方程式論發展史簡介(一)

趙文敏
國立臺灣師範大學數學系

要介紹方程式論的發展史，必須要先做正名的工作，也就是說，必須要先說明方程式論所討論的內容是什麼？假如我們把它當成一種“論”來看待，其內容是關於根、正根、負根、虛根之個數的決定，根與係數之關係的探討以及其他理論性的題材，則它的歷史是從西元十六世紀開始，甚至，將(代數)方程式表示成現在我們所習見的 $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots\cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$ 之形式，則爲時更晚。但是，如果把現代我們用方程式求解的問題，其解法的探討都列入本文的介紹範圍，則可遠溯至古埃及時代，在時間上相差三千多年。不過，要知道，一個理論要眞成爲“論”，必定要有一段發展過程；對方程式“論”而言，古人們如何處理現代數學中用方程式求解的問題，古人們如何表示方程式等等問題，都是在探究方程式論發展史時很有趣的題材(嚴格說來，這些題材中有的只能看成是算術的一部分)，所以，我們且從頭說起，不必在代數(甚至，代數學中的方程式論)與算術之分野上傷腦筋。

在介紹本題之前，我們還要提出一點：西元1842年，德國數學家G.H.F.Nesselmann 把代數的發展史分成三個階段：第一個階段是修辭的(rhetorical)階段，在這個階段中，問題的敍述以及解法都完全使用文字來說明，而沒有任何簡寫記號。第二個階段是省略的(syncopated)階段，在這個階段中，開始使用簡寫記號來代替經常使用的概念及運算。第三個階段是符號的(symbolic)階段，在這個階段中，概念以及運算都完全以符號來表示。例如，以P來表示加(plus)，這是屬於省略的階段，而記爲+，則是屬於符號的階段。不過，這三個階段並不能很明確地劃清界限，例如，Diophantus 似乎屬於省略的階段，但是，在他的作品的敍述方式中，却是三個階段的痕跡都存在著。

本文篇幅甚長，我們將全文分成七節，其標題如下：

甲、埃及人與巴比倫人的成就
乙、中國的九章算術
丙、希臘人的幾何代數
丁、印度人與阿拉伯人的成就
戊、中國人在代數上的卓越成就
己、中世紀歐洲的代數學
庚、理論的成熟

甲、乙、丙三節的內容，在年代方面是由紀元前至西元三世紀，在方程式的解法方面還是在摸索階段。丁、戊兩節的內容，在年代方面是由西元四世紀至西元十四世紀，在方程式方面的解法則已有所突破。己、庚兩節的內容，在年代方面是由西元十五世紀起，而這個時期的成就可以稱爲是方程式論的成熟期，因爲有關方程式方面的定性理論及符號的使用都在這個時期才完成。

甲、埃及人與巴比倫人的成就

紀元前 1600 年左右，埃及人 Ahmes 抄寫流傳下來的 Ahmes 紙草或稱 Rhind 紙草中，已經有一些問題是屬於現代之方程式 $x+ax=b$ 或 $x+ax+bx=c$ 的形式；在其中，未知數稱爲 aha，這個字是“量”的意思。例如，其中的問題 24 是：某量與此量的七分之一（之和）爲 19，求其值。這個問題用現代的術語來表示就是：解方程式 $x+\frac{1}{7}x=19$。Ahmes 對這個問題的解法在現代教科書中已經見不到了；事實上，他的解法只是一種嘗試錯誤法：他假設此值是 7，則

1倍	得	7
$\frac{1}{7}$倍	得	1
合併	得	8

其次，他指出“此量是 7 時，它與它的七分之一之和只等於 8，那麼，要求得此量的正確值，必須要將 8（乘以一倍數使之）變成 19，則 7 乘以這個倍數所得之值就是所要求之量的正確值”。因爲

1倍	得	8
2倍	得	16
$\frac{1}{2}$倍	得	4
$\frac{1}{4}$倍	得	2
$\frac{1}{8}$倍	得	1
將 2 倍，$\frac{1}{4}$倍，$\frac{1}{8}$倍合併	得	19

於是，他指出“將 2，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$等乘以 7，即得所要之值”：

1倍	得	2，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$
2倍	得	4，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$
4倍	得	9，$\frac{1}{2}$
7倍	得	16，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{8}$

$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$就是所要之值。Ahmes 還驗證說：將 $16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ 加上它的七分之一，確實得出 19。

（分數的概念比整數要晚得多，在 Ahmes 的時代，埃及人所發明的分數記號，只有單分數——即分

子爲1、分母爲整數的分數）。

這樣的求解方法，我們看起來當然是相當笨拙，不過，因爲當時沒有使用符號，所以方法上受到限制。儘管如此，這種解法却發展成西元十六世紀時歐洲人所稱的虛位法（method of false position）。另一方面，在其他問題中，Ahmes 却也使用了除的方法。

至於二次方程式，最早的一個似乎是在Berlin 紙草中所發現的這個問題：將100個平方單位分成兩個正方形，使其中一個之邊長爲另一個邊長的四分之三。這個問題以現代術語來表示就是解下述聯立方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100 \\ y = \dfrac{3}{4}x \end{cases}$$

在Berlin 紙草中，這個問題的解法如下：作一正方形使其邊長爲1而作另一正方形使其邊長爲$\frac{3}{4}$。將$\frac{3}{4}$平方，得$\frac{9}{16}$。將兩個平方數1及$\frac{9}{16}$相加，得$\frac{25}{16}$，此數之平方根爲$\frac{5}{4}$。另一方面，100的平方根是10。將10除以$\frac{5}{4}$，得8，而8的$\frac{3}{4}$是6。於是，$8^2 + 6^2 = 100$，及$6 = 8$的$\frac{3}{4}$。

顯見地，這個解法與前面的方法屬於同一種形式，都是所謂虛位法的雛型。

埃及人似乎沒考慮過需要以三次方程式求解的問題，而對一次方程式則討論了不少。約同一時期的巴比倫人却不相同，巴比倫人可能認爲一次方程式太過簡單，不值得花太多精神。不過，他們已經考慮過一次聯立方程組的問題，而把兩個未知數稱爲第一銀圈（first silver ring）及第二銀圈。例如，在古巴比倫人流傳下來的瓦片中曾經發現一個以現代符號表示是$\frac{1}{7}x + \frac{1}{11}y = 1$，$\frac{6}{7}x = \frac{10}{11}y$ 的問題，它的解則表示成

$$\frac{1}{7}x = \frac{11}{7+11} + \frac{1}{72} \quad 及 \quad \frac{1}{11}y = \frac{7}{7+11} - \frac{1}{72}。$$

西元1930年，數學史家Otto Neugebauer（1899—）曾經指出：巴比倫人很早就已經考慮過含有三項的二次方程式。例如，有一個問題是：某正方形之邊長比其面積小14,30，求其邊長。這個問題以現代術語表示就是：解方程式$x^2 - x = 870$。（巴比倫人採用60進位，因此，14,30 表示$14 \times 60 + 30 = 870$）。巴比倫人對這個問題所使用的解法如下：取1的一半，即0;30。將0;30乘以0；30，得0；15。將0；15加上14,30，得14,30;15。此數是29;30的平方。最後，將0；30加上29;30，所得之結果30就是所求正方形之邊長。

巴比倫人所使用的方法實際上就是解方程式$x^2 - px = q$時所使用的公式

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

這個公式是中學生所耳熟能詳的。

在另一個問題中，他們也考慮了方程式 $11x^2+7x=6;15$ 的求解，在這個問題中，他們先把問題變成方程式 $(11x)^2+7(11x)=1,8;45$。如此一來，問題變成了解 $y^2+7y=1,8;45$ 這個方程式，其中 $y=11x$。然後，利用解方程式 $y^2+py=q$ 時所使用的公式 $y=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2+q}-\frac{p}{2}$ 得出所需的 x 值。

前面所使用的方法，是所謂的代數變換的一種簡單形式。早在紀元前 2000 年左右，巴比倫人就懂得使用這種方法，他們在數學上的卓越成就，由此可見一斑了。

事實上，巴比倫人所考慮的二次方程式有下面這三種形式，其中的(1)、(2)兩種已介紹於上：

(1) $x^2+px=q$

(2) $x^2=px+q$

(3) $x^2+q=px$

其中，p 與 q 都是正數（當時，負數還沒有被承認）。對於上述(3)之形式的方程式，巴比倫人所用的方法相當於解 $x+y=p$，$xy=q$ 這個聯立方程式，可見根與係數之關係已經有所發現了，而像後者這種聯立方程組，在巴比倫人遺留下來的瓦片上發現了不少。例如，收藏在美國耶魯大學的一塊楔形文字瓦片上就有下面這個問題：解聯立方程組 $x+y=6;30$，$xy=7;30$。這個問題的解法，瓦片上的說明就像下面的方法：首先，得

$$\frac{x+y}{2}=3;15$$

其次，兩邊平方，得

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=10;33;45$$

於是，得

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy=3;3;45$$

以及

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=1;45$$

因此，

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)+\left(\frac{x-y}{2}\right)=3;15+1;45$$

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)-\left(\frac{x-y}{2}\right)=3;15-1;45$$

由最後兩個方程式，得 $x=5$，$y=\frac{3}{2}$。

在巴比倫人遺留的瓦片上還有這個問題：求一數，使得它與它的倒數之和爲2;0;0;33;20。這個問題相當於解 $x+\frac{1}{x}=\frac{12961}{6480}$，而他們所得的解是1;0;45及0;59;15;33;20，也就是 $\frac{81}{80}$ 及 $\frac{80}{81}$。

上面的兩個問題，都相當於一個形如(3)的二次方程式，前者是 $x^2+7;30=6;30x$，後者是 $x^2+1=2;0;0;33;20x$。至於 $x^2+px+q=0$ 型的方程式（p 與 q 爲正數）則沒有考慮過，這是因爲這種方程式沒有正根。

除了二次方程式之外，巴比倫人也考慮過三次方程式的問題。首先，他們列出了兩個表分別列出 n^3 及 n^3+n^2，其中 n 是由1至30的整數，像 $x^3=0;7;30$ 及 $x^3+x^2=4,12$ 這種方程式直接由表上查出其（一個）解分別爲 0;30 及 6。至於表上未列出的，則使用線性內插法來求解的近似值。像 $ax^3+bx^2=c$ 這種形式的方程式，巴比倫人也使用代數變換的方法，變成 $\left(\frac{a}{b}x\right)^3+\left(\frac{a}{b}x\right)^2=\frac{a^2c}{b^3}$，然後利用上法來處理。至於像 $ax^3+bx^2+cx=d$ 這種更一般的方程式，巴比倫人是否有過考慮，後世就不清楚了。

就巴比倫人在代數上的成就而言，他們在概念方面的成熟程度及多面適應能力比他們在求解技巧上的成就要大得多。因爲在未曾使用未知數符號的當時，能夠看出 $(ax)^3+(ax)^2=b$ 與 $y^3+y^2=b$ 在本質上相同是非常不容易的。

乙、中國的九章算術

在東方，中國的九章算術中，有關方程式的問題甚多。九章算術之作者及著作年代，都已不可考。今傳本九章算術九卷，是三國時魏景元四年（西元263年）劉徽所輯，關於原書的著作年代，有人考證約於西元前250年左右。

九章算術粟米章中最後九題都是不定方程組的問題，所謂不定方程組，乃是指方程式之數目較未知數之數目爲少，而所要求的解則通常都是整數。例如，這九題中第一題是：

「今有出錢五百七十六，買竹七十八箇。欲其大、小率之，問各幾何？」

「答曰：其四十八箇，箇七錢；其三十箇，箇八錢。」

這個問題的解法，以現代術語表示，應該是：設大竹箇數爲 x，小竹箇數爲 y，大竹每箇價爲 u，小竹每箇價爲 v，則由題意，得

$$\begin{cases} x+y=78 \\ xu+yv=576 \end{cases}$$

這是一個不定方程組。九章算術對這個問題是這樣解的：

「以買竹箇數七十八除出錢五百七十六，得七，實餘三十，是爲三十箇後可增加一錢。由七十八箇中減去八錢大竹三十箇，餘四十八箇，爲每箇七錢者小竹之數。」

這個解法的意義是這樣的：

$$\frac{ux+vy}{x+y}=v+\frac{(u-v)x}{x+y}=v+\frac{(u-v)x}{78}$$

另一方面，

$$\frac{576}{78}=7+\frac{30}{78}$$

亦即

$$v+\frac{(u-v)x}{78}=7+\frac{30}{78}$$

令 $v=7$，$x=30$，即得 $u=8$，$y=48$。事實上，這個方程組的正整數解還有許多。九章算術中尚沒有未知數的概念，所以，無法就其一般情形加以考慮。

其次，在九章算術少廣章中，對開平方與開立方法，說明得非常清楚，其方法與現代方法相同，只是文字深奧，頗爲難懂（還好，三國的劉徽及唐朝的李淳風，都注過九章算術，才使後人較易於了解）。我們把這段文字抄錄於下：

開方

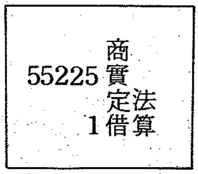
「術曰：置積爲實，借一算步之，超一等。議所得，以一乘所借一算，爲法而以除。除已，倍法爲定法。其復除，折法而下。復置借算，步之如初。以復議一乘之，所得復以加定法，以除。以所得副從定法，復除折下如前。若開之不盡者，爲不可開，當以面命之。若實有分者，通分內子爲定實，乃開之。訖，開其母，報除。若母不可開者，又以母再乘定實，乃開之。訖，令如母而一。」

開立方

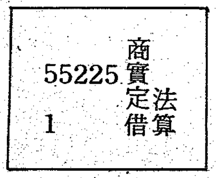
「術曰：置積爲實，借一算步之，超二等。議所得，以再乘所借一算爲法，而除之。除已，三之爲定法。復除折而下，以三乘所得數置中行，復借一算置下行，步之。中超一，下超二位。復置議以一乘中，再乘下，皆副以加定法，以定法除。除已，倍下并中從定法，復除折下如前。開之不盡者，亦爲不可開。若積有分者，通分內子爲定實，定實乃開之。訖，開其母以報除。若母不可開者，又以母再乘定實，乃開之。訖，令如母而一。」

爲使讀者能知其大概，我們舉一個例子來解說前面的開平方法。首先，得把幾個名詞略作說明：所謂實，乃是指被除數；所謂法，乃指除數；而商則與現代的意義相同。另一方面，我國古代算學上的計算，並不是用筆寫出各個數字逐步演算，而是將竹子做成的算籌排列在算盤上表示各數，上下相呼，左右進退，算罷只將結果遺留在盤上，毫無計算過程的痕跡。因此，古代所有的算書，都只記載「術曰」或「法曰」等文字，却沒有一個算式。因此，許多解說就顯得艱澀難懂，而非以實例配合不可。下面我們以“求55225之平方根”爲例來說明九章算術中的開(平)方法： 首先，把積55225放於上列做爲實，將1放在下列做爲借算，中列則用來放定法(我們用“放”這個字，是因爲古人是

在放算籌，而不是寫數字）。接著把借算1超一等（即往左每隔一位放置），於是，借算1到了萬位數字5之下方（如圖1(b)），這個過程相當於由方程式 $x^2-55225=0$ 變換成方程式 $10000x_1^2-55225=0$。由此議得 $2<x_1<3$，故得初商爲2，記在最上列（商）的萬位上方；其次，以初商2自乘一次（再乘以借算1）所得之積做除數去除實中的萬位數5，得餘數1，將實中的萬位數5改爲餘數1，並將初商兩倍記在這個餘數1的正下方，得圖2(a)。再其次，把定法中的4退一位（至千

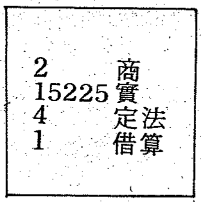


(a)



(b)

圖1

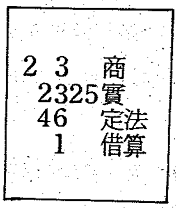


(a)

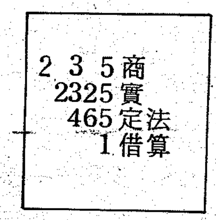
(b)

圖2

位）而借算1退兩位（至百位），如圖2(b)。接著，以定法中的40(百位以上部分)除實中的152（百位以上部分），得次商3，將3寫在最上列（商）的百位處。這個過程相當於令 $100x_1=200+10x_2$，得 $100x_2^2+4000x_2-15225=0$。由此議得 $3<x_2<4$，即次商爲3。接着，「以復議一乘之，所得復以加定法」，意思是將次商3與定法相加得43，以43做除數除實中的152，得餘數23，將152改成23並將次商3兩倍得6記在定法的百位處，如圖3(a)所示。以下的做法都仿照前面



(a)



(b)

圖3

的過程，即定法中的46退一位而借算1退兩位，如圖3(b)。接著，以定法中的460除實中的2325，得商5，將5寫在最上列（商）的個位處。這個過程相當於令 $10x_2=30+x_3$，得 $x_3^2+460x_3-2325=0$，由此得 $x_3=5$。最後，將商5與定法460相加得465，以465爲除數除實中的2325，恰好除盡，故所求的平方根就是最上列的數235。

這個方法看起來好像相當麻煩，事實上，與現代所使用的開平方法細加比較，不難發現兩種方法其實是相同的，後者只是把它改進得較爲簡潔而已。而中國人在代數上的卓越成就，開方法只不過是一個開端罷了。

要了解中國人在代數上的卓越成就，讓我們再看九章算術中的盈不足章及方程章。

在盈不足章中，關於一元一次方程式的求解方法，已經介紹得非常清楚，其中所介紹的兩種方法，一個就是虛位法；另一個就是現代通用的方法。我們說明如下：盈不足章中第二題爲

「今有共買雞，人出九，盈一十一；人出六，不足十六。問人數、雞價各幾何？」

「答曰：九人，雞價七十。」

「術曰：盈、不足，相與同共買物者，置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以爲實；并盈、不足爲法，有分者通之。副置所出率，以少減多，餘以約法、實；實爲物價，法爲人數。」

「其一術曰：并盈、不足爲實，以所出率以少減多，餘爲法。實如法得一，以所出率乘之，減盈增不足，卽物價。」

我們用現代術語解說如下：設共有 x 人，每人出 a 時，盈 c；每人出 b 時，不足 d，則雞價既可表示爲 $ax-c$，亦可表示爲 $bx+d$。因此，

$$ax-c=bx+d$$

於是，

$$x=\frac{c+d}{a-b}$$

前面後一術中，所謂的「并盈、不足爲實」就是以 $c+d$ 做爲被除數，而所謂的「以所出率以少減多，餘爲法」就是以 $a-b$ 做爲除數。

由此，我們可以了解，形如 $\alpha x=\beta$ 的一次方程式之解法，九章算術中所提出的這個「其一術」，已經就是現代所使用的方法了。不過，印度人、阿拉伯人、歐洲人却在九章算術問世之後，還在討論虛位法。另一方面，九章算術中的「術曰」部分，其實就是虛位法，我們說明如下。

假設 a、b、c、d 仍代表前面所提的意義。所謂「置所出率，盈、不足各居其下。令維乘所出率，并以爲實」，乃是指將 a、b、c、d 排列成下述形式，並將連線上之數相乘後二積相加，卽得

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & \times & \\ c & & d \end{array}$$

$ad+bc$，並以 $ad+bc$ 做爲「實」。「并盈、不足爲法」，卽以 $c+d$ 做爲「法」。其次，「副置所出率，以少減多，餘以約法、實；實爲物價，法爲人數」，卽以 $a-b$ 除 $ad+bc$ 及 $c+d$，所得之 $\dfrac{ad+bc}{a-b}$ 就是物價，$\dfrac{c+d}{a-b}$ 就是人數。這個結果很容易可用現代的方法驗證。

爲什麼說九章算術中的「術曰」就是虛位法呢？因爲以 α 表示人數，β 表示總價，x 表示所出率時，則 α、β、x 滿足下面這個方程式：

$$\alpha x-\beta=0$$

根據上面的假設，可知

$$\begin{cases}\alpha a-\beta=c\\ \alpha b-\beta=-d\end{cases}$$

於是，可得

$$\alpha=\frac{c+d}{a-b} \qquad \beta=\frac{ad+bc}{a-b}$$

同時，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{ad+bc}{c+d}$$

上式右端之值就是以虛位法求解 $\alpha x-\beta=0$ 時所得之 x 值的表示法。

九章算術中的盈不足術，看起來似乎只有在 a、b、c、d 都是正數才能成立，因此，九章算術中另有兩個「術曰」介紹兩盈兩不足的情形之處理方法。事實上，所謂兩盈，乃是指 c 是正數而 d 是負數；所謂兩不足，乃是指 c 是負數而 d 是正數。假定 a、b、c、d 可以是負數時，前面所得的公式都可以適用，而九章算術中之所以分成不同的情形來介紹，乃是由於負數的觀念在當時還沒有被使用得像現代這麼得心應手。

談到負數的使用，這又是中國人在代數上超越其他國家的一個部分。因爲除了中國人之外，世界上最早接受負數觀念的是印度數學家 Brahmagupta，而他是西元七世紀的人。其後，甚至應該被稱爲「代數學之父」的阿拉伯數學家 al'-Khowarizmi 都沒有使用過負數。最早把負數出現在代數方程式中的歐洲數學家是法國人 Nicolas Chuquet（1445？－1500？），之後則是德國數學家 Michael Stifel（1486？－1567），不過，他們兩人都把負數稱爲荒謬的數（absurd number）。法國數學家 Francois Vieta（1540—1603）雖然在代數上貢獻甚大，但很可惜他不接受負數來做係數及根。而法國數學家 René Descartes（1596—1650）則把方程式的負根稱爲“假根”（false root）。最先接受負數來做爲係數的是 Johann Hudde（1629—1704），而負數被認爲數學上不可缺少並開始就其乘法性質加以探討，在西方是十八世紀的事了。

反觀中國，九章算術方程章中就提到正負術，而劉徽注九章算術方程章則云「正算赤，負算黑」，意思是說：用紅色的算籌代表正數，黑色的算籌代表負數。因此，在負數概念的接受以及負數的加減方面，中國人似乎沒有任何困難，因爲九章算術中的正負術是這樣的：

「正負術曰：同名相除，異名相益；正無入，負之；負無入，正之。其異名相除，同名相益；正無入，正之；負無入，負之。」

這段話的意思與現代術語比較是這樣的：

同名相除		異名相益
$(+a)-(+b)$	$=$	$(+a)+(-b)$
$(-a)-(-b)$	$=$	$(-a)+(+b)$

正 無 入 負之

$(+0)-(+b)=-b$

負 無 入 正之

$(-0)-(-b)=+b$

異名相除　　同名相益

$(+a)-(-b)=(+a)+(+b)$

$(-a)-(+b)=(-a)+(-b)$

正 無 入 正之

$(+0)-(-b)=+b$

負 無 入 負之

$(-0)-(+b)=-b$

方程章中的另一項貢獻是提出了聯立方程組的加減消去法。我們舉方程章中的第一題為例說明如下：

「今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗；上禾二秉，中禾三秉，下禾一秉，實三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，實二十六斗，問上、中、下禾實一秉各幾何？」

「答曰：上禾一秉九斗四分斗之一，中禾一秉四斗四分斗之一，下禾一秉二斗四分斗之三。」

「術曰：置上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉，實三十九斗於右方，中左禾列如右方；以右行上禾徧乘中行而以直除；又乘其次，亦以直除，然以中行中禾不盡者，而以直除；左方下禾不盡者，上為法，下為實，實卽下禾之實。求中禾，以法乘中行下實，而除下禾之實，餘如中禾秉數而一，卽中禾之實。求上禾，亦以法乘右行下實，而除下禾、中禾之實，餘如上禾秉數而一，卽上禾之實。實皆如法各得一。」

前面的這個問題，如以現代術語來表示，可設上禾一秉為 x 斗，中禾一秉為 y 斗，下禾一秉為 z 斗，則得

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 2x+3y+z=34 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

但在上面的「術曰」中，是將第一、二、三個方程式的係數分別列於右行、中行、左行，而且由上向下排列，如下所示：

1	2	3	上禾秉數
2	3	2	中禾秉數
3	1	1	下禾秉數
26	34	39	

所謂「以右行上禾徧乘中行而以直除」，其意義就是以 3 乘第二個方程式，再以 2（中行上禾秉數）乘第一個方程式，然後相減（這就是直除的意義），即得

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 5y+z=24 \\ x+2y+3z=26 \end{cases}$$

其次，所謂「又乘其次，亦以直除」，乃是指將右行及左行也做同樣的處理，故得

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 5y+z=24 \\ 4y+8z=39 \end{cases}$$

「然以中行中禾不盡者，而以直除」，乃是指將所得的新中行及新左行就中禾秉數做同樣的處理，即得

$$\begin{cases} 3x+2y+z=39 \\ 5y+z=24 \\ 36z=99 \end{cases}$$

「左方下禾不盡者，上爲法，下爲實，實爲下禾之實」之意是：前面所得的新左行由上而下是 0，0，36，99，以其中不爲零者（不盡者），上面的 36 爲法（除數），下面的 99 爲實（被除數），相除後的商就是下禾每秉的斗數，即

$$z=\frac{11}{4}$$

「求中禾，以法乘中禾下實，而除下禾之實，餘如中禾秉數而一，即中禾之實」，意即：用 36 乘第二個方程式，再與第三個方程式相減，即可得中禾每秉的斗數，即

$$y=\frac{17}{4}$$

上禾的求法則與此類似，即可得

$$x=\frac{37}{4}$$

由前面的說明，可看出使用加減消去法求解聯立方程組的方法，九章算術中已做了完整的介紹；這方面的成就，在較早的埃及人、巴比倫人，及同一時期的希臘人手上都沒有達成。

最後，順便談談「方程」這個名詞的意義。劉徽對「方程」二字的註解是這樣的：

「程，課程也。群物總雜，各列有數，總言其實。令每行爲率，二物者再程，三物者三程，皆如物數程之，并列爲行，故謂之方程。」

可見「方程」二字的意義是將各個（係）數在算盤上並列成數行，而成一個正方形的形狀，因而稱之爲方程。因此，由劉徽的註解看來，可知所謂方程，乃是指現代的聯立方程組，而與英文中的 equation 一字意義不同，將 equation 譯成方程式，是源於日本，而對我國而言，將 equation 稱爲方程式，與古意就有了出入；事實上，我國古時相當於 equation 的名詞是「開方式」，與「方程」二字沒有關係。

·九章算術中將聯立方程組列表的方法，已經具有現代數學中「矩陣」之形式，而其利用算籌的計

算方法，也已經是矩陣中的基本行運算，換句話說，矩陣及行列式的化簡方法，早在中國的九章算術中就已經發展了。可惜，國人未將之發揚光大，反倒是東傳日本之後由日本人發展出行列式的概念。西元 1683 年，被譽為十七世紀最偉大的日本數學家 Seki Kowa（關孝和，1642－1708）在他所著的解伏題之法一書中，最先提出行列式的概念以及其展開方法。

最後，我們談談九章算術的勾股章。在這一章中，首先敘述了勾股定理（即西洋的畢氏定理），然後說明其應用。勾股定理的原文為：

「術曰：勾、股各自乘，并而開方除之，即弦。又股自乘，以減弦自乘，其餘開方除之，即勾。又勾自乘，以減弦自乘，其餘開方除之，即股。」

勾股章的第二十題中，需使用二次方程式的解法，我們錄其原文如下：

「今有邑方，不知大小，各中開門。出北門二十步有木，出南門十四步，折而西行一千七百七十五步，見木，問邑方幾何？」

「答曰：二百五十步。」

「術曰：以出北門步數乘西行步數，倍之為實。并出南門步數為從法，開方除之，即邑方。」

用現代術語說明，可設正方形之邑邊長為 x 步，則「術曰」的意義就是：以 $20 \times 1775 \times 2$ 為實，以 $20 + 14$ 為從法，也就是得出下面這個二次方程式（此處的實是指常數項係數，與開方法中的實意義不同；從法一詞，後面另有解說。今人讀中國古算書，除文字的艱澀難懂外，名詞的不一致也造成一項困難）：

$$x^2 + (20 + 14)x = 20 \times 1775 \times 2$$

這個方程式的兩個根是 250 及 -284，而對這個問題而言，自然需選取 250 這個根。至於上述方程式如何得出，依劉徽註，乃是依相似三角形對應邊長成比例的原理：

$$\frac{20}{\frac{x}{2}} = \frac{x + 20 + 14}{1775}$$

在前面的「術曰」中，所謂「從法」，其實有特殊的意義。在方程式 $x^2 + 34x = 71000$ 中，令

$$x = 100x_1, \qquad x_1 = 2 + x_2'$$

上面兩個變換表現在古代的籌式中，就是下面的圖 4：

(a)	(b)	(c)	(d)
商	商	2 商	2 商
71000 實	71000 實	71000 實	24200 實
34 法	34 法	34 法	434 法
1 借算	1 借算	1 借算	1 借算
$x^2 + 34x = 71000$	$10000x_1^2 + 3400x_1 = 71000$	$2 \leq x_1 < 3$	$10000x_2'^2 + 43400x_2' = 24200$

圖 4

由圖 4 (c)得出圖 4 (d)，乃是從 71000 中減去初商 2（00）的平方，再減去初商 2 乘以從法 3400，所得的差 24200 做新的實，若這個實不為 0，則將初商 2（0000）的兩倍加上從法 3400；所得的和

43400做新的從法。令

$$10x_2' = x_2 \ , \qquad x_2 = 5 + x_3'$$

這兩個變換表現在籌式中，就是下面的圖5：

(a)	
2	商
24200	實
434	法
1	借算

$100x_2^2 + 4340x_2 = 24200$

(b)	
2 5	商
24200	實
434	法
1	借算

$5 \leq x_2 < 6$

(c)	
2 5	商
0	實
534	法
1	借算

$100x_3'^2 + 5340x_3' = 0$

圖5

由此而求得所要的結果250。

前面所使用的籌算法，與開平方法頗爲相似；事實上，開平方法是這個籌算法的特例。這個籌算法是用於求 $x^2 + px = q$（p 與 q 都是正數）的正根，而開平方法則可視爲 $p = 0$ 的情形。由於這個過程中，p 扮演著「法」的角色，古人爲求區別，特稱之爲「從法」，而把上述的籌算法稱爲「帶從開方法」。

丙、希臘人的幾何代數

正當中國的九章算術在用代數方法處理許多方程式的解法之時（或較早），希臘人也考慮了許多相當困難的代數問題的解法；不過，兩者之間却有着很大的差異，那就是：中國人是使用高超的代數技巧處理許多幾何問題，而希臘人却把他們那當世無匹的幾何成就應用於代數問題的求解，因此，後世把它稱爲幾何代數。例如，要解像 $ax = bc$ 這樣的方程式，他們看成是兩個面積的相等，因此，使用下面這種方法來處理：作一矩形 $OCDB$，使其長與寬 $\overline{OB} = b$，$\overline{OC} = c$（參看下圖6）。其次，在 $\overrightarrow{OC}$ 上取一點 A，使得 $\overline{OA} = a$。再以 $\overline{OA}$ 及 $\overline{OB}$ 爲邊作成一個矩形 $OAEB$，假設對角線 $\overline{OE}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，則 $\overline{CP}$ 就是所要求的 x。

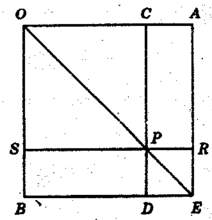


圖6

又如，巴比倫人所考慮過的聯立方程組 $y \pm x = b$，$xy = A$，希臘人也使用面積的方法作幾何處理。若我們消去 y，則可得出一個 x 的二次方程式 $bx \mp x^2 = A$。這個二次方程式，希臘人所作的面積解說法就是下圖7的(a)與(b)：

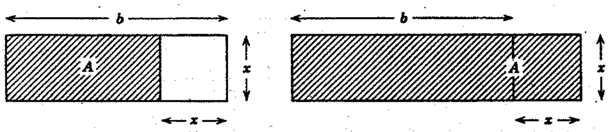


圖7

(a)　(b)

這種幾何代數，在Euclid（紀元前三世紀）的著作中有很完全的介紹。例如，在他的Data一書中，利用幾何方法，求出了下面幾個聯立方程組的解：

(1) $xy=a^2$，$x-y=b$（問題84）；

(2) $xy=a^2$，$x+y=b$（問題85）；

(3) $xy=a^2$，$x^2-y^2=b^2$（問題86）。

另外，在他那部共分十三卷的曠世名著Elements第二卷中，Euclid列出了十四個命題，這些命題在現代的數學教科書中，並沒有什麼特殊的重要性，不過，它們却是希臘幾何代數的一些最佳範例。例如，命題1是：設有二線段，若將其中一線段分成數段，則原來二線段所圍成之矩形面積等於未分割之線段與所分得之各段所圍成之矩形面積的和。這個命題，事實上只是乘法對加法可分配這個代數定律的幾何解釋而已。又如，命題4是：若一線段任意分成兩段，則以此線段爲一邊之正方形面積等於分別以這兩段爲一邊之正方形面積的和，再加上這兩段所圍成之矩形面積的兩倍。這一段冗長的敍述所說明的內容，就是$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$這個代數上的等式；就敍述一個數學上的性質而言，這段文字或許比那個等式要嚕囌得多，可是，對初學者而言，這段文字所使用的方法可能更容易被接受。

在第二卷命題5中，Euclid使用幾何的方法說明$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。於下圖8中，$\overline{AC}=\overline{CB}=a$，而$\overline{CD}=b$，$BCEF$、$BDHM$、$EGHL$都是正方形，因爲長方形$ACLK$及$BDGF$面積相等，故可知$(a+b)(a-b)+b^2=a^2$。利用這個結果，他提供了$ax-x^2=b^2$的幾何解法。例如，仍採用圖8，若$\overline{AB}=a$而$C$是$\overline{AB}$之中點，$\overline{CP}$與$\overline{AB}$垂直，而$\overline{CP}=b$。令$D$爲$\overline{CB}$上一點，而且$\overline{PD}=\frac{a}{2}$，則$x=\overline{BD}$是$ax-x^2=b^2$的一個解。因爲$ax-x^2$就是$ADHK$的面積，於是，等於$CDHL$的面積與$BDGF$的面積之和，故等於$\overline{PD}^2-\overline{CD}^2=\overline{CP}^2=b^2$。同樣地，第二卷命題6提出了$(a+b)b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2$的幾何說明。在圖9中，$\overline{AC}=\overline{CB}=\frac{a}{2}$，$\overline{BD}=b$，$CDFE$、$BDMH$、$LHGE$都是正方形，因爲長方形$ACLK$及$HGFM$面積相等，故可知$(a+b)b+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(b+\frac{a}{2}\right)^2$。利用這個結果，他提供了$ax+x^2=b^2$的幾何解法。例如，仍採用圖9，若$\overline{AC}=\overline{CB}=\frac{a}{2}$，$\overline{CP}$與$\overline{AB}$垂直，而$\overline{CP}=b$。令$D$爲$\overrightarrow{CB}$上一點，而且$\overline{CD}=\overline{PB}$，則$x=\overline{BD}$是$ax+x^2=b^2$的一個解。因

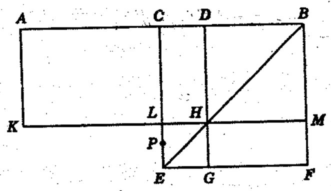


圖8

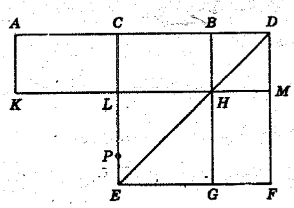


圖9

爲 $ax+x^2$ 就是 $ADMK$ 的面積，於是，等於 $CDML$ 的面積與 $HGFM$ 的面積，故等於 $\overline{PB}^2-\overline{CB}^2=\overline{CP}^2=b^2$。

在Euclid的幾何代數中，被考慮的方程式本質上都是二次，不過，在Archimedes（紀元前三世紀）的On the Sphere and Cylinder 第二卷中，卻出現了一個三次方程式。在該書的命題4中有這麼一個問題：試以一平面截取一個球面，使所得兩部分之體積比爲給定之比値。這個問題在當時是很困難的，若以現代的微積分來處理，可設球面方程式爲 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 而截平面爲 $z=t-a$，$a<t<2a$，則下半截的體積爲

$$\int_{-a}^{t-a}\pi\left(a^2-z^2\right)dz=\frac{\pi}{3}t^2\left(3a-t\right)$$

若上、下兩截的體積比爲 $n:m$，則可得

$$\frac{\frac{4}{3}\pi a^3}{\frac{\pi}{3}t^2(3a-t)}=\frac{m+n}{m}$$

或是

$$\frac{4a^3}{t^2(3a-t)}=\frac{m+n}{m}$$

這是一個三次方程式。Archimedes 把這個方程式看成 $t^2(c-t)=db^2$ 之形式，而利用拋物線 $cx^2=b^2y$ 及雙曲線 $(c-x)y=cd$ 之交點來求解這個問題。

事實上，希臘人所接觸的三次方程式，更早的應是紀元前五世紀的Hippocrates of Chios 及紀元前四世紀的Menaechmus，他們考慮所謂的「倍立方問題」引出了 $x^3=2a^3$ 這個三次方程式，而他們處理這個問題是考慮拋物線 $x^2=ay$ 與雙曲線 $xy=2a^2$，或是拋物線 $x^2=ay$ 與拋物線 $y^2=2ax$ 的交點。事實上，後世部分數學家認爲希臘數學家是在這個問題上發現圓錐截痕的。

希臘的算術與代數脫離幾何而獨立，是從Heron，Nichomachus（西元一世紀），Diophantus（西元三世紀）開始。Diophantus，後世對他的生平新知甚少，這裡所謂的三世紀，也只是大約而已，比較保守的說法，只能說一世紀至四世紀之間。不過，在西元五、六世紀流傳的一份問題集中，卻有一個問題提示了Diophantus 的年齡，如果這個問題的內容是眞實的，則Diophantus 享年八十四歲。

Diophantus 被部分數學家稱爲「代數學之父」，不過，從某些角度來看，這個頭銜並不是很恰當；主張給予這個頭銜的人，可能是因爲Diophantus 在他所著的Arithmetica 一書中，有系統地使用了乘冪、未知數、關係、與運算等的簡寫記號；可是，Diophantus 的重要成就是開拓了現代數學中稱爲Diophantine analysis 的不定解析問題，這種問題在現代數學中是列入「數論」的範圍，而不是代數的範圍，因此，所謂代數學之父的頭銜，對Diophantus 而言並不是非常恰當的。例如，Boyer，C.B. 在他的數學史著作中就持這種看法。

Diophantus 的Arithmetica 一書，原有十三卷，不過，流傳下來的，卻只有前六卷。這六卷著

作，既不像希臘幾何作品中具有嚴密的邏輯結構，也不像早期的希臘幾何代數使用幾何方法來處理代數問題，它並沒有對代數運算、代數函數、或代數方程式的解作任何系統的介紹，而只是由大約150個問題所彙集而成的問題集，其中的每個問題都是數值的例子，而Diophantus 也沒有努力於求出所有可能的解；例如，對有兩個正根的二次方程式，他只給出較大的正根，而負根則未被承認；對有無數多組解的不定方程式，他只是給出一個解而已。事實上，對不定方程式以及非不定方程式之間的區別，Arithmetica 中也沒有做很清楚的區分。下面我們舉幾個Arithmetica 中的例子。

「試求兩數，使其和為20，而平方和為208」。Diophantus 假設兩數為 $10+x$ 及 $10-x$（這自然是用現代的術語），於是，$(10+x)^2+(10-x)^2=208$，由此得 $x=2$，故兩數為12及8。就前面那個方程式而言，x 還可以選為 -2，還好，對這個問題而言，沒有取 -2 這個根，對結果倒沒有影響。但是，對不定方程式而言，偏差就會很大了。例如，「試求兩數，使其中每一數的平方與另一數的和都是一個完全平方」。這裡得特別提出一點，Diophantine analysis 中只接受有理數的解。在解這個問題時，Diophantus 沒有假設兩數為 x 與 y，他假設兩數為 x 及 $2x+1$，如此，則 $x^2+(2x+1)$ 必是完全平方；於是，只需再考慮 $(2x+1)^2+x$ 是完全平方這個條件。關於這一點，Diophantus 沒有指出它的解有無數多，而只選擇了一個特殊情形，他假設這個完全平方是 $(2x-2)^2$，即 $(2x+1)^2+x=(2x-2)^2$，由此可得 $x=\frac{3}{13}$。因此，他所得的兩數是 $\frac{3}{13}$ 及 $\frac{19}{13}$。Diophantus 所使用的方法，實際上是附加了兩個條件：其一，這兩數中有一數是另一數的兩倍加1；其二，就是 $(2x+1)^2+x$ 等於 $(2x-2)^2$。如果把這兩個條件換以其他適當的條件，則自然可得出其他結果。例如，保留第一個，而第二個則將 $2x-2$ 改成 $2x-3$，則所得的兩數是 $\frac{8}{17}$ 與 $\frac{33}{17}$。

Diophantus 也考慮過 $x^2=1+30y^2$ 及 $x^2=1+26y^2$ 這兩個不定方程式。當然，Diophantus 也只求出一組解。事實上，Diophantus 只是在解一個問題，而不是解一個方程式，例如，「試求二整數，使其中一數之平方等於另一數之平方的30倍加1」，與「解 $x^2=1+30y^2$」這兩個問題在數學上的意義是不完全相同的。前面兩個不定方程式的最小正整數解分別是 $(x, y)=(11, 2)$，及 $(x, y)=(51, 10)$。

一般言之，Diophantus 對近代數論所提供的影響比希臘每一位非幾何的代數學家都要大得多，例如，Pierre de Fermat 著名的“大定理”或“最後定理”就是因為想把Diophantus 的一個問題推廣而引出來的，這個問題是：「試將一完全平方表示成兩個完全平方之和」。不過，Fermat 的這個最後“定理”迄今都還未證明出來，而已被改稱為“最後問題”。

（下期待續）