轉圈圈的數學

黃宜人

國立臺灣大學數學系

我國有句俗話“狗咬尾巴團團轉”，是形容狗尾巴上長蝨子，要咬又咬不到的慌急樣子。筆者小時候家裏養的狗，就表演過好幾次，直覺得這句俗語眞是描寫的非常生動。

當時心裏總以爲人是最高級的動物，大概不至於表現出那麼好笑的樣子。長大後才知道，這句俗語也可以借來形容，人遇到很難解決的急事時，走投無路的慌急樣子。後來，筆者又看到一些故事，說明人在某些環境下，其實會像尾巴長蝨子的狗一樣，繞著圓圈轉個不停。

這些故事都是說人在一望無際的沙漠裏，或在廣大的原始森林中，或在風雪交加的大雪原上迷失方向的故事：人雖然認定一個方向往前走，但總是繞了一個大圓圈又回到原來出發的地方。

十九世紀的挪威生物學家F.O. Guldberg，曾收集了幾則這方面的故事，在學術雜誌Zeit-schrift fuer Biologie（vol.35,1897,pp.415～458）上發表了一篇論文“Circular Motion as the Basic Motion of Animals”。這篇文章主張，動物（萬物之靈的人類也不例外）的基本運動型態是繞著圓圈打轉；不同的只是圓圈的大小，和轉的方向。文章中關於動物方面的例證，包含了下列的現象（這些都是可以實驗求證的）：

(1) 剛砍了頭的雞會張開翅膀，繞著圓圈打轉。

(2) 瞎了眼的鳥飛在空中時，沿著圓圈打轉。

(3) 把蒙住眼睛的狗丟入很大的游泳池中，游泳的軌跡是一個圓圈。

在1920年Harper雜誌（vol.141）上也登載了當時紐約自然歷史博物館館長R.C. Andrews的一篇文章“The Lure of Mongolian Plains”，敍述了他在蒙古大草原上打獵時觀察到的一些現象：被獵狗追的很緊的獵物，逃走的路線其實是一個很大的圓圈。

俄國數學家Y.I. Perelman爲了求證Guldberg有關人類運動的基本型態，是否爲繞著圓圈打轉的主張，特別作了一個實驗：他找了一百個飛行員，叫他們一個個蒙起眼睛，分別在一個很大很平坦的飛機場上走直線。結果每個人所走的路線都不是直線，其軌跡都是一個大圓圈（當然，每個人的圓圈都不同，且轉的方向也相異）。

Perelman因此又做了一些測量，發現每個人習慣性的跨出的左脚步與右脚步，通常都不一樣長，但其差異非常小，約爲1/200公分。這樣小的差異，在平常走路時我們是不會覺察到的。因爲我們走路時，會利用視覺來調整行走的方向。但蒙起眼睛走直線時，走上二萬步，左右脚就會相差約一公尺，這個人如何走路？

假定人走直線時，人的兩脚是在平行線上，則走上二萬步，兩脚的距離就相差太大，以致人無法再走路。Perelman因此結論說：唯一的解釋是，人的行走軌跡爲一個圓圈，人的兩脚在行走時的軌跡是兩個同心圓。當這兩個同心圓很大時，局部的看來，它們像是平行的直線。

下面，讓我們作一些簡單的計算：設同心圓的距離（即兩圓半徑的差，又爲人兩脚間的寬度

）爲w，小圓半徑爲r，人的短腳步長爲ℓ，長腳步長爲$\ell+d$，而且走x步剛好走一圈，則

$$2\pi(r+w)=(\ell+d)x$$

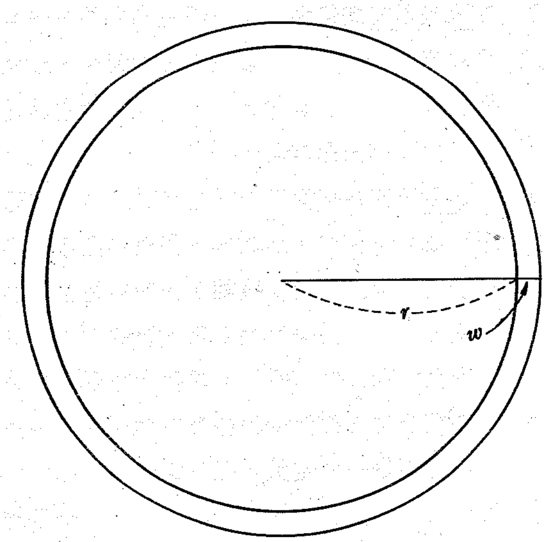
$$2\pi r=\ell x$$

$$\frac{r+w}{r}=\frac{\ell+d}{\ell}$$

$$1+\frac{w}{r}=1+\frac{d}{\ell}$$

$$\frac{w}{r}=\frac{d}{\ell}$$

$$r=\frac{w}{d}\ell$$



如果以$d=\frac{1}{200}$公分，$w=10$公分，$\ell=70$公分計算，則

$$\begin{aligned} r &= 10\times 200\times 70\text{ 公分} \\ &= 140000\text{ 公分} \\ &= 1400\text{ 公尺} \\ &= 1.4\text{ 公里} \end{aligned}$$

這麼大的圓，難怪我們平常走路時覺察不出來。其實，Perelman 是反過來計算的，即他先測量飛行員走出來的圓圈的半徑r，量其步長ℓ，及兩腳間的寬度w，然後用下列公式算腳步差d：

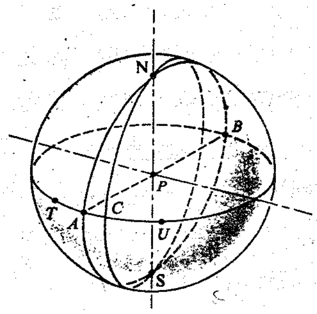
$$d=\frac{\ell}{r}w$$

因爲實際上的d太小，無法直接測量出來。如果Perelman的實驗可以接受，則Guldberg的主張就應該是正確的了。筆者認爲有趣的是，這個主張與愛因斯坦對宇宙的看法，有一絲相關連之處（但非常薄弱，且有點牽強）我認爲不妨提出來給讀者作爲參考。

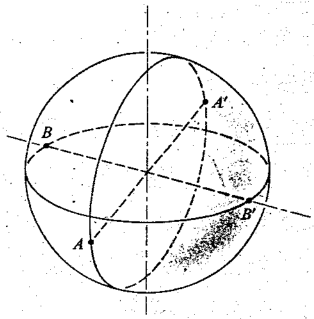
愛因斯坦在相對論中，主張宇宙的幾何其實是黎曼幾何，而不是歐幾里得幾何。兩種幾何最大的不同是，在黎曼幾何中的一平面上的兩條直線一定相交（即沒有所謂的平行線）。下面讓我看一下黎曼幾何的一個最簡單的例子，即黎曼球面幾何的模型（Rieman Spherical model）：

首先選定一個球面，不妨假設其半徑爲1。爲了使通過兩點的直線有最短的距離，球面上任意兩點所決定的直線，並不是過這兩點的任意圓（這些圓是通過這兩點的平面與球面的交線），而是過這兩點的“大圓”，它是這兩點與球心所決定的平面與球面的交線。

如果球面上的兩點剛好是直徑的端點，則稱爲相對極點（autipodal）。注意到，球面上的每個點都有其相對極點。兩個相對極點與球心本在同一直線上，無法決定唯一的平面，所以過兩個相對極點的“大圓”有無數條。如同地球儀上過南北極有無數條“經線”一樣。



爲了使幾何上“兩點決定唯一的直線”的公設能成立，我們把球面上的任意兩個相對極點都看成爲同一點（這是數學裏常用的一種手法），即：如果A與A′爲相對極點，則黎曼球面幾何模型中的點都是數對$\bar{A}=\{A, A'\}$。經過這樣的手續後，黎曼球面幾何模型中的任意兩點，只能決定一條直線。



球面上的大圓是過球心的平面與球面的交線，兩個過球心的平面一定相交於一直徑，所以兩個大圓一定相交於兩個相對極點。把兩個大圓經過上述把每兩個相對極點看成爲一點的手續後，可以看到：在黎曼球面幾何模型中的任意兩條直線一定相交，而且只相交於一點。

由於在黎曼球面幾何模型中，任意的兩條直線一定相交，因此沒有所謂的平行線。這是對於歐幾里得幾何中“平行公設”的一種否定，平行公設的內容是如下的：

過一條直線ℓ外一點P，可作一條而且只能作出一條直線ℓ'，使ℓ'與ℓ平行（不相交）。平行公設的另一種否定方式是：過直線ℓ外一點P，可作兩條以上與ℓ平行的直線（因此，介於這兩條直線間的無數條直線，也與ℓ平行）。這種否定會導致另一種的非歐幾里得幾何，即羅巴契夫斯基（Lobachewsky）與波力埃（Bolyai）所創的雙曲幾何（Hyperbolic Geometry）。由於篇幅的限制，這裡恕不多談。

黎曼球面幾何模型與歐幾里得幾何，還有許多不同之處。下面我們只把比較顯著的地方，概略的列擧出來，而不作深入的討論。有興趣於學術性探究的讀者，可參看任意一本關於非歐幾里得幾何的書。

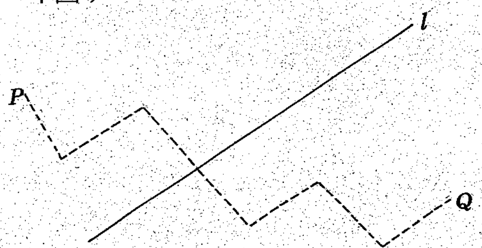
1. 在歐幾里得幾何中，由一直線ℓ外一點P，可向ℓ作垂線，但只有一條垂線。

1′ 在黎曼球面幾何模型中，我們仍然可過一直線ℓ外的一點P，向ℓ作垂線。但有時垂線可能超過兩條。這得視P點與ℓ的相對位置關係，例如，由地球儀的北極可向赤道（赤道也是一個大圓）作數條垂線（每一條經線都與赤道垂直）。

2. 在歐幾里得幾何中，每一個三角形的三內角和都等於180°。不論三角形的大小、形狀與位置如何，這個結果一定成立，通常稱之爲三角形內角和定理。

2′ 在黎曼球面幾何模型中，三角形內角和定理不再成立。例如，地球儀上任兩條經線（不屬於同一大圓的兩條經線），與赤道圍成的三角形，因有兩個直角（見上述的1′），其三內角的和大於180°。其實我們可以證明，在黎曼球面幾何中的任意三角形，其內角和雖然不是一個定數，但一定大於180°。

3. 在歐幾里得幾何中，一平面上的任一條直線ℓ都會把此平面分剖成不相連（disconnected）的兩個半平面（half plane），即在這兩個半平面上各取一點P與Q時，連接P、Q兩點的任一條折線，一定與直線ℓ相交（見下圖）。



3.′ 在黎曼球面幾何模型中，上述的情形絕不會產生。設 ℓ 是黎曼球面幾何模型中的一條直線，而且假定 ℓ 是由球面上的大圓C，經過把其上的每兩個相對極點視爲一點的手續做出來的。我們不妨把C看成爲球面上的赤道，如此C剛好把球面分割南北兩半球。設P是北半球上一點，而Q是南半球上一點，則P點的相對極點P′一定也在南半球上。由於在我們的模型中，P與P′是同一個點，所以連接P′與Q的折線，就是連接P與Q的折線。因爲P′與Q同在南半球，我們一定可以找到全在南半球上的折線，把P′與Q連起來（其實過P′與Q的大圓在南半球的部分就可以）。在南半球上的折線，其上各點的相對極點都一定在北半球上，所以不會與赤道C所決定的直線 ℓ 相交。

4. 在歐幾里得幾何中，兩點間的距離沒有一個上限，即不管K是多大的數，我們都可找到兩點P與Q，使線段 $\overline{PQ}$ 的長大於K。

4.′ 在黎曼球面幾何模型中，任意兩點間的距離都會小於一個固定的數，例如在我們上述的模型中，這個固定的上限是大圓的一半長，即 π，因爲任何線段的長都會小於 π。

5. 在歐幾里得幾何中，對於一直線上的三點A、B與C而言，下列三種情形中只有一種是成立的（三種情形是互斥的）：

A點在B點與C點之間，

B點在C點與A點之間，

C點在A點與B點之間，

5.′ 在黎曼球面幾何模型中，對於一直線上的三點A、B與C而言，上述的三種情形都是成立的。因爲黎曼球面幾何模型中的直線，幾乎是歐幾里得幾何中的一個圓圈（只是把其上的每兩個相對極點看成爲一點）。換句話說，由A點出發，沿著直線向一個方向往前走，一定會回到A點。

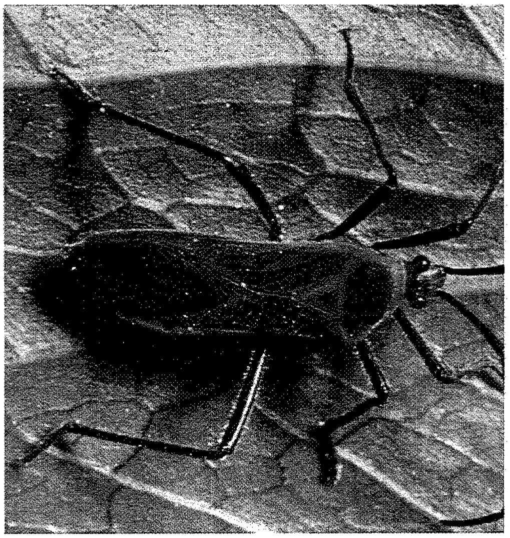
愛因斯坦在相對論中，主張宇宙的幾何是黎曼幾何，是根據重力場會使幾何空間產生正曲率的事實。正曲率的空間中的幾何一定是黎曼空間（歐幾里得幾何空間的曲率爲0）。當然，由於宇宙各處的重力場不見得均勻，其幾何是很複雜的，我們在上面提到的黎曼球面幾何模型，是假定曲率均勻的理想化狀況下最簡單的情形。但我們在上面提到與歐幾里得幾何不同的幾個性質，在複雜的黎曼幾何中還是成立的。愛因斯坦就是根據上述的第5′條性質來推論。

甲、光線沿著直線走，會繞回路。

乙、許多慧星並不如我們想像的一去不回頭，經過相當一段時日後，一定會繞回頭。

這種“沿著直線走會繞回頭”的週期現象，與我們在本文開頭提到的Guldberg 的主張，是調和的看法。當然，光線與慧星的繞回頭，與動物的繞著圓圈打轉，有其基本上的差異：圓圈的大小程度（ order of magnitude ）未免太過懸殊。因此，把這兩種現象扯在一起，顯得很牽強。

本文主要的目的，在介紹黎曼球面幾何模型給數學的門外漢。但筆者不願採取一般學術性的方式，由討論三角形的內角和定理不成立來開始，所以故意把Guldberg主張引進來，然後把相對論當橋樑來引導。牽強之處在所難免，謹向有識者致歉，希望不要帶著嚴格的學術眼鏡，來挑本文的這些毛病。□



▲ 1

▲

2 ▶

◀

▼

3 ▼