \\
 & b & 3ab+2b^2 & & \\
\cline{1-3}
1 & 3a+2b, & 3(a+b)^2 & & \\
 & b & & & \\
\cline{1-2}
1, & 3(a+b) & & &
\end{array}
$$

其代數意義則為

$$
\begin{aligned}
x^3-N &= (x-a)^3+3a(x-a)^2+3a^2(x-a)-(N-a^3) \\
&= (x-a-b)^3+3(a+b)(x-a-b)^2+3(a+b)^2(x-a-b) \\
&\quad -(N-(a+b)^3)。
\end{aligned}
$$

最後,「上商第三位得數,乘下法入廉,乘廉入方,命上商除實,適盡,得立方一面之數」。這段話的意思與前面由圖10(1)得(2),或由圖11(5)得(6) 意思完全相同。而所謂「適盡」,其意義就是 $N-(a+b+c)^3=0$,故得立方根 $a+b+c$。

| 上商 | $a+b$ | $a+b$ | $a+b$ | $a+b$ |
|---|---|---|---|---|
| 實 | $N-a^3$ | $N-(a+b)^3$ | $N-(a+b)^3$ | $N-(a+b)^3$ |
| 方 | $3a^2$ | $3a^2+3ab+b^2$ | $3(a+b)^2$ | $3(a+b)^2$ |
| 廉 | $3a$ | $3a+b$ | $3a+2b$ | $3(a+b)$ |
| 下法 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | (5) | (6) | (7) | (8) |

圖 11

前面所提出對照的綜合除法,是西元1819年英國數學家William Horner(1786~1837)所提出的。西元1804年義大利數學家Paolo Ruffini(1765~1822)也已提出一個類似的方法,而前面所介紹的「增乘開方法」,實際上與Horner的綜合除法完全一樣,賈憲的時代則比Horner早了八百年左右。近代數學中把這個方法稱為Horner方法,不僅Ruffini受到委曲,中國的賈憲則更應該大呼寃枉。

## 七、劉益的議古根源

從九章算術中的開平方、開立方法,可推演而得帶從開平方法(解一般的二次方程式)、帶從開立方法(解一般的三次方程式),那麼,由增乘開方法應該也可推演出解一般之高次方程式的方法。不過,在前面所介紹的各種開方法中,都是要求係數不為負。因此,要想把增乘開方法推廣而得一般高次方程式的解法,必須先衝破這項限制。根據流傳下來的史料看來,最先做到這一點的是劉益(約

在西元十二世紀下半葉，南宋期間）。劉益著有議古根源一書，惜已經失傳。但在楊輝所著的田畝比類乘除捷法（西元1275年）一書中，曾收錄了劉益議古根源中的二十幾個問題。楊輝在該書的序言中說：「中山劉先生作議古根源，…引用帶從開方正負損益之法，前古之所未聞也」。楊輝所指的正是劉益的創見。

楊輝所收錄的題目之中，只有一個題目是四次方程式，其他的題目都只是二次方程式。至於那個四次方程式，根據書中的籌式，用現代的數學符號表示，相當於解下面的方程式：

$$-5x^4+52x^3+128x^2=4096 \text{。}$$

這個問題的解法原文是：「於實上商置得矢四步（圖12(1)），以命負隅五，減下廉二十餘三十二（圖12(2)）。以上商四步依三乘方乘下廉，入上廉，共二百五十六（圖12(3)）。又以上商四步乘上廉，得一千二十四爲三乘方法（圖12(4)），以上商命方法，除實，盡，得矢四步（圖12(5)）」。

將這段解法作成籌式，則爲圖12：

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 上　商 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 實 | 4096 | 4096 | 4096 | 4096 | $4096-1024\cdot4$<br>$=0$ |
| 三乘方法 | 0 | 0 | 0 | $0+256\cdot4$<br>$=1024$ | 1024 |
| 上　廉 | 128 | 128 | $128+32\cdot4$<br>$=256$ | 256 | 256 |
| 下　廉 | 52 | $52+(-5)\cdot4$<br>$=32$ | 32 | 32 | 32 |
| 負　隅 | $-5$ | $-5$ | $-5$ | $-5$ | $-5$ |
| | (1) | (2) | (3) | (4) | (5) |

圖 12

這個籌式與下面的綜合除法相同：

$$\begin{array}{rrrrrl}
-5 & +52 & +128 & +0 & -4096 & \underline{|4} \\
 & -20 & +128 & +1024 & +4096 & \\
\hline
-5 & +32 & +256 & +1024, & 0 &
\end{array}$$

這個方法當然就是增乘開方法的推廣，只不過答案只有一個數字，所以，不足以顯示增乘開方法的優越性。

## 八、秦九韶的開多乘方法

增乘開方法經過賈憲、劉益等人的研究而逐漸發展起來。到了西元十三世紀中葉，在秦九韶所著的數書九章（西元1247年）中，增乘開方法已被推廣成高次方程式的解法。秦九韶把它的方法稱爲「開多乘方法」。

數書九章共分成九類，其中的大衍類就是介紹「大衍求一術」。在這九類中，有二十幾個問題需要利用方程式來求解，其中次數最高者是十次。我們舉田域類第一題「尖田求積」爲例來解說他的「

開多乘方法」：

「問有兩尖田一段，其尖長不等。兩大斜三十九步，兩小斜二十五步，中廣三十步，欲知其積幾何？」

「答曰：田積八百四十步。」

就這個問題而言，秦九韶繞了一個大圈子而得出一個四次方程式，是一件很奇怪的事，因爲這個問題只利用勾股定理及三角形面積公式就可求解。例如，右圖 13 中，利用勾股定理，上側三角形的高爲三十六步，下側三角形的高爲二十步，因此，上側三角形的面積爲五百四十（平方）步，而下側三角形的面積爲三百（平方）步，於是，尖田面積爲八百四十（平方）步。

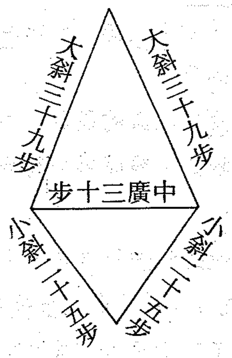


圖 13

但是，若令上側三角形面積爲 $A$，下側三角形面積爲 $B$，尖田面積爲 $x$，則 $x=A+B$，而且

$$\begin{aligned} x^4 &= A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4 \\ &= 2(A^2+B^2)(A+B)^2-(A^2-B^2)^2 \\ &= 2(A^2+B^2)x^2-(A^2-B^2)^2 \text{。} \end{aligned}$$

因此，得四次方程式

$$-x^4+763200x^2=40642560000 \text{。}$$

當然，秦九韶得到上面這個開方式的方法不是採用我們的做法，他的「術曰」是這樣寫的：

「術曰：以少廣求之，翻法入之。置半廣自乘，爲半冪；與小斜冪相減，相乘，爲小率。以半冪與大斜率相減，相乘，爲大率。以二率相減，餘自乘，爲實。併二率，倍之，爲從上廉。以一爲益隅，開翻法三乘方，得積。」

至於他的解法，即「開翻法三乘方」，依據他的「草曰」（原文甚長），是這樣的：

| | | | |
|---|---|---|---|
| 上商 | | 8 | 8 |
| 實 | −40642560000 | −40642560000 | +38205440000 |
| 方 | 0 | 0 | +98560000 |
| 從上廉 | +763200 | +763200 | +123200 |
| 下廉 | 0 | 0 | −800 |
| 益隅 | −1 | −1 | −1 |
| | (1) | (2) | (3) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 上　商 | 8 | 8 | 8 |
| 實 | ＋38205440000 | ＋38205440000 | ＋38205440000 |
| 方 | －826880000 | －826880000 | －826880000 |
| 從下廉 | －1156800 | －3076800 | －3076800 |
| 下　廉 | －1600 | －2400 | －3200 |
| 益　隅 | －1 | －1 | －1 |
| | (4) | (5) | (6) |

| | | |
|---|---|---|
| 上　商 | 84 | 840 |
| 實 | ＋38205440000 | 0 |
| 方 | －826880000 | －955136000 |
| 從上廉 | －3076800 | －3206400 |
| 下　廉 | －3200 | －3240 |
| 益　隅 | －1 | －1 |
| | (7) | (8) |

圖 14

由圖 14(1)得(2)，乃是「上廉超一位，益隅超三位，商數進一位。上廉再超一位，益隅再超三位，商數再進一位。上商八百爲定」。若以現代術語表示，相當於令 $x=100x_1$，則原方程式變成

$$-100000000x_1^4+7632000000x_1^2=40642560000\text{。}$$

由圖 14(2)得(3)，乃是「以商生隅，入益下廉。以商生下廉，消從上廉。以商生上廉，入方。以商生方，得正積，乃與實相消」。由圖 14(3)得(4)，乃是「以商生隅入下廉：一變。以商生下廉，入上廉內，相消。以正負上廉相消。以商生上廉，入方內相消」。由圖 14(4)得(5)，乃是「以商生隅入下廉：二變。以商生下廉，入上廉」。由圖 14(5)得(6)，乃是「以商生隅入下廉：三變」。而這四個階段的變換相當於連續作四次綜合除法如下頁：

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-100000000 & +\ 0 & +\ 7632000000 & +\ 0 & -40642560000 & \underline{|8} \\
& -\ 800000000 & -\ 6400000000 & +\ 9856000000 & +78848000000 & \\
\hline
-100000000 & -\ 800000000 & +\ 1232000000 & +\ 9856000000, & +38205440000 & \\
& -\ 800000000 & -12800000000 & -92544000000 & & \\
\hline
-100000000 & -1600000000 & -11568000000, & -82688000000 & & \\
& -\ 800000000 & -19200000000 & & & \\
\hline
-100000000 & -2400000000, & -30768000000 & & & \\
& -\ 800000000 & & & & \\
\hline
-100000000, & -3200000000 & & & &
\end{array}
$$

由圖14(6)得(7)，乃是「方一退，上廉二退，下廉三退，隅四退；商續置：四變」。其代數意義，乃是令 $y_1 = 10(x_1 - 8)$，則得

$$
-10000\,y_1^4 - 3200000\,y_1^3 - 307680000\,y_1^2 - 8268800000\,y_1 + 38205440000 = 0\text{。}
$$

由圖14(7)得(8)，乃是「以商約實，續商置四十；生隅，入下廉內。以商生下廉，入上廉內。以商生上廉，入方內。以續商四十命方法，除實，適盡。所得商數八百四十步，為田積」。這個階段表示下面這個綜合除法：

$$
\begin{array}{rrrrrl}
-10000 & -3200000 & -307680000 & -8268800000 & +38205440000 & \underline{|4} \\
& -\ 40000 & -\ 12960000 & -1282560000 & -38205440000 & \\
\hline
-10000 & -3240000 & -320640000 & -9551360000, & 0 &
\end{array}
$$

因為除盡了，所以，$y_1 = 4$ 是上述 $y_1$ 之四次方程式的一個根；所以 $x_1 = 8 + \frac{1}{10} y_1 = 8.4$ 是上述 $x_1$ 之四次方程式的一個根；因此，$x = 100\,x_1 = 840$ 是原方程式的一個根。

讀者自然可以看出，秦九韶的「開多乘方法」是賈憲之「增乘開方法」的推廣，而其方法與近代的 Horner 方法完全相同。

中國人在解高次方程式的發展方面，到了秦九韶手上已經達到顛峯。不過：其中却有一個問題尚未解決，那就是沒有發現勘根定理；也就是說，在上述 $x_1$ 的四次方程式中，怎麼知道先以8來進行綜合除法的呢？如果秦九韶或當時的數學家已有勘根定理的知識，就不難看出「尖田求積」的四次方程式中還有另一個正根 $x = 240$，而其餘兩根是 $x = -840$ 及 $x = -240$。在西方，西元十七世紀坐標幾何發展後，數學家已經由幾何直觀了解了勘根定理，即：當多項式 $f(x)$ 滿足 $f(a)\,f(b) < 0$ 時，則 $f(x) = 0$ 必有一根介於 $a$ 與 $b$ 之間。然而，這個定理的嚴密證明却要晚得多。西元1817年，波西米亞數學家 Bernhard Bolzano（1781～1848）給函數的連續性寫出了一個很恰當的定義，並且還證明多項式是連續函數。然後，他嘗試著要證明連續函數的勘根定理。可惜，當時他對實數系及無理數的邏輯基礎還不夠透澈，所以，這個證明就不夠完整。因此，勘根定理的嚴密證明直到十九世紀末期才完成，而中國人則似乎從未接觸到這個定理。

## 九、李治的元之術

除了賈憲、劉益、及秦九韶等在高次方程式的解法方面所作的卓越貢獻之外，與秦九韶同時代而居住於北方的李治（後改名李冶，1192～1279）也有一項領先世界的成就，那就是「天元術」。這是一種根據已知條件列出方程式的方法。在流傳至今的數學著作中，對「天元術」最先作有系統敘述的是李治所著的測圓海鏡（西元1248年）及益古演段（西元1259年）。

所謂「天元」，就是問題中的未知數，「立天元為某某」也就是「設 $x$ 為某某」的意思。用「天元術」來記多項式或方程式，常常在一次項係數旁記一個「元」字，或在常數項旁記一個「太」字。習慣上，把「太」寫在「元」之上，例如，在益古演段中，李治就是這麼使用的；不過，早先在測圓海鏡中，「元」與「太」兩字的上下順序却恰好相反。下面我們舉測圓海鏡第七卷第二題為例，來說明李治的「天元術」。原題是：

「假令有圓城一所，不知周徑，或問丙出南門直行一百三十五步而立，甲出東門直行一十六步見之，問徑幾何？」

下面我們把李治的解法之一寫在左邊，而右邊則以現代數學符號加以解釋（以數字代替算籌，「元」在「太」之上）：

「草曰：立天元一為半城徑，副置之，上加南行步，得

| |
|---|
| 1 元 |
| 135 |

為股。下位加東行步，得為勾。

| |
|---|
| 1 元 |
| 16 |

勾股相乘，得為直積一段。以

| |
|---|
| 1 |
| 151 元 |
| 2160 |

天元除之，得為弦。

| |
|---|
| 1 |
| 151 太 |
| 2160 |

以自之，得為弦冪，寄左。

解：設 $x$ 為圓城半徑，則得

股 $\overline{OA}=x+135$，

勾 $\overline{OB}=x+16$。

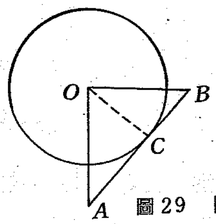


圖 29　圓城半徑

勾×股 $=(x+135)(x+16)$

$=x^2+151x+2160$，

以 $x$ 除之，得

弦 $=x+151+2160x^{-1}$，

（因為 $\overline{OA}\times\overline{OB}=\overline{OC}\times\overline{AB}$）。

自乘之，得

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 302 | |
| 27121 | 太 |
| 652320 | |
| 4665600 | |

乃以勾自之，得

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 32 | 元 |
| 256 | |

又以股自之，得

| | |
|---|---|
| 1 | |
| 270 | 元 |
| 18225 | |

二位相併，得爲同數。

| | |
|---|---|
| 2 | |
| 302 | 元 |
| 18481 | |

與左相消，得益積開三乘方，得一百二十步，爲半城徑也。

| | |
|---|---|
| -1 | |
| 0 | |
| 8640 | 太 |
| 652320 | |
| 4665600 | |

$(弦)^2 = x^2 + 302x + 27121 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2}$，　　（左式）

又 $(勾)^2 = (x+16)^2 = x^2 + 32x + 256$，

$(股)^2 = (x+135)^2 = x^2 + 270x + 18225$。

$(勾)^2 + (股)^2 = 2x^2 + 302x + 18481 = (弦)^2$。

與“左式”相消，得

$-x^2 + 8640 + 652320x^{-1} + 4665600x^{-2} = 0$，

亦卽

$-x^4 + 8640x^2 + 652320x + 4665600 = 0$，

解之，得 $x = 120$，

卽：圓城半徑爲 120 步。

根據前面左右兩側的相對照，可以看出「天元術」中列方程式的方法與現代代數中的方法大致相同。同時，也可以了解，李治也已了解解高次方程式的方法，可惜，他的「草曰」却看不出怎麼解的。另外，在上面的「草曰」中，也可以看出當時的中國數學家們已經對多項式的加、減、乘等運算相當地熟練了。

## 十、朱四傑的四元消法

把「天元術」由只包含一個未知數的方程式推廣到包含兩個、三個、四個未知數的聯立方程組，由此發展成「四元術」，這是西元十三世紀中國數學家繼「天元術」之後的另一項傑出的成就。

「四元術」是朱世傑的創見，關於朱世傑的年代，後世已不可考，只知他在西元1299年著算學啓蒙三卷，1303年著四元玉鑑三卷，而「四元術」就是記載在後一部著作中。算學啓蒙一書，由乘除法運算起，到「開方術」、「天元術」等，可以說包含了當時數學上各方面的內容，而且體系完整，由淺而深，確實是一部很好的“啓蒙”書籍。至於四元玉鑑，則是以二元以及多元聯立方程組為其主要內容，其中四元方程組7題，三元方程組13題，二元方程組36題。這一部書的另一重要內容，是有關有限級數求和的「垛積招差」。

所謂「四元術」中的四元，乃是在天元之外，再立地元，人元與物元。依莫若為四元玉鑑所寫的序文所說：「按天、地、人、物立成四元，其法以元氣居中，立天元一於下，地元一於左，人元一於右，物元一於上，上升下降，左右進退，互通變化，乘除往來」。換言之，「四元術」就是把四元多項式的係數排列成一個平面，常數項居中，$x$（天元）的各項係數寫在下面，$y$（地元）的各項係數寫在左邊，$z$（人元）的各項係數寫在右邊，$u$（物元）的各項係數寫在上面。例如，$x^2+3xy+z+y+2y^2+u-u^2+5xz$ 表示成

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | −1 | |
| | | 1 | |
| 2 | 1 | 太 | 1 |
| | 3 | 0 | 5 |
| | | 1 | |

四元玉鑑中曾以三個例題簡要地敘述了「四元消法」，但是，文字隱晦而且過於簡略，致使後世對其中某些步驟的確實作法不能眞正了解。例如，該書第三題「三才運元」需要解下面這個三元聯立方程組

$$\begin{cases} -x-y-xy^2-z+xyz=0 & \text{今式} \\ x-x^2-y-z+xz=0 & \text{云式} \\ x^2+y^2=z^2 & \text{三元之式} \end{cases}$$

解法的原文是：「以云式剔而消之，二式皆人易天位，前得

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −2 | 太 |
| −1 | 1 | −1 | |
| | 1 | −2 | |

，後得

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | −2 | 2 | 太 |
| | −2 | 4 | −2 |
| | | 1 | −2 |

。互隱通分，相消，左得 $\boxed{\begin{array}{rr} 7 & -6\text{太} \\ 3 & -7 \\ -1 & -3 \\ & 1 \end{array}}$ 右得 $\boxed{\begin{array}{rr} 13 & -14\text{太} \\ 11 & -13 \\ 5 & -15 \\ -2 & -5 \\ & 2 \end{array}}$ ，內二行得 $\boxed{\begin{array}{r} -78\text{太} \\ -157 \\ -146 \\ -43 \\ 10 \\ 11 \\ -2 \end{array}}$ ，外二行得 $\boxed{\begin{array}{r} -98\text{太} \\ -133 \\ -130 \\ -67 \\ 14 \\ 11 \\ -2 \end{array}}$ 。內外相消，四約之，得開方式 $\boxed{\begin{array}{r} -5\text{太} \\ 6 \\ 4 \\ -6 \\ 1 \end{array}}$ ，三乘方開之，得弦五步，合問」。

這段文字中，最隱晦不清的詞句是「剔而消之」及「互隱通分」。清朝數學家沈欽裴（西元1829年）及羅士琳（西元1836年）都寫過四元玉鑑細草，可是，兩人對「剔而消之」的解釋法就不相同。中國人自己發展出來的代數學到朱世傑之後，就後繼無人了，雖然，清朝有不少數學家再鑽研宋、元的代數學，可是，年代相隔數百年而其間又無接棒的人，致使古人的原意無法把握，似乎也很尋常。

如果我們先不計較「剔而消之」的原意為何，且用我們的方法來消元。由「云式」及「三元之式」消去 $y$，可得

$$x^2+(x-x^2-z+xz)^2=z^2,$$

展開，兩邊消去 $z^2$，再除以 $x$，得

$$2x-2x^2+x^3-2z+4xz-2x^2z-2z^2+xz^2=0 \qquad \text{(A)}$$

再由「今式」及「云式」消去 $y$，則得

$$-x+(xz-1)(x-x^2-z+xz)-x(x-x^2-z+xz)^2-z=0,$$

展開，整理，可得

$$x(-2-z-2z^2+x)-x^2(x-2x^2+x^3-3z+5xz-2x^2z-3z^2+xz^2)=0,$$

將 (A) 式代入上式第二個括號中，得

$$x(-2-z-2z^2+x)-x^2(-x-z+xz-z^2)=0,$$

兩邊除以 $x$，得

$$-2+x+x^2-z+xz-x^2z-2z^2+xz^2=0 \qquad \text{(B)}$$

若將(A)式與(B)式中之 $z$ 定為天元（此即「人易天位」），$x$ 定為地元，則依「四元術」之籌式排法，(A)式與(B)式所排出來的籌式分別為朱世傑解法原文中「後得」與「前得」之後的籌式。假定我們的消元法與朱世傑的消元法相合的話，那麼，「以云式剔而消之」這七個字的意義就很不簡單了。

其次，將 (A) 式與 (B) 式就 $x$ 整理，得

$$\begin{cases} x^3+(-2z-2)x^2+(z^2+4z+2)x+(-2z^2-2z)=0 & \text{(A)} \\ \quad (-z+1)x^2+(z^2+z+1)x+(-2z^2-z-2)=0 & \text{(B)} \end{cases}$$

將 (A) 式乘以 $z-1$，(B) 式乘以 $x$，相加，整理，得

$$(-z^2+z+3)x^2+(z^3+z^2-3z-4)x+(-2z^3+2z)=0 \qquad \text{(C)}$$

將 (B) 式乘以 $-z^2+z+3$，(C) 式乘以 $z-1$，相加，整理，得

$$(-z^2+3z+7)x+(z^3-3z^2-7z-6)=0 \qquad \text{(D)}$$

將 (D) 式乘以 $(z-1)x$，(B) 式乘以 $-z^2+3z+7$，相加，整理，得

$$(-2z^3+5z^2+11z+13)x+(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)=0 \qquad \text{(E)}$$

將 (D) 式與 (E) 式依「四元術」排成籌式

外二行

$$\boxed{\begin{array}{rrl} 7 & -6 & 太 \\ 3 & -7 & \\ -1 & -3 & \\ & 1 & \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{rrl} 13 & -14 & 太 \\ 11 & -13 & \\ 5 & -15 & \\ -2 & -5 & \\ & 2 & \end{array}}$$

內二行

這兩個籌式就是朱世傑解法原文中「左得」與「右得」之後的籌式。可見「互隱通分，相消」這幾個字的含義也不簡單。

最後，內二行相乘，乃是

$$(z^3-3z^2-7z-6)(-2z^3+5z^2+11z+13)$$
$$=-2z^6+11z^5+10z^4-43z^3-146z^2-157z-78,$$

外二行相乘，乃是

$$(-z^2+3z+7)(2z^4-5z^3-15z^2-13z-14)$$
$$=-2z^6+11z^5+14z^4-67z^3-130z^2-133z-98$$

這兩個乘積相等（即由 (D)，(E) 相去 $x$），故得

$$4z^4-24z^3+16z^2+24z-20=0,$$
$$z^4-6z^3+4z^4+6z-5=0,$$

這就是朱世傑所得的開方式，它只有一正根 $z=5$，一負根，兩虛根。當 $z=5$ 時，依 (D) 式，得 $x=3$，依云式，得 $y=4$。這一組是原方程組僅有的一組正根。儘管朱世傑只是求出正根，然而，這個問題需要經過如此複雜的過程才能求得解，以當時的數學背景而言，他能有此成就，也難怪他被認爲是貫穿古今的一位傑出數學家。李約瑟在他所著的中國之科學與文明中，也稱「有了朱世傑，中國的代數學，方才達到了高水準」。

高次聯立方程組的消去法，在西方，最先作有系統探討的是法國數學家 Etienne Bezout（1730～1783），他在 1779 年提出一種方法，若我們要從方程式 $f(x,y)=0$ 與 $g(x,y)=0$ 中消去未知數 $y$，則可選取多項式 $F(x)$ 與 $G(x)$，使得 $F(x)f(x,y)+G(x)g(x,y)$ 中 $y$ 的次數儘量低。如此

，反覆進行，通常可得出所要的形式。事實上，依沈欽裴與羅士琳等的看法，朱世傑的「互隱通分」就是這種方法。如果這種看法正確的話，則朱世傑比 Bezout 早了將近五百年提出這種消去法。

## 十一、開方作法本源圖與古法七乘方圖

朱世傑的四元玉鑑中有一圖稱為「古法七乘方圖」，這個圖中列出了 $(x+y)^n$ 之展開式中各項的係數，$n=1,2,\cdots,8$。參看圖 15。 其上所寫的「開則橫視」，乃是指每一橫行中的各數，就是開方時應採用的係數，例如，在圖 11 中的(5)及(8)，由下往上看，係數依次為 1、3、3、1（最後的 1，是指 $N-a^3$，$N-(a+b)^3$ 中 $a^3$ 與 $(a+b)^3$ 的係數）；另一方面，「中藏皆廉」，乃是說此圖中間部分的各數都是開方時的「廉」。

事實上，這個圖並非朱世傑的創見，而是賈憲，因為楊輝在他 1261 年的著作詳解九章算法中就有一個「開方作法本源圖」，其中就已列出右圖 15 中的上八行，即比右圖 15 少一行，而在該書中，楊輝說它「出釋鎖算書，賈憲用此術」。

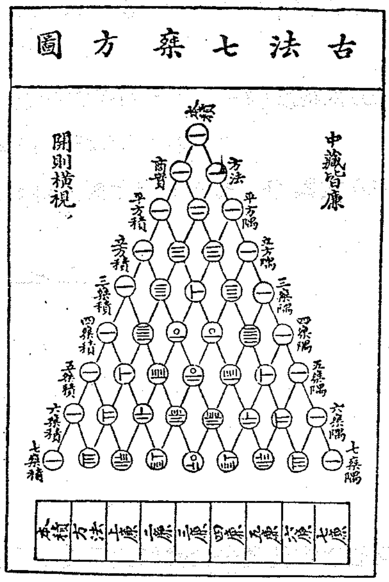


圖 15

圖 15 中各數所列成的三角形，在現代數學中稱為 Pascal 三角形，因為法國數學家 Blaise Pascal（1623～1662）在 1654年指出了這個三角形中各數間的關係，即：每一數都是其左上與右上兩數之和。事實上，就這個三角形的發現而言，賈憲比 Pascal 早了五百多年，而在這期間，阿拉伯數學家 Omar Khayyam（1050～1122）及十五世紀的 Al-Kashi 的著作中都曾出現這個三角形，Al-Kashi 所列出的比圖 15 還多了一行。而歐洲的數學書籍中最先發現這個三角形的，則是德國數學家 Peter Apianus（1495～1552）在1527年的著作Rechnung 的封面上，這些人雖然都比賈憲晚，可是，都比 Pascal 早。

以上我們把十三世紀以前，中國數學家在方程式論上的卓越成就作了重點式的介紹；就計算方法方面而言，中國數學家的領先其他各國或許是由於計算工具——算籌的簡便，可是，從另一方面來看，代數上各種定性的結果都沒在中國萌芽（例如中國人未曾考慮過根與係數關係），或許也就是受到算籌的反面影響。而朱世傑以後，中國數學的黃金時期結束，有明一朝，只在算器的改良上有其貢獻（珠算的普遍使用是始於明朝），其後，西學輸入，東西交通發達，各國的成就逐漸地都融進世界數學的熔爐之中，原有的符號及術語也都被那些千錘百鍊的簡便符號及術語所取代了。　（待續）