科學教育月刊　第 47 期　中華民國七十一年（1982）

第二階第三階等差數列通項的求法

張宏志
國立高雄師範學院數學系

數列：{ 1，3，7，13，21，31，……………………………… }
第一階差 ⟶ 2，4，6，8，10，……………………………………
第二階差 ⟶ 2，2，2，2，……………………………………………

數列：{ −2，0，12，40，90，168，…………………………… }
第一階差 ⟶ 2，12，28，50，78，……………………………………
第二階差 ⟶ 10，16，22，28，…………………………………
第三階差 ⟶ 6，6，6，……………………………………………

上述兩數列，前一個屬第二階等差數列型，後一個是第三階等差數列型；其通項（即第 n 項）的求法在目前中學數學教材中很少提到。有些問題，諸如：“在水平面上 n 條直線最多能將平面分成多少部份（區域）？”，又“已知 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 2n$（$n \geq 1$），試求第 n 項”。就可以利用二階、三階等差數列來解答。本文是利用多項函數來求得二階、三階等差數列第 n 項的簡便法則。

首先我們來觀察一個標準的二次多項函數 $an^2 + bn + c$，n 為自然數：

	an^2+bn+c		
$n=1$	$a+b+c$		
		$3a+b$	
$n=2$	$4a+2b+c$		$2a$
		$5a+b$	
$n=3$	$9a+3b+c$		$2a$
		$7a+b$	
$n=4$	$16a+4b+c$		$2a$
		$9a+b$	
$n=5$	$25a+5b+c$		
⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮

由上列表中不難看出二次多項函數 $\{ an^2 + bn + c \}$，是一個典型的第二階等差數列，同時 $an^2 + bn + c$ 即為此第二階等差數列的第 n 項。反過來，我們想任何一個第二階等差數列的第 n 項是否一定是一個二次多項函數？假定已知 $\{ a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\cdots\cdots \}$ 為第二階等差數列，則

$$
\begin{aligned}
a_2 - a_1 &= b \\
a_3 - a_2 &= b + d \\
a_4 - a_3 &= b + 2d \\
&\ \vdots \\
+)\quad a_n - a_{n-1} &= b + (n-1)d \\
\hline
a_n - a_1 &= nb + \frac{n-1}{2}nd
\end{aligned}
$$

整理結果，發現 a_n 一定可以寫成 $\alpha n^2+\beta n+\gamma$ 的型態。故知任何一個第二階等差數列的第 n 項必可以 an^2+bn+c 表之。

若利用所給數列的若干個已知項把未知數 a，b，c 解出，便可確切求得此二階等差數列之通項了。

例如：

	數列		
$n=1$	4		
		9	
$n=2$	13		6
		15	
$n=3$	28		6
		21	
$n=4$	49		6
		27	
$n=5$	76		
⋮	⋮	⋮	⋮

	an^2+bn+c		
$n=1$	$a+b+c$		
		$3a+b$	
$n=2$	$4a+2b+c$		$2a$
		$5a+b$	
$n=3$	$9a+3b+c$		$2a$
		$7a+b$	
$n=4$	$16a+4b+c$		$2a$
		$9a+b$	
$n=5$	$25a+5b+c$		
⋮	⋮	⋮	⋮

左右兩表相互對照可得解 $a=3$，$b=0$，$c=1$；由此可知數列{ 4，13，28，49，76，…} 其第 n 項當爲 $3n^2+1$。

類似的情形，我們來觀察三次多項函數 an^3+bn^2+cn+d 列表如下：

	an^3+bn^2+cn+d			
$n=1$	$a+b+c+d$			
		$7a+3b+c$		
$n=2$	$8a+4b+2c+d$		$12a+2b$	
		$19a+5b+c$		$6a$
$n=3$	$27a+9b+3c+d$		$18a+2b$	
		$37a+7b+c$		$6a$
$n=4$	$64a+16b+4c+d$		$24a+2b$	
		$61a+9b+c$		$6a$
$n=5$	$125a+25b+5c+d$		$30a+2b$	
		$91a+11b+c$		
$n=6$	$216a+36b+6c+d$			
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

不難看出an^3+bn^2+cn+d 爲一第三階等差數列的第n項；反過來考慮任何一個第三階等差數列的第n項是否一定是an^3+bn^2+cn+d 的型式？假定已知數列$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n, \cdots\}$爲第三階等差，則$\{a_2-a_1, a_3-a_2, a_4-a_3, \cdots\cdots, a_n-a_{n-1}, \cdots\cdots\}$ 當爲第二階等差，根據前所述，其第n項爲$\alpha n^2+\beta n+\gamma$型，所以

$$\begin{aligned}
a_2-a_1 &= \alpha+\beta+\gamma\\
a_3-a_2 &= 4\alpha+2\beta+\gamma\\
a_4-a_3 &= 9\alpha+3\beta+\gamma\\
&\vdots\\
+)\quad a_n-a_{n-1} &= (n-1)^2\alpha+(n-1)\beta+\gamma\\
\hline
a_n-a_1 &= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\alpha+\frac{(n-1)}{2}n\beta+(n-1)\gamma
\end{aligned}$$

將上式加以整理，當可得證第n項確是an^3+bn^2+cn+d 型。倘若我們已知一個第三階等差數列的前面幾項，便可利用簡易的一次聯立方程組解出未知數a，b，c，d而確定第n項是什麼了。例如：$\{-2, 0, 12, 40, 90, 168, \cdots\cdots\}$，在本文一開始便判斷其爲第三階等差數列，所以設其第n項爲an^3+bn^2+cn+d 則得

$$\begin{array}{ll}
n=1 & \left\{\begin{array}{ll} a+b+c+d=-2 & \cdots\cdots(1)\\
n=2 \quad & 8a+4b+2c+d=0 & \cdots\cdots(2)\\
n=3 \quad & 27a+9b+3c+d=12 & \cdots\cdots(3)\\
n=4 \quad & 64a+16b+4c+d=40 & \cdots\cdots(4)\end{array}\right.
\end{array}$$

由(4)−(3)，(3)−(2)及(2)−(1)分別得
$$\left\{\begin{array}{ll} 37a+7b+c=28 & \cdots\cdots(5)\\ 19a+5b+c=12 & \cdots\cdots(6)\\ 7a+3b+c=2 & \cdots\cdots(7)\end{array}\right.$$

再(5)−(6)，(6)−(7)得 $\left\{\begin{array}{l}18a+2b=10\\12a+2b=16\end{array}\right.$ 解之得$a=1$，$b=-1$，$c=-2$，$d=0$

因此此一數列的第n項爲n^3-n^2-2n或因式分解爲$n(n+1)(n-2)$。

講到數學歸納法時常有類似這樣的問題：“用數學歸納法證明$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2=\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$”。曾有學生問在等號右邊的式子是如何得出來的?也就是將題目改成“試求$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2=$？”筆者在此利用前所提第三階等差數列第$n$項的求法來處理此問題如下：

	$1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2$			
$n=1$	$a_1=10$			
		25		
$n=2$	$a_2=35$		24	
		49		8
$n=3$	$a_3=84$		32	
		81		8
$n=4$	$a_4=165$		40	
		121		
$n=5$	$a_5=286$			
$\vdots$	$\vdots$			
$n=n$	$a_n=1^2+3^2+5^2+\cdots\cdots+(2n+1)^2$			

由上表可知 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots\}$ 為一第三階等差數列，而第 n 項 a_n 即為問題的答案；所以令 $a_n=an^3+bn^2+cn+d$，得

	an^3+bn^2+cn+d			
$n=1$	$a+b+c+d$			
		$7a+3b+c$		
$n=2$	$8a+4b+2c+d$		$12a+2b$	
		$19a+5b+c$		$6a$
$n=3$	$27a+9b+3c+d$		$18a+2b$	
		$37a+7b+c$		$6a$
$n=4$	$64a+16b+4c+d$		$24a+2b$	
		$61a+9b+c$		$6a$
$n=5$	$125a+25b+5c+d$		$30a+2b$	
		$91a+11b+c$		
$n=6$	$216a+36b+6c+d$			

上下兩表比照得聯立方程組：

$$\begin{cases} 6a=8 \\ 12a+2b=24 \\ 7a+3b+c=25 \\ a+b+c+d=10 \end{cases} \quad \text{解之得} \quad \begin{cases} a=\dfrac{4}{3} \\ b=4 \\ c=\dfrac{11}{3} \\ d=1 \end{cases}$$

所得 $a_n=\frac{4}{3}n^3+4n^2+\frac{11}{3}n+1$ 也就是 $\frac{4n^3+12n^2+11n+3}{3}$。依此方法級數求和

$1+3+6+10+15+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$ 也可利用數列 $\{1, 4, 10, 20, 35, 56, \cdots\}$

為第三階等差數列求出其第 n 項為 $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$，則

$$1+3+6+10+15+\cdots\cdots+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}\text{。} \qquad \square$$