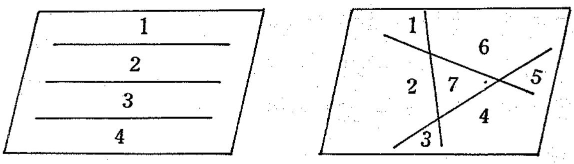
科學教育月刊 第47期 中華民國七十一年(1982)

一個關於平面與空間切割的微妙關係

狷 夫 台北縣立土城國中

國中數學第三冊第一章"簡單幾何圖形",介紹幾何之基本觀念——點、直線與平面。有一個常見的問題:"平面上相異三直線至多可將平面分割成幾塊區域?至少又可分割成幾塊?只要簡單作圖思考,即可發現"三直線相互平行時可分割此平面為四塊,是最少的情形;三直線兩兩相交於兩點且三直線不共點時可分割此平面為七塊,是最多的情形"。(參見圖(一))由此很容易聯想起如下的問題:"平面上相異n條直線至多可將此平面分割成幾塊區域?"甚至進而擴展至空間上——"空間中相異幾個平面最多可將此空間分割成幾塊區域?"這兩個有關平面與空間的切割問題之間,存在著頗微妙的關係。我們只要作圖細加"觀察,歸納",即可獲得推算的公式。以下做一簡單的探討,願與大家共享。



圖(一)

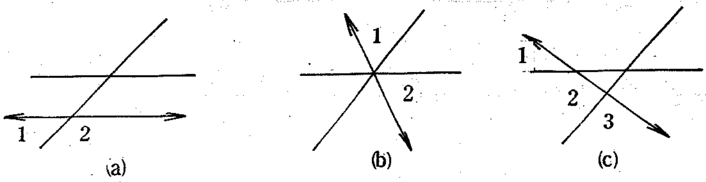
一、平面的分割:

我們從$n=1$開始談起

① 一條直線分割平面成2塊,我們記$2=1+1$。即原有數1,增加數為1。

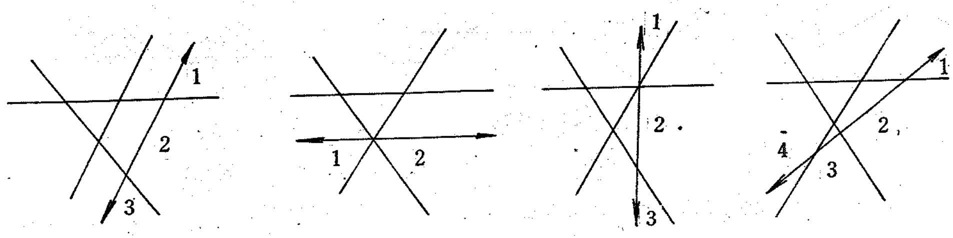
② 二條直線至多分割平面成4塊,我們記$4=1+1+2$。即由①再加入第二條直線,將原二區域分別切成兩塊,增加數為2。

③ 三條直線至多可將平面分割成7塊,我們記$7=1+1+2+3$。因原有的兩條相交直線將平面分割成4個部分,再加入第三條直線,欲得分割區域為最多,必須與前二直線兩兩相交且不共點。(參見圖(二))(a)中所加直線與原一直線平行,增加數為2;(b)中所加直線與原二直線共點,增加數亦為2;(c)中三直線兩兩相交且不共點,增加數為3,是最多者。



圖(二):其中兩端加箭頭者特表新加入之直線,數字表新增之區域

④ 四條直線至多可將平面分割成11塊，我們記 $11=1+1+2+3+4$。因加入第四條直線而欲使分割區域數爲最多，須與前三直線皆兩兩相交且無三線共點！（參見圖㈢）如有與原直線平行，或通過原有之交點（即成三線共點）時，其分割區域數無法爲最多者。



圖㈢：最右圖中四直線兩兩相交且無三線共點，增加數爲4，是最多

⑤ 由上觀察歸納可知，相異 n 條直線至多可將平面分割成 $1+1+2+3+4+\cdots+n$ 塊區域。因每一步驟中，當第 k 條直線加入時，其最大可能增加數爲 k。此時 n 條直線中必無任二條相互平行，或有任三線共點者。我們可以 $P_n=1+n(n+1)/2$ 表示上面的結果，當 $n=k$ 成立時，極易證得 $n=k+1$ 必亦同時成立，是故 n 可以是任意大的自然數！

證：設 $n=k$　$P_k=1+\dfrac{k(k+1)}{2}$

$$\because\ P_{k+1}=1+\frac{k(k+1)}{2}+\underbrace{(k+1)}_{（增加數）}$$

$$=1+\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$=1+\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

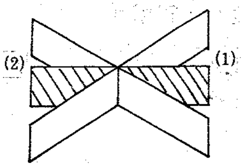
$$\therefore\ P_{k+1}=1+\frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$ 得證。

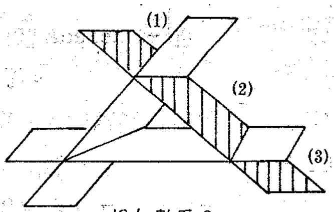
二、空間之切割：

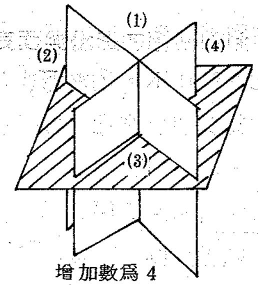
① 一平面切割空間爲2區域，增加數爲1，我們記爲 $1+1$。

② 二平面最多切割空間爲4區域，增加數爲 $2=1+1$。即第二平面將①中之區域皆一分爲二。注意其與第一平面之相交軌跡爲一直線，恰如平面切割中之①者！

③ 三平面切割空間至多可得8區域，增加數爲 $4=1+1+2$。因第三平面加入時，唯當三平面兩兩相交於一直線，而無任兩平面相互平行，或三平面共線之情況，才能切割成最多塊數。請見圖㈣說明：（請注意第三平面上之軌跡恰如一平面中之②）。







圖四：加斜線者表新加入之平面，數字表新增加之區域

④ 四平面最多可能將空間切割為 15 區域，其增加數為 $7=1+1+2+3$。注意此恰為 $P_3=1+3\cdot 4/2$。因當第四平面加入而欲使區域數為最多時，必須平面兩兩相交於一直線且無任兩平面相互平行，或任三平面共線者。此時第四平面上顯現與原三平面相交之軌跡恰如圖(二)平面分割中之(c)！即有：

$$S_4=S_3+P_3=8+7=15 \text{（設 } n \text{ 個平面分割空間最多區域數 } S_n\text{）}$$

而此四平面中間圍成了一塊有限空間，形如三角錐。

⑤ 由上推理可知，相異 n 個平面切割空間之情形有"當第 n 平面加入時，其空間區域最多增加數為 $P_{n-1}=1+1+2+3+\cdots+(n-1)$。恰如此平面與原 $(n-1)$ 個平面相交之軌跡所顯示者（即平面分割時有 $(n-1)$ 條直線之情形）。

$$S_n=1+(1)+(1+1)+(1+1+2)+(1+1+2+3)+\cdots+[1+1+2+3+\cdots+(n-1)]$$
$$=1+P_0+P_1+P_2+P_3+\cdots\cdots+P_{n-1}$$

其中 $P_1+P_2+\cdots\cdots+P_{n-1}=1+2+4+7+\cdots\cdots+\left(\dfrac{n(n-1)}{2}+1\right)$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\frac{k(k+1)}{2}+1\right]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(k+1)}{2}+\sum_{k=0}^{n-1}1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n-1)n(n+1)}{3}+n$$

故 $S_n=\dfrac{(n-1)n(n+1)}{6}+(n+1)$

此式可視為"空間中相異 n 個平面切割空間為最多區域數"的公式，極易由數學歸納法原理證得，請讀者自行為之。

提示：$$\left(\begin{aligned}S_{k+1}&=S_k+P_k=\frac{(k-1)k(k+1)}{6}+(k+1)+\left[1+\frac{k(k+1)}{2}\right]\\&=\frac{k(k+1)(k+2)}{6}+(k+2)\end{aligned}\right)$$

三、結　　語

由上二則討論可知，平面上相異 n 條直線至多可將此平面分割為 $P_n = 1 + \frac{n(n+1)}{2}$ 塊區域，空間上相異 n 個平面最多可將此空間切割成 $S_n = \frac{(n-1)n(n+1)}{6} + n + 1$ 塊區域。其時必無任兩直線（平面）相互平行，或任三直線（平面）共點（線）者。而空間分割之情況，可將它擬想為“切西瓜”的有趣問題：對一個大西瓜任意切 n 刀，最多可以切成幾塊？當然不一定要西瓜才行！讀者無妨找個東西試著切切看。

後記：本文承編審先生提供寶貴意見，經多方修改而成。其中曾參考數學傳播季刊第二卷第一期“談談觀察歸納法的價值”一文，獲益良多，謹此向編審及簡先生致謝。 □

二月份本中心大事記

1. 教育部委辦各項課程改進計畫七十年度寒假實驗教師教材研習會，已於二月份分別舉行竣事。計：

2月1日～6日	高中生物課程
〃	高中地球科學課程
2月8日～13日	國中生物課程
〃	國中理化課程
〃	高中數學課程
〃	高中物理課程
〃	高中化學課程
2月8日～18日	高中基礎地球科學課程

2. 為配合各項課程改進計畫寒假實驗教師教材研習會及出版本學期各科試用教材，本中心各同仁自動取銷下午例假，全力以赴。今研習會已順利舉行竣事，試用教材並已全部出版，寄交各實驗學校進行試教。
3. 二月十日、十一日教材教法研究計畫之研究委員教材教法教學實習任課教授地區性研討會，分別於高雄師範學院、臺灣教育學院舉行竣事。
4. 二月十四日，本校生物系接受教育廳委辦舉行中學生物科教師教學研習會，全體參與學員由溫永福老師、鄭湧涇老師率領參觀本中心媒體室。
5. 二月十七日舉行「幼稚園科學教育實驗研究及推廣計畫」第五次指導委員及研究委員聯席會議。
6. 二月二十日，教育部科學教育指導委員會召開本年度第一次諮詢小組會議，本中心於會中並提出工作簡報。
7. 中華青少年科學百科全書編輯計畫第一年度集稿，本月份已編寫審查竣事。