從組合學觀點來設定 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ 的求解

何景國

私立延平中學

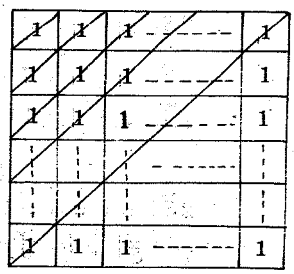
自然數乘冪之和$\sum_{i=1}^{n} i^k$（其中 $k=1$，2，3 ）是高中數學課程常遇到的問題。因爲它的應用相當廣，所以一般高中教科書裏都強調它的重要性。由於教材裏所用的是數學歸納法，並沒有介紹它的直接證明方法。因此，本文將從組合學觀點，以三種不同角度來設定其求解的方法。現在分三部份來說明。首先於第一部份，說明用組合構形的內在性質來解的方法，其次於第二部份介紹一個特定的生成函數；並例舉這個函數如何被用來求解的例子及第三部份用組合公式來求解法。

第一部份

假如我們將連續的自然數分別依照下面的規則填入一個 $n\times n$ 格的方格紙內則我們就可以求得

$$\sum_{i=1}^{n} i^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots\cdots + n^k \quad (k=1,2,3)$$

之值。



圖一

① $\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ 的求證：

排列規則：於方格紙內，各小格均填入數字「1」（得圖一）。

將方格紙內從左上每一斜線上各數目相加得：每一斜線上各數目相加之和。

$$=\frac{1}{2}[\text{（方格紙內各小格的數目總和）}+n\ ]$$

數學式子爲：

$$1+2+3+\cdots\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}[(n^2)+n]$$

即：

$$\sum_{i=1}^{n} i^1 = \frac{1}{2}n(n+1)$$

② $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ 的證明

1	2	3	----	n
2	3	4	----	$n+1$
3	4	5	----	$n+2$
⋮	⋮	⋮		⋮
n	$n+1$	$n+2$	----	$2n-1$

圖二

排列規則：（見圖二）

(1) 第一列各小方格是1到 n 的自然數排列。

(2) 第二列各小方格是2到 $n+1$ 的自然數排列。

(3) 第三列各小方格是3到 $n+2$ 的自然數排列。

……………………………………………………

(n) 第 n 列各小方格是 n 到 $2n-1$ 的自然數排列。

根據上述規則及圖二，我們得到下列之關係式：方格紙內各數字總和

$=\sum$（各相對應的行與列圍成之 ⅃ 形內各數字的和）

設 S 表方格紙內各數字之總和且以 S_i 表第 i 行與每第 i 列圍成之 ⅃ 形內各數數字的和則：

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots\cdots + S_n \quad \cdots\cdots(甲$$

甲式中 S 的計算：

令 $\overline{S}_j$ 表第 j 個 ⅃ 之列中各數字的總和。

得：

$$2\overline{S}_1 = (n+1)n = n^2 + n$$

$$2\overline{S}_2 = (n+1+2)n = n^2 + 3n$$

$$2\overline{S}_3 = (n+2+3)n = n^2 + 5n$$

…………………………

$$2\overline{S}_n = (n+n-1+n)n = n^2 + (2n-1)n$$

相加得

$$2(\overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \cdots\cdots + \overline{S}_n) = 2S = n^2(n) + (1+3+5+\cdots\cdots+2n-1)n$$

$$\Longrightarrow \quad S = n^3$$

甲式中 S_i 的計算　$i = 1, 2, \cdots\cdots, n$

令 S'_j 表第 j 個 ⅃ 之行中各數字的總和

則：$\overline{S}_j = S'_j \qquad (j=1, 2, \cdots\cdots, k, \cdots\cdots, n)$

$\Longrightarrow \quad 2\overline{S}_k = S_k + (2k-1)$

其中：$\overline{S}_k = \frac{1}{2}[k^2 + (2k-1)k]$

故：

$$S_k = 3k^2 - 3k + 1$$

因此，甲式可寫成：

$$S = [3(1)^2 - 3(1) + 1] + [3(2)^2 - 3(2) + 1] + \cdots\cdots + [3(n)^2 - 3(n) + 1]$$

即：

$$= 3(1^2 + 2^2 + \cdots\cdots + n^2) - 3(1 + 2 + \cdots\cdots + n) + n$$

整理後得：

$$1^2 + 2^2 + \cdots\cdots n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

或：

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

1	2	3	-----	n
2	4	6	----	$2n$
3	6	9	----	$3n$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$2n$	$3n$	-----	n^2

圖三

③ $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ 的證明

排列規則：（見圖三）

(1) 第一列各小方格是從 1 到 n 的自然數排列。

(2) 第二列各小方格是 2，4，6，……，$2n$ 的自然數排列。

(3) 第三列各小方格是 3，6，9，……，$3n$ 的自然數排列。

………………………………………………………………

(n) 第 n 列各小方格是 n，$2n$，$3n$，……，n^2 的自然數排列。

根據上述規則及圖三，我們得到下列之關係式：方格紙內各數字總和

$=\sum$（各相對應的行與列所圍成 形內各數字的和）

設 S 表方格紙內各數字之總和且以 S_i 表第 i 列與第 i 行所圍成 形內之各數字的和。

得：

$$S = S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(乙)$$

乙式中 S 的計算：

設 $\overline{S}$ 爲第 j 個 之列中各數字的總和：

得： $\overline{S}_j = j\overline{S}_1$ 　　其中 $V_j = 1, 2, \cdots\cdots, n$

又因爲 $S = \overline{S}_1 + \overline{S}_2 + \cdots\cdots + \overline{S}_n$

所以： $S = (1 + 2 + \cdots\cdots + n)\overline{S}_1$

上式中 $\overline{S}_1 = 1 + 2 + \cdots\cdots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

故： $S = (1 + 2 + \cdots\cdots + n)^2 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

第二部份

由上面第一部份，我們發覺自然數乘冪之和 $\sum_{i=1}^{n} i^k$ （其中 $k = 1, 2, 3$）分別是二次，三次，四次多項式，因此對於任一個自然數 k 而言，只要我們能夠證明確實存在一個滿足下列條件的 $k+1$ 次的多項式則我們可以利用這個特定多項式 $f_k(x)$，逐漸由 $x = 1, 2, 3$ 來求 $\sum_{k=1}^{n} i^k$ 之值。

$$\begin{cases} ① & f_k(0) = 0 \\ ② & f_k(x) - f_k(x-1) = x^k \\ ③ & f_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots\cdots + n^k \end{cases}$$

證明：

設 $f_k(x)$ 爲 x 的（$k+1$）次多項式，其係數分別是 $a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_k$

$$f_k(x)=a_0x^{k+1}+a_1x^k+\cdots\cdots+a_kx$$

則：

$$f_k(x-1)=a_0(x-1)^{k+1}+a_1(x-1)^k+\cdots\cdots+a_k(x-1)$$

$$=a_0\left(x^{k+1}-(k+1)x^k+\frac{k(k+1)}{2!}x^{k-1}-\cdots\right)+$$

$$a_1\left(x^k-kx^{k-1}+\frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}-\cdots\cdots\right)+\cdots\cdots\cdots+a_k(x-1)$$

故：

$$f_k(x)-f_k(x-1)$$

$$=a_0\left[x^{k+1}-x^{k+1}+(k+1)x^k-\frac{k(k+1)}{2!}x^{k-1}+\cdots\right]+$$

$$a_1\left[x^k-x^k+kx^{k-1}-\frac{k(k-1)}{2!}x^{k-2}+\cdots\cdots\right]+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

對於：

$x=1$　時得：　$f_k(1)-f_k(0)=1^k$

$x=2$　時得：　$f_k(2)-f_k(1)=2^k$

…………………………………

$x=n$　時得：　$f_k(n)-f_k(n-1)=n^k$

上述各項相加得：

$$f_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots\cdots+n^k=\sum_{i=1}^{n}i^k$$

應用例說

(1) 若 $k=0$　則　$f_0(n)=\sum_{i=1}^{n}i^0=n$

解：

設一一次多項式：$f_0(x)=a_0x^1$ 則

$$f_0(x)-f_0(x-1)=a_0(x-x+1)$$

$$=a_0=1x^0$$

$$\Rightarrow\qquad a_0=1$$

故：　$f_0(n)=1^0+2^0+\cdots\cdots+n^0=n$

(2) 若 $k=1$　則　$f_1(n)=\sum_{i=1}^{n}i^1=\frac{1}{2}n(n+1)$

解：

設一二次多項式　$f_1(x)=a_0x^2+a_1x$　則：

$$f_1(x)-f_1(x-1)=2a_0x+(a_1-a_0)=x$$

比較 x 的係數得：

$$\begin{cases} 2a_0 = 1 \\ a_1 - a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2} \quad ; \quad a_1 = \frac{1}{2}$$

故： $f_1(n) = 1^1 + 2^1 + 3^1 + \cdots\cdots + n^1 = \frac{1}{2} n(n+1)$

(3) 若 $k = 2$ 則 $f_2(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

解：

設一三次多項式 $f_2(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x$ 則

$$f_2(x-1) = a_0(x-1)^3 + a_1(x-1)^2 + a_2(x-1)$$
$$= a_0 x^3 + (a_1 - 3a_0)x^2 + (3a_0 - 2a_1 + a_2)x - a_0 - a_2 + a_1$$

另一方面知 $f_2(x) - f_2(x-1) = x^2$

得： $3a_0 x^2 + (2a_1 - 3a_0)x + a_0 - a_1 + a_2 = x^2$

比較 x^2 的係數得：

$$\begin{cases} 3a_0 = 1 \\ 2a_1 - 3a_0 = 0 \\ a_0 - a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_0 = \frac{1}{3}, \ a_1 = \frac{1}{2}, \ a_2 = \frac{1}{6}$$

即： $f_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots\cdots + n^2 = \frac{1}{3} n^3 + \frac{1}{2} n^2 + \frac{1}{6} n$

或： $f_n(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(4) 若 $k = 3$ 則 $f_3(n) = \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

解：

設一四次多項式 $f_3(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x$ 則：

$$f_3(x-1) = a_0(x-1)^4 + a_1(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_3(x-1)$$
$$= a_0 x^4 + (-4a_0 + a_1)x^3 + (6a_0 - 3a_1 + a_2)x^2$$
$$+ (-4a_0 + 3a_1 - 2a_2 + a_3)x + (a_0 - a_1 + a_2 - a_3)$$

同時有： $f_3(x) - f_3(x-1) = x^3$

得：

$$4a_0 x^3 + (-6a_0 + 3a_1)x^2 + (4a_0 - 3a_1 + 2a_2)x + (-a_0 + a_1 - a_2 + a_3) = x^3$$

比較上式兩端 x 的係數得：

$$\left\{\begin{array}{l}4a_0=1\\-6a_0+3a_1=0\\4a_0-3a_1+2a_2=0\\-a_0+a_1-a_2+a_3=0\end{array}\right. \rightarrow a_3=\frac{1}{4},\ a_1=\frac{1}{2},\ a_2=\frac{1}{4},\ a_3=0$$

故：

$$f_3(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{4}x^2=\frac{1}{4}x^2(x+1)^2$$

即：

$$f_3(n)=1^3+2^3+3^3+\cdots\cdots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

第三部份

這裏，我們先證明下面的組合公式

$$\sum_{k=m}^{n}C(k,m)=C(n+1,m+1)$$

然後例舉求自然數乘冪之和$\sum_{i=1}^{n}i^k$（$k=1,2,3$）

證明：

設 $n=m+p$ 且 $\sigma_n=\sum_{k=m}^{n}C(k,m)$ 則

因$(1+x)^m+(1+x)^{m+1}+(1+x)^{m+2}+\cdots\cdots+(1+x)^{m+p}=f(p)$中 x^m 項係數爲 σ_n

又因 $f(x)=(1+x)^m\left[\frac{(1+x)^{p+1}-1}{(1+x)-1}\right]=\frac{(1+x)^{m+p+1}-(1+x)^m}{x}$ 中，x^m 項係數爲：

$$C(m+p+1,m+1)-C(m,m+1)$$

所以比較兩式中之 x^m 項係數得：

$$C(m+p+1,m+1)-C(m,m+1)=C(m+p+1,m+1)=C(n+1,m+1)$$

即：$\sum_{k=m}^{n}C(k,m)=C(n+1,m+1)$

公式得證。

應用例說

(1) 求證$\sum_{i=1}^{n}i^1=\frac{1}{2}n(n+1)$

解：因 $\sum_{k=1}^{n}C(k,1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{k!}{1!(k-1)!}=\sum_{k=1}^{n}k$

且 $\sum_{k=1}^{n}C(k,1)=C_{1+1}^{n+1}=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}$

故： $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$

(2) 求證：$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

解：因 $\sum_{k=2}^{n} C(k,2) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{2!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k$

故： $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k + 2\left[\frac{1}{3!}(n+1)n(n-1)\right]$

即： $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

(3) 求證：$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

解：因 $\sum_{k=3}^{n} C(k,3) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3!} k(k-1)(k-2)$

或： $C(n+1, 3+1) = \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} k\right)$

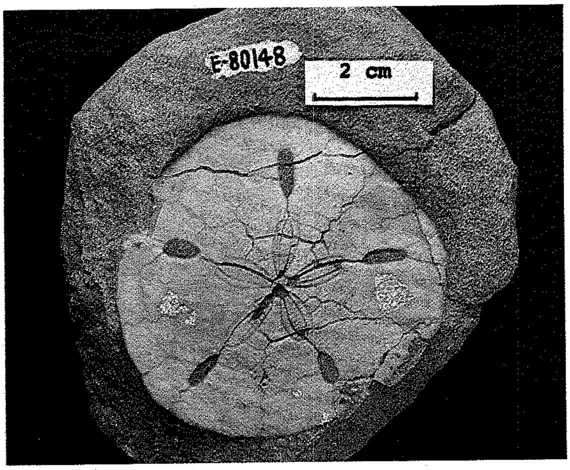
故： $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4}[(n+1)n(n-1)(n-2) - 2n(n+1)(2n+1) - 4n(n+1)]$

$= \frac{1}{4}(n^4 + 2n^3 + n^2)$

即： $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

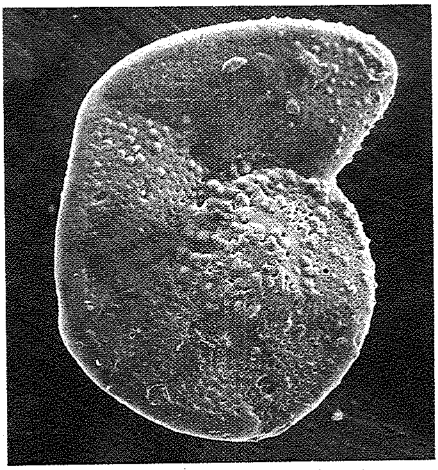
參考資料

1. 現行各版本高中數學教材，第1，2，3，4冊。
2. 黃武雄：數學教室，民國64年教育部輔助出版。
3. 賴漢卿：複變函數論，民國63年徐氏基金會出版。
4. 傅溥、潘壽山、繆龍驥：數學之內容方法及意義(二)，徐氏基金會出版。
5. 黃錦富：科學教育月刊，民國70年10月第43期P.67～68。
6. B. Baumslag and B. Chandler：group theory 中央圖書公司（民國58年）。
7. Levinson Redheffer：Complex Variables Los Angeles 1970.
8. J. Bass：Cours de mathematiques tome I et II Masson & Cie Paris 1968.



▲ 化石：*Astriclypeus*
（海膽類）
地層：南港層
地點：水湳洞

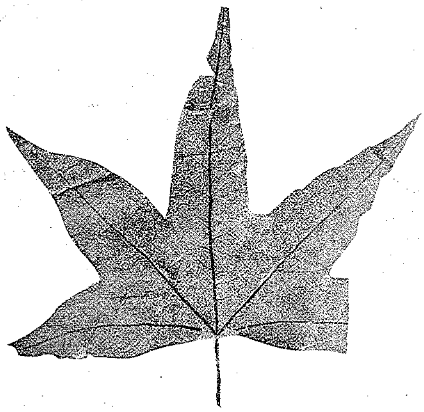
▲ 化石：*Amussiopecten*
（斧足類）
地層：公館凝灰岩
地點：基隆



▲ 化石：*Globorotalia*
（浮游有孔蟲）
地層：馬鞍山層
地點：恒春

▲ 化石：*Turritella*
（腹足類）
地層：五指山層
地點：金山

▲ 化石：*Ophiomorpha*
（生痕化石）
地層：五指山層
地點：金山



▲ 化石：*Acer*
（植物化石）
地層：石底層
地點：石碇