

書評：

中學生的數學理解力

林福來

國立臺灣師範大學數學系

在「談中學的幾何教材」一文中，筆者曾經介紹一本傑出的書「中學生的數學理解力」，此書現已被評為 1981 年度所出版數學教育方面最重要的書之一。西德數學教育家 Wittmann 教授寫了一篇書評，登在 1982 年 2 月份 (vol.13) 劍橋大學出版的期刊「Educational Studies in Mathematics」上。書評中簡介了該書的研究方法，主要的研究結果以及此書對數學教育的具體貢獻。筆者鑑於此書的重要性，謹譯此書評，供國內關心數學教育的朋友參考。

筆者很希望國內有心於數學教育工作的朋友，能在此書提供的研究模式下，對台灣中學生的數學理解能力，進行研究。在 Hart 的這本書中，還遺漏了許多我國中學的數學教材，主要原因當然是因兩國學制的差異。有心的朋友，要研究的話，個人認為不管別人已做或未做的題材，我們都值得做。由於文化背景的差異，我們需要對自己國家的年青人的數學理解力，探討出發展情況。英國做的此項研究，共花了六年，這是一項長程但值得做的研究。今天，我們在師大科教中心進行的國中、高中數學課程改進計畫，國中部分已屆推廣階段，這當然是一分得來不易的成果。可是我們絕不能說即將推行的課程是最佳的課程。隨著時代的進步，幾年後，我們如果又想提出更佳的課程來取代使用中的課程，那麼現在

就是有計畫地進行若干項跟課程改進計畫有關研究的時候。我們當然不希望每次的改進計畫，都只是找些教授專家，有經驗的教師來談談、做做而已。憑着大家個人的經驗、看法、提出的方案，進步的幅度不可能太大，所能改進的也極為有限。我們希望，將來參與改進計畫的專家，對於使用中課程的優、劣處，學生的理解力的評估，教材與教法的配合，那些新教材應該引進，尤其像電算器、微電腦等教材的引進，以及那些是不得不捨棄的教材……等等，都有深入的研究。台灣從事數學教育工作的朋友，大部分都非常優秀素質並不比歐、美先進國家的同行遜色，沒有理由不能將國內的數學教育更往前推進。一年復始，謹以此文與國內各位一起做數學教育工作的朋友共勉。

以下就是 E. Wittmann 教授所寫的書評，譯的不好的地方，還請方家指正，不勝感激。

本書的書名“中學生的數學理解力”已告訴我們全書的內容。這是一本去年所出版最重要的書中的一本，每一位獻身於數學教育工作的人都該精讀。本書是根據在倫敦大學 Chelsea 學院所進行的研究計畫“Concepts in Secondary Mathematics and Science”(CSMS) 的研究結果所提出的報告。此計畫原定的研究項目是

學生的成就、進步情形、學習上的困難，尤其重要的是依照中學數學教材所擬的理解層次的分類及學生理解力的分佈(參閱K.M.Hart; "Hierarchies in Mathematics Education," ESM 12(1981), 205~218及D.Küchemann, "Cognitive Demand of Secondary School Mathematics Items", ESM 12(1981), 301~316)。

本書的研究方法(第1章)，我認為作者很巧妙地綜合了簡易與極難的探討法。它共包含下列各步驟。

- (1) 從中學數學教材中，選擇重要的項目。
- (2) 將所選的項目，就其在普遍使用中的數學教科書中出現的情形加以分析。
- (3) 研讀其他研究員所得的結果及所引用的例子，選用其中的某些新發現。
- (4) 就所選的項目，設計一系列的問題，使這些問題能夠代表廣泛的不同難度且不受專有名詞的影響，同時設想要測驗的是理解力，而不是要測驗某技巧的重覆應用。
- (5) 經過小組討論後，以所選及所設計的題目為基礎，與三十位涵蓋相關年齡及能力的中學生面談，以評估所設計的題目。
- (6) 就面談後的結果，修飾或改變測驗題目。
- (7) 利用全班都參加的測驗方式，在倫敦的中學內就所擬的測驗題加以試測。以試測結果來進一步修飾測驗題，然後進一步舉行大型的測驗。
- (8) 舉行大型的樣本測試。

同時，考題的歸類，是依理解層次組成簡明的型態。

所選的項目是：測量，數的運算，位值和小數，分數，正、負數，比和比例，代數，圖形，

鏡射和旋轉，向量和矩陣。

第2~11章的內容，分別對應於上列各項目。描述所發現的結果，理解層次的分類以及對每一所選項目，從研究結果建議的較佳教學法。

第12章中比較不同年齡群的學生的表現，第13章試著描繪四種整體性的理解層次。最後1章，第14章(作者Kathleen Hart。就如G.Matthews在本章序言中所說的，Hart是整個計畫的龍頭)試著就整個研究的結果，對數學的教學作了一般性的建議。

本研究的主要結果如下：

- (1) 對大多數的學生而言，數學是一門**很難**的科目。
- (2) 學生因年齡增加而進步的理解力**相當有限**。有百分之五十的中學生，他們的理解力無法達到最高的3、4兩層。
- (3) 系列學習過程中，每一步的學習所需的預備知識，遠比我們一般想像的少。有一大群學生，在什麼是被要求先要知道以及什麼是他們可以學到的這兩者之間的認識，與教學無法配合。
- (4) 學生的學習成就與學生的智商有密切關係。為何我認為這本書這樣重要？

首先，本書提供我們以實驗的方法來討論中學生的能力，遠超越往日的“意見”式或以某人為證據的描述法。第二，本書的研究方法與數學教材的結構，中學課程與教師的教學有極密切的結合。第三、本書鋪設了一條可以進一步研究，與數學課的認知問題有關的各種變數的路。當然，進一步的認知研究還需要將問題的變數安排的更系統化。

本書寫的非常簡明。作者們以簡潔的筆調，很成功地描繪了一幅表現他們廣泛的研究範圍的構圖。簡潔的筆調，依我個人的意見並不適合於第

14 章的題材。實驗性的研究，絕不會直接導出結論，尤其是在複雜的教育問題中更不可能。因此仔細且適當地從各種角度加以對照討論是必需的。當然，我們也樂意知道本書的報告中有那些是當頭棒喝式的發現。不過，貿然地從表面現象去推斷結論是很危險的（例如，從本書中推論出：很多人放棄數學、班級編制有問題、標準太低、數學教育無用論等等）。與這些悲觀的看法正好相反，本書應該被數學教育家當做從事建設性構想的一種挑戰，尤其是要：

- (1) 探求一些比現行的學校數學教材更自然，更適合於學生的數學教材及表現法。（依我個人的意見，教學分析及教學經驗是有效的工具）。
- (2) 改進課程的結構，例如，有系統地引進複習教材以及將教材統整（鞏固原則）。
- (3) 設想一些教法，使能明顯地激發學生的思考能力的發展（參閱 D. Kent and K. Hedger，"Growing Tall"，ESM 11（1980），137～180）。

我相信實驗法與建構式的研究、發展間的激盪交流，一定可以促使數學教育達到一新的境界。

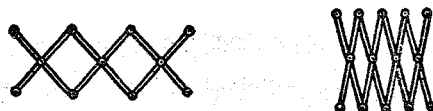
原作者：ERICH, WITTMANN ; University of Dortmund; Postfach 500500 ; D - 4600, Dortmund, W. Germany.

原 書：K. M. Hart (ed.), Children's Understanding of Mathematics: 11～16, London: John Murray, 1981.

鐵拉籬的數學

勇 清

當你上街時，沿途留心一下，就會發現，許多建築物及戲院的鐵門，都是下圖所示的這種鐵拉籬。這種鐵拉籬，雖然非常笨重，但是開關起來却非常方便。



有的人也許會感到驚異：一扇巨大的鐵門，輕輕一推，就可以把它擠扁，可是拉伸開來後，它却又是那樣牢固。如果你仔細觀察，就會發現，這些鐵門的構造是這樣的：它是用一根根的鐵條連接成菱形的形狀。當鐵拉籬被拉動時，這些菱形的形狀發生變化，但仍然保持是菱形。為什麼呢？因為連成菱形的那些鐵條，長度是固定不變的。

為什麼邊長固定的菱形，它的形狀會改變呢？這裏頭有著一點數學的道理。因為四邊及以上的多邊形，無法由各邊的長度來計算其各內角的度數，例如，四段長度為 1 的線段可以構成一個正方形，也可以構成一個內角分別為 60° 、 120° 、 60° 、 120° 的菱形。鐵拉籬的構造，正是利用了四邊形的這種不穩定性。

四邊形的這項性質，與三角形是不一樣的。因為一個三角形的三邊邊長固定時，根據餘弦定律，它的三個內角也跟著固定，因此，如果用鐵條圍成一個三角形，即使接合的地方並未栓緊，我們也不能把這個三角形的形狀壓扁。