

演繹幾何 的替換

林福來

國立臺灣師範大學數學系

國內即將推廣的國中數學新教材，目前可能正在精心編寫中。此次教材的改變，幾何部分引進若干變換幾何¹。變換幾何的引進，英國中學數學教科書是主要的參考資料。關於英國本身，經過二十多年的教學，對於變換幾何這份教材的評估，在CSMS (Concepts in Secondary Mathematics and Science) 研究小組的報告“中學生的理解力”一書中，有一些建設性的建議，筆者將其稍加整理，希望對編寫國中數學教科書的專家們有參考價值。

另外，目前在英國 6th form (16~18歲) 的數學老師中，有一組人正在研究“演繹幾何的補償教材”。研究的基本假設是認為“根據假設，預測結果(實驗、討論)，然後證明或反證”，這種演繹的過程，對理工科的學生而言，極具教學價值。嚴密演繹法所介紹的平面幾何取消後，是不是需要再編寫另一分可以達成此教學目標的教材來替代，此研究小組正以模擬教材，進行6th form學生的理解力研究。如果研究結果良好，將來在英國的6th form數學中就可能會引進此類教材。筆者於元月底參加在北倫敦理工

學院舉行的研討會BSPLM (British Society for the Psychology of Learning Mathematics) 時，曾參與此研究小組的討論，在此順便將該小組的一些研究情形略加描述。

一、變換幾何教材所引起的問題

英國對於西元1960前及1960後的中學數學有個籠統的區別名稱。1960改革前的叫做“傳統數學”，1960以後的數學叫做“現代數學”。變換幾何就是一分新加入“現代數學”中的題材。二十年前，數學課程改革時，改革者對於引進新的數學題材的目標是

- a. 填注中學數學課程的新活力
- b. 改良傳統數學課的演講式教學法

關於此二目的，從此次CSMS的研究報告²中，發現對於原先的預期，所得到的是“失望”。

CSMS的研究過程中，不只就學生對變換幾何的認知情形，深入探討，同時也對變換幾何的教學方法做了問卷調查。研究與調查的結果，證實下列兩個問題的存在：

1. 許多學校，對於接受變換幾何這份教材，缺乏信心。
2. 許多數學老師，仍然不情願放棄傳統的演講式教學法。

比如說，CSMS的調查，發現僅有半數的學校，講授對稱這題材時，使用了摺紙與鏡子等簡單的教具〔2:p.137〕。

上面這兩個問題存在的原因可從兩個角度來看。一個是老師對變換幾何的信念問題，另一個是當初引進變換幾何的理由。

許多老師對於變換的題材，有個信念，認為一旦將變換的意義解釋清楚後，變換幾何的教材對於中學生的挑戰性、吸引力就極低。

這個信念，從CSMS對學生的測驗結果及測

驗後的面談紀錄中被證實是錯的，變換並不那麼容易可以理解。

二、引進變換幾何的理由

當初引進變換幾何的理由並不那麼冠冕堂皇。不是說此題材很重要，是學生必需的知識所以引進；而是與此題材的內涵無關的原因所造成的。首先我們來分析幾個可能的原由。

第一個原因是大家所公認的：“演繹幾何不適合中學生（11～16歲）學習”。當然大家批評演繹幾何的重心並不是幾何教材本身，而是表現此教材的方式——嚴密演繹法。對多數的中學生而言，演繹法的學習，只是徒增一些“死記”的項目而已；學生只記憶如何寫已知、求證與證明；往往一面寫證明，一面自己懷疑為什麼這麼明顯是對的結果，還要證明呢？真正能領略演繹法奧妙的學生，可說是極少數。大家一方面了解演繹幾何不適合學生學習，另一方面又認為演繹幾何是人類文明發展中，極高品質的一分文化資產，輕易放棄，將來一旦久而失傳，如何對得起古之賢者。因此變換幾何就以演繹幾何的替身出現在中學數學課程中。

第二個原因跟變換幾何的內涵較為相關。大家希望學生從變換的合成的學習過程中，發現並體會變換（平移、旋轉、鏡射）的合成具有良好的特性——封閉性，期望學生從這份具體的教材中，領略數學結構的內涵——尤其是群的結構。

關於這個理由，因為在中學階段，數學題材並沒有深入到探討數學結構的層次，老師到底要不要提出數學結構的問題來討論，莫衷一是，結果只是徒增困擾，師、生面對的學習目標變成是不能達成的口號。另一方面，CSMS的統計結果，發現許多學生對單一變換的認識，除了極簡單的變換外，認知上已感困難（參閱¹所摘錄的統

計數字），在此種認知不夠的情況下，我們怎能奢求學生發現“合成變換”的一般公式，再進而欣賞數學結構的美呢？

第三個理由是變換幾何是矩陣代數具體化的幾何意義，既然介紹矩陣，自然不能偏廢其幾何意義。

當然，矩陣與變換間密切的關聯，確是數學巧奪天工的地方，具體的變換以抽象的符號矩陣來表示，有點像魔術，令人嘆為觀止。問題是此層關聯，對多數的中學生而言是不是真那麼有意義呢？值得置疑！

列舉並討論了幾個引進變換幾何的理由後，我們發現唯一令人相信的理由是“變換幾何”為“演繹幾何”的替身。此替身不僅是教材內容的替換而已，同時還涵蓋更重要的教學法的改變。變換幾何的介紹可以透過實際的操作進行。處理此分教材可以較生動，不必像演繹幾何那樣形式化。當大家感覺一分精緻的知識領域——演繹幾何，由於不適合學生學習，不得不放棄時，非得另找一分同樣精緻的知識——變換幾何來替代不可。然而變換幾何並不如專家們想像的那麼適合於學生學習。中學生的學習興趣很不幸地與專家們對高品質知識的欣賞，根本不相配合。因此引進變換幾何後，新的問題又接著產生。

三、CSMS的建議

從CSMS的研究結果中，研究小組提出兩點引伸：

1. 因為引進變換幾何的理由，不能令人信服，所以相對於其他的中學數學項目，變換幾何可以視為是不重要的題材來處理。

2. 變換幾何以其本身的完整面貌出現於中學課程中，自成一個項目，以其內容所能達成的目標為主，介紹給學生。

對於上述兩點引伸，CSMS小組認為第2點是正確的處理方式。

CSMS同時對於變換幾何的教學提出下列的建議：

(1) 單一的變換，幾乎所有學生都能了解。換句話說，中學生具有學習變換的基礎。為了加強學生的觀念，單一變換的教材可以深一點。

(2) 變換的合成；教學時，個別的每一變換都宜選簡單的。比如說，利用“翻轉”或“旋轉”將一卡片變換至原來的樣子及位置，多數學生都還能理解，也能操作。

(3) 如果變換幾何要加以強調；亦即以其內涵當做學習目標，那麼訓話式、演講式的教學法是不恰當的。變換可以解釋成實際的動作“摺”與“轉”，所以變換幾何的教學方式應該配合實際的操作及發現式的學習。

(4) 變換的教學可分成下面幾個步驟：

- 實際的摺、轉等動作的操作。
- a 中各動作以數學語言表示。
- 描述圖形經變換作用後的像。
- 畫完變換後的像，可以倒推回去，一步一步以該動作檢驗結果，或者畫一較簡單的圖當參考。

一種已經廣為流傳的變換幾何的教學法是直接引導學生去發現變換的性質及公式，並且從實例中嘗試去掉不正確的結論。此種探討法可以說較近於自然科學的研究方法，不是數學一向的探討方式。這種探討過程中，學生的活動對於他們思考力的發展是非常重要的。

四、演繹法的補償教材

英國中學生（11～16歲）約有18%升入6th form，念完兩年6th form後，其中約有半數升入大學就讀。6th form的學生程度高

並且年齡已經超過16歲，智力發展較成熟，對演繹法的理解力到底已達怎麼樣的層次，這是A. Swan等人正在研究的課題。

以下是幾個擬好來測驗學生對演繹法的理解層次的問題（取材自BSPLM研討會的“Geometry and Axiomatic Method”小組討論）。

【例1】 平行六邊形

一六邊形ABCDEF中，如果 $AB \parallel ED$ ， $BC \parallel FE$ 且 $CD \parallel AF$ ，就叫做平行六邊形。下圖就是一個平行六邊形的例子。

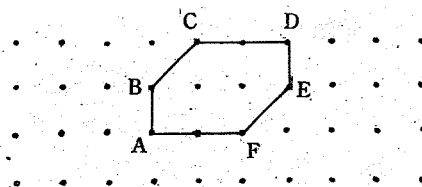


圖 1

問題：

(1) 下圖這個六邊形是否為一平行六邊形？是/否。詳細說明“是”或“否”的理由。

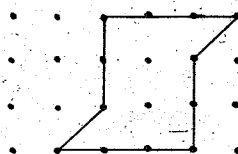


圖 2

(2) 一個正六邊形的六邊都相等且六個角也都相等。下圖是一個正六邊形的例子：



圖 3

考慮下面兩個問題：

- 每一個平行六邊形都是正六邊形。
- 每一個正六邊形都是平行六邊形。

對上面這兩個敘述，判定其真偽，並說明你

的答案。

此例子，對一班較資優的 6th form 學生共 20 人的測驗結果，問題(1)答是的有 14 人，答否的有 6 人。答否的學生提出的理由有一半說明“圖 2 的六邊形不是凸多邊形”，有兩個邊不是對邊。答是的主要的理由是“有 6 個邊，形成 3 雙平行且相等的邊”。

問題(2)，答(a)“錯”(b)“對”的有 14 人。此 14 人與問題(1)答是的 14 人不一樣。他們的說明有 12 人舉圖 1 或圖 2 為反例。

【例 2】組隊

四個女孩：小惠、小芳、小明和小英，每兩人組一隊，共有六種可能的組隊方法；即

{小惠，小芳}，{小惠，小明}，

{小惠，小英}，{小芳，小明}，

{小芳，小英}，{小明，小英}。

兩隊如果沒有共同的隊員就叫做平行。

例如，{小惠，小芳}和{小明，小英}平行。

問題：

(1) {小惠，小芳}和{小芳，小明}是否平行？是/否。並說明理由。

(2) {小惠，小英}和{小芳，小明}是否平行？是/否，並說明理由。

(3) “兩個不同的隊，如果不平行就恰含有一共同的隊員”。上面這敘述真確否？真/偽。並說明為什麼是真或是偽。

Swan 先生等人，擬了不少像例 1，例 2 這類的問題，先對 6th form 的學生進行測驗，再將所得資料分析，不久的將來即可發表完整的研究結果。屆時就可知有多少 6th form 的學生可以容易地接受“演繹法”。很可能此類演繹法的補償教材就將出現於 6th form 的教材中。

參考資料

1. 林福來，談中學幾何教材，科學教育月刊，46，71 年 1 月，14~24。
2. Hart, K. M. (ed.), "Children's Understanding of Mathematics: 11~16", John Murray, 1981. 137~157. □

附言：筆者一再介紹 Hart 這本“中學生的數學理解力”。欲訂購的朋友最好直接向 John Murray 出版社接洽，或者寫信向 Dr. K. M. Hart 購買，比較便宜。Dr. Hart 跟我說別向其他書商買，否則可能要多付約 $\frac{1}{3}$ 的價錢。

Dr. K. Hart, John Murray Ltd,
SESM 50 Albemarle St.
Fulham London W1X 4BD
London SW6 7SR England.
England