科學教育月刊　第 47 期　中華民國七十一年 (1982)

教育部委辦高級中學數學及自然科學課程改進計畫

各科試用教材摘介(一)

本中心

本中心接受教育部委辦國中、高中、技職學校數學及自然科學課程改進計畫，邀請國內各大學教授一百二十多位、中學教師四十多位，在教育部科學教育指導委員會主任委員吳大猷先生及各位指導委員、暨諮詢委員指導下，進行編寫各有關課程之教科書、教學指引、實驗手册、實驗活動本等試用教材。

數年來，各分項計畫分別依原定時間編寫完成有關教材，並順利地在教育部及廳局指定之學校進行試教。茲以本中心編印之試用教材，將提供教育部做爲將來修訂各有關學校科學課程之參考，而科學教育事關國家大計與萬千學子之修習發展，爲求集思廣益，乃請各計畫編輯小組，就所編各科試用教材教科書中各擷取一章，藉本中心發行之科學教育月刊逐期分科摘介，提請教育界先進及同仁就其內容及編寫方式惠予指教，以做爲修訂之參考。

本期刊登之內容，係高二選修數學中之一章。

高二選修數學

第一章　中國剩餘定理

1-1　二元一次方程式的整數解

回顧基礎數學第一册第一章習題 1－1 中，有一個問題是這樣的：韓信點兵，兵不滿一萬，每 5 人一數，9 人一數，13 人一數，17 人一數，都餘 3 人，問兵有多少？

在這個問題中，因爲每一種數法所得的餘數都相同，所以，利用最小公倍數的方法，很容易就能算出人數爲 9948 。如果各種數法所得的餘數不完全相同，那麽，計算人數就不像前者那麽方便了！

我國古老的算書孫子算經中，就有這種問題。原題及其解法是這樣的：

「今有物，不知其數。三三數之，賸二，五五數之，賸三，七七數之，賸二。問物幾何？」

答曰：「二十三」

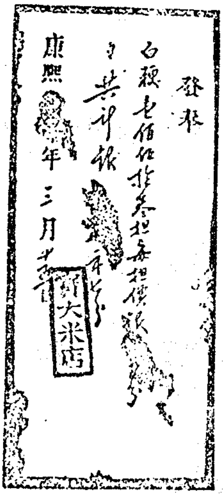
術曰：「三三數之賸二，置一百四十。五五數之賸三，置六十三。七七數之賸二，置三十。并之，得二百三十三。以二百一十減之，即得。

凡三三數之賸一，則置七十；五五數之賸一，則置二十一；七七數之賸一，則置十五。一百六以上，以一百五減之，即得。」

孫子算經的作者及確實著作年代，都不可考。不過，據考證，著作年代不會在晉朝之後。以這個考證來說，上面這種問題及其解法，中國人發現得比西方早。所以，這個問題的推廣及其解法才被稱爲中國餘剩定理。

上述問題，實際上就是求整數解的問題，在仔細探討其解法之前，讓我們先來看兩個比較簡單的例子。

例 1　下圖是一張清朝康熙年間的發票，歷史學家希望根據這份珍貴的史料來了解當時的米價，可是發票上有幾個重要的數字被蛀蟲咬壞了，不能立刻看出當時每擔米的價格。如果把它看成一個數學問題，則可說明如下：



發票上的字跡是：
發率　白粳壹佰伍拾叁擔每擔價銀 ?? 分
共計銀 ?? 兩二錢七分。

首先，我們要了解當時的貨幣制度是：一兩＝十錢，一錢＝十分，而分是最小的貨幣單位。假設當時每擔米的價格是銀 x 分，而 153 擔米的價格是銀 y 兩二錢七分，即（ $100y+27$ ）分，則可得出下面這個方程式：

$$153x=100y+27$$

其中的 x 與 y 都是整數。事實上，利用本節及下節所要介紹的方法，都可以求得這個方程式的整數解爲：

$$\begin{cases} x=59+100t, \\ y=90+153t, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 爲任意整數。}$$

只利用上面所得的解，並不能得出前面所問的一擔米的價格。不過，如果其他的史料能夠證實當時每擔米的價格在一兩以內，則就可知道當時每擔米的確實價格是五錢九分。因爲價格在一兩以內表示 $0<x<100$

$$0<x<100$$

$$0<59+100t<100$$

$$-\frac{59}{100}<t<\frac{41}{100}$$

因爲 t 是整數，故 $t=0$，因此，$x=59$。

【隨堂練習】

若當時每擔米價格在一兩及二兩之間，那麼，確實的價格是多少？

例 2　有五個人帶著一隻猴子出海，不幸船觸礁而流落到一個荒島上。由於缺乏食物充飢，第一天下午，他們分頭去摘取了許多椰子，預備第二天上午大家來分配。但是，當大家睡覺後，其中有個人醒來，他想，反正明天大家要平分這些椰子，我何不把我的那一份先取出來。於是，他把椰子分成相同數量的五堆，發現多出一個，他想把這個分給猴子，就把這一個與其中的一堆藏起來，剩下的椰子又堆在一起。另外四個人也跟第一個人有相同的想法，也分別起來做了同樣的事，每個人也都發現分成相同數量的五堆後剩下一個給猴子。經過每個人藏了一部份椰子之後

，第二天早上他們開始分配剩下來的椰子，結果是剛好分成相同數量的五堆，一個都沒有剩下。請問原來的椰子共有多少？

解 假設原來的椰子有 x 個，而五個人所藏的椰子依序分別是 $a+1$，$b+1$，$c+1$，$d+1$，$e+1$ 個，而第二天每人分到的椰子各有 y 個，則依前面的說明，可以得出下面六個關係式：

$$x = 5a + 1$$
$$4a = 5b + 1$$
$$4b = 5c + 1$$
$$4c = 5d + 1$$
$$4d = 5e + 1$$
$$4e = 5y$$

消去 a，b，c，d，e 可得 x，y 的關係式為：

$$1024x - 15625y = 8404$$

其中 x 與 y 都是整數。利用本節及下節所要介紹的方法，都可以求得這個方程式的整數解是：

$$\begin{cases} x = 3121 + 15625t, \\ y = 204 + 1024t, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 為任意整數。}$$

因此，原有的椰子可能是3121個（$t=0$），也可能是18746個（$t=1$）…等等。

前面所舉的兩個例子，都是屬於整係數二元一次方程式的整數解問題，也就是說，是屬於下述形式的方程式的整數解問題：

$$ax + by = c$$

其中 a，b，c 都是整數。這種方程式的整數解有一種頗為簡單的求法，稱為尤拉（Euler，1707～1783）解法。我們用例子解說如下：

例3 試求 $5x - 3y = 13$ 的整數解。

解 首先將係數的絕對值較小的未知數（此處是 y）解出，得

$$y = \frac{5x-13}{3} = (x-4) + \frac{2x-1}{3}$$

令

$$z = \frac{2x-1}{3}$$

即得 $y = (x-4) + z$，因為 x，y 都是整數，故知 z 也是整數。將上式化簡，得

$$3z - 2x = -1$$

再將係數之絕對值較小的未知數（此處是 x）解出，得：

$$x = \frac{3z+1}{2} = z + \frac{z+1}{2}$$

令 $$t=\frac{z+1}{2}$$

即得 $x=z+t$，因為 x，z 都是整數，故知 t 也是整數。將上式化簡，得：

$$z=2t-1,$$

因為上式中 z 的係數是1，因此，我們已求出 z 的整數解。於是，

$$z=2t-1,$$

$$x=z+t=-1+3t,$$

$$y=(x-4)+z=-6+5t,$$

換言之，$5x-3y=13$ 的整數解為：

$$\begin{cases} x=-1+3t, \\ y=-6+5t, \end{cases}$$ 其中 t 為任意整數。

例4 試求例1中方程式 $153x=100y+27$ 的整數解。

解 仿例3的做法，解出 y，得

$$y=\frac{153x-27}{100}=x+\frac{53x-27}{100}$$

令 $$z=\frac{53x-27}{100}$$

則得 $100z-53x=-27$，解出 x 得：

$$x=\frac{100z+27}{53}=2z+\frac{-6z+27}{53}$$

令

$$w=\frac{-6z+27}{53}$$

則得 $6z+53w=27$，解出 z 得

$$z=\frac{-53w+27}{6}=-9w+4+\frac{w+3}{6}$$

令

$$t=\frac{w+3}{6}$$

則得 $w=6t-3$。於是，各個變數都可以用 t 表示如下：

$$w=6t-3$$

$$z=-9w+4+t=-53t+31,$$

$$x=2z+w=-100t+59,$$

$$y=x+z=-153t+90,$$

換言之，$153x-100y=27$ 的整數解為

$$\begin{cases} x = 59 - 100t\ , \\ y = 90 - 153t\ , \end{cases}$$ 其中 t 爲任意整數。

例5 試求例2中方程式 $1024x - 15626y = 8404$ 之整數解。

解 仿例3的做法，解出 x，得：

$$x = \frac{15625y + 8404}{1024} = 15y + 8 + \frac{265y + 212}{1024}$$

令

$$u = \frac{265y + 212}{1024}$$

則得 $1024u - 265y = 212$。解出 y，得：

$$y = \frac{1024u - 212}{265} = 4u + \frac{-36u - 212}{265}$$

令

$$v = \frac{-36u - 212}{265}$$

則得 $36u + 265v = -212$，解出 u，得

$$u = \frac{-265v - 212}{36} = -7v - 6 + \frac{-13v + 4}{36}$$

令

$$w = \frac{-13v + 4}{36}$$

則得 $13v + 36w = 4$。解出 v，得

$$v = \frac{-36w + 4}{13} = -3w + \frac{3w + 4}{13}$$

令

$$s = \frac{3w + 4}{13}$$

則得 $13s - 3w = 4$。解出w，得

$$w = \frac{13s - 4}{3} = 4s - 1 + \frac{s - 1}{3}$$

令

$$t = \frac{s - 1}{3}$$

則得 $s = 3t + 1$。於是，各個變數都可以用 t 表示如下：

$$s = 3t + 1\ ,$$

$$w=4s-1+t=13t+3,$$
$$v=-3w+s=-36t-8,$$
$$u=-7v-6+w=265t+53,$$
$$y=4u+v=1024t+204,$$
$$x=15y+8+u=15625t+3121。$$

換言之，$1024x-15625y=8404$ 的整數解爲

$$\begin{cases} x=15625t+3121, \\ y=1024t+204, \end{cases} \quad \text{其中 } t \text{ 爲任意整數。}$$

【隨堂練習】

試求 $82x+69y=5$ 的整數解。

使用尤拉解法求二元一次方程式 $ax+by=c$ 的整數解（a，b，c 爲整數，$a^2+b^2\neq 0$），必須要了解的一點是：有些整係數二元一次方程式沒有整數解。事實上，若 a，b 的最大公因數 d 不是 c 的因數，則方程式

$$ax+by=c$$

沒有整數解。因爲若 x 與 y 都是整數。由於 a 與 b 都是 d 的倍數，因此，$ax+by$ 也是 d 的倍數。又因爲 c 不是 d 的倍數，故 $ax+by$ 不等於 c。

例如，$9x+6y=2$ 沒有整數解，因爲 9 與 6 的最大公因數是 3，而 3 不是 2 的因數。

【隨堂練習】

試寫出一個沒有整數解的整係數二元一次方程式。

另一方面，若 a 與 b 的最大公因數 d 是 c 的因數，則方程式

$$ax+by=c$$

恒有整數解。要證明這一個性質，我們可以使用基礎數學第一册所介紹的輾轉相除法。設

$$\begin{aligned}
a&=q_0b+r_0, & 0&<r_0<|b|, \\
b&=q_1r_0+r_1, & 0&<r_1<r_0, \\
r_0&=q_2r_1+r_2, & 0&<r_2<r_1, \\
&\vdots & &\vdots \\
r_{k-2}&=q_kr_{k-1}+r_k, & 0&<r_k<r_{k-1}, \\
r_{k-1}&=q_{k+1}r_k+0。
\end{aligned}$$

則最後一個不爲 0 的餘數 r_k 就是 a 與 b 的最大公因數 d，即 $r_k=d$。將前面各式逆推，可得：

$$\begin{aligned}
d&=r_k \\
&=r_{k-2}-q_kr_{k-1}
\end{aligned}$$

$$= r_{k-2} - q_k (r_{k-3} - q_{k-1} \cdot r_{k-2})$$
$$= (1 + q_k q_{k-1}) r_{k-2} - q_k r_{k-3}$$
$$= \cdots\cdots$$

由此可知，必有兩個整數 u 與 v，使得

$$d = au + bv$$

於是，

$$c = d \cdot \frac{c}{d} = a (u \cdot \frac{c}{d}) + b (v \cdot \frac{c}{d})$$

換言之，$x = u \cdot \frac{c}{d}$，$y = v \cdot \frac{c}{d}$ 是方程式 $ax + by = c$ 的一組整數解。

例6　已知(5723，4171) = 97，試求二整數 x，y 使得 $97 = 5723x + 4171y$。

解　將5723與4171進行輾轉相除，得

$$5723 = 1 \cdot 4171 + 1552$$
$$4171 = 2 \cdot 1552 + 1067$$
$$1552 = 1 \cdot 1067 + 485$$
$$1067 = 2 \cdot 485 + 97$$
$$485 = 5 \cdot 97。$$

將各式逆推，可得：

$$\begin{aligned} 97 &= 1067 - 2 \cdot 485 = 1067 - 2 \cdot (1552 - 1067) \\ &= 3 \cdot 1067 - 2 \cdot 1552 = 3 \cdot (4171 - 2 \cdot 1552) - 2 \cdot (1552) \\ &= 3 \cdot 4171 - 8 \cdot 1552 = 3 \cdot 4171 - 8 \cdot (5723 - 4171) \\ &= 11 \cdot 4171 - 8 \cdot 5723 \end{aligned}$$

令　$x = -8$，$y = 11$　即合乎所求。

【隨堂練習】

已知(153，100) = 1，試求二整數 x，y 滿足　$1 = 153x + 100y$。

前面所討論的結果，可以綜合而成一個定理：

定理1　設 a，b，c 爲整數，$a^2 + b^2 \neq 0$，則方程式 $ax + by = c$　有整數解的充要條件是 a，b 的最大公因數(a，b)可以整除 c。

根據這個定理，若 a 與 b 互質，則不論 c 是任何整數，方程式 $ax + by = c$ 都有整數解。

【隨堂練習】

下列各方程式，何者有整數解：

1. $3x+2y=7$
2. $4x+8y=3$
3. $12x+5y=3$

有些二元一次方程式，很容易就能求得一組整數解，例如，$6x+9y=12$ 有一組整數解 $x=2$，$y=0$，像這種方程式，不必使用尤拉解法，也可以求得它的全部整數解。我們說明如下：

設 $ax+by=c$ 是一個整係數二元一次方程式，而 $x=x_0$，$y=y_0$ 是它的一組整數解。若 $x=u$，$y=v$ 是它的任意一組整數解，則可得：

$$\begin{cases} au+bv=c \\ ax_0+by_0=c \end{cases}$$

將兩式相減，得：

$$a(u-x_0)=-b(v-y_0),$$

令

$$a_1=\frac{a}{(a,b)},\quad b_1=\frac{b}{(a,b)}$$

則由上式得

$$a_1(u-x_0)=-b_1(v-y_0)$$

根據這個等式，我們知道 b_1 是 $a_1(u-x_0)$ 的因數，由於 a_1 與 b_1 互質，所以 b_1 是 $u-x_0$ 的一個因數，換言之，必有一個整數 t，使得

$$u-x_0=b_1t,$$

代入上式，得

$$v-y_0=-a_1t,$$

於是，

$$\begin{cases} u=x_0+b_1t, \\ v=y_0-a_1t。 \end{cases}$$

也就是說，$ax+by=c$ 的整數解都是下面的形式：

$$\begin{cases} x=x_0+\dfrac{b}{(a,b)}t, \\ y=y_0-\dfrac{a}{(a,b)}t, \end{cases}\quad \text{其中 } t \text{ 為任意整數。}$$

上面這個結果，可以寫成一個定理：

定理２　設 $ax+by=c$ 是一個整係數二元一次方程式，若 $x=x_0$，$y=y_0$ 是它的一組整數解，

則它的全部整數解為：

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{(a,b)}\,t \;, \\ \\ y = y_0 - \dfrac{a}{(a,b)}\,t \;, \end{cases}\qquad \text{其中 } t \text{ 為任意整數。}$$

例7　試利用定理 2 寫出 $6x + 9y = 12$ 的全部整數解。

解　$x = 2$，$y = 0$ 是它的一組整數解，又因為

$$\frac{6}{(6,9)} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\frac{9}{(6,9)} = \frac{9}{3} = 3$$

依定理 2，$6x + 9y = 12$ 的全部整數解為

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \;, \\ y = -2t \;, \end{cases}\qquad \text{其中 } t \text{ 為任意整數。}$$

【隨堂練習】

試利用定理 2 寫出 $4x \neq 2y = 6$ 的全部整數解。

以上所討論的求二元一次方程式整數解的問題，實際上就是求直線上格子點的問題。沒有整數解就是代表直線不通過任何格子點的意思。

例8　求下列直線所經過的格子點的個數。

1.　$2x + 3y = 3$　　　2.　$12x + 8y = 7$

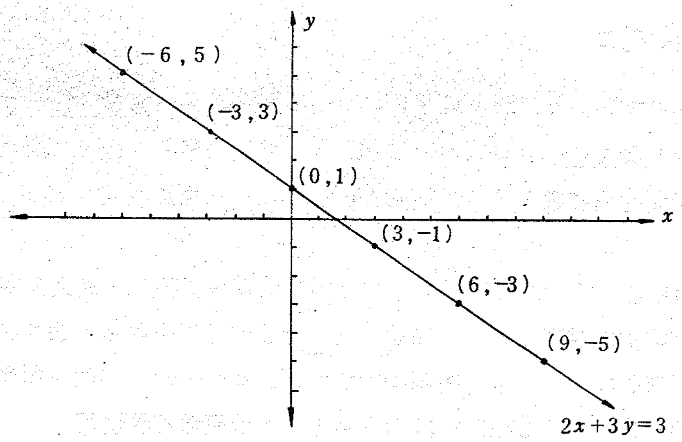
解　1.　由定理 2 得 $2x + 3y = 3$ 的全部整數解是：

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \;, \\ y = 1 - 2t \;, \end{cases}\qquad \text{其中 } t \text{ 為任意整數。}$$

又由基礎數學第一冊第四章的討論，知

$$2x + 3y = 3$$

表平面上的一直線。所以，點 $(0 + 3t\,,\ 1 - 2t)$ 均在直線 $2x + 3y = 3$ 上。又 t 可以是任意整數，所以直線 $2x + 3y = 3$ 上有無限多個格子點。如下圖所示：



$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$t=-2$　表點　$(-6, 5)$

$t=-1$　表點　$(-3, 3)$

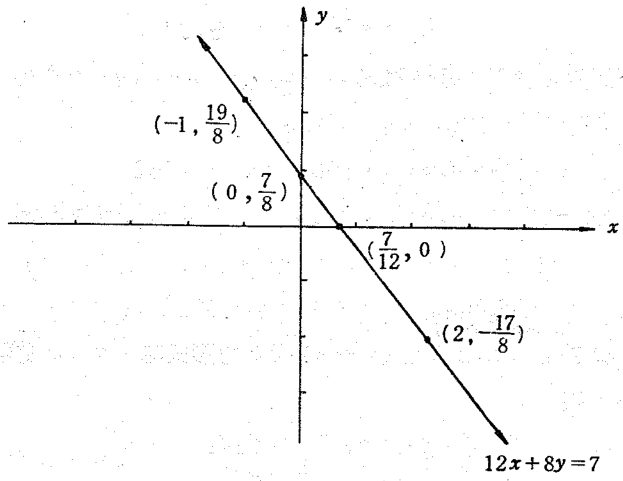
$t=\ \ 0$　表點　$(0, 1)$

$t=\ \ 1$　表點　$(3, -1)$

$t=\ \ 2$　表點　$(6, -3)$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

2. 因爲12與8的最大公因數4不是7的因數，由定理1知 $12x+8y=7$ 沒有整數解。所以直線 $12x+8y=7$ 上沒有格子點，如下圖所示：



【隨堂練習】

求下列直線所經過格子點的個數：

1. $6x+9y=12$　　　3. $2x+4y=3$

1-2 秦九韶的求一術

前節所介紹的尤拉解法，實際上早在我國南宋年間，大算學家秦九韶在他所著的數書九章中就已經使用過了。當時，秦九韶把這種方法稱爲求一術。爲什麼稱爲「求一」術呢？我們說明於下：

設 a 與 b 爲互質的正整數，而我們要求出下述方程式的整數解：

$$ax - by = 1$$

那麼，利用輾轉相除法，所得的最後一個不爲 0 的餘數就是 a 與 b 的最大公因數 1，秦九韶的求一術就是要使用輾轉相除法求這個 1；而他在數書九章所說的「以少除多，遞互除之」，也就是現代所稱的輾轉相除法，不僅如此，他的求一術還指出如何求出 $ax - by = 1$ 的一組整數解。我們把它的方法利用前節的例 5 解說如下：（5723，4171）＝97，依輾轉相除法得

$$
\begin{aligned}
5723 &= 1 \cdot 4171 + 1552 \\
4171 &= 2 \cdot 1552 + 1067 \\
1552 &= 1 \cdot 1067 + 485 \\
1067 &= 2 \cdot 485 + 97 \\
485 &= 5 \cdot 97 \text{ 。}
\end{aligned}
$$

在這個輾轉相除的過程中，我們得一系列的商如下：

$q_0 = 1$，$q_1 = 2$，$q_2 = 1$，$q_3 = 2$，$q_4 = 5$，

又依前節例 6，得

$$
\begin{aligned}
97 &= 1 \cdot 1067 - 2 \cdot 485 \\
&= 3 \cdot 1067 - 2 \cdot 1552 \\
&= 3 \cdot 4171 - 8 \cdot 1552 \\
&= 11 \cdot 4171 - 8 \cdot 5723 \text{，}
\end{aligned}
$$

如果把前面的各個商不以數字表示，而改寫成 q_0，q_1，q_2，q_3，q_4，則得

$$
\begin{aligned}
97 &= 1 \cdot 1067 - q_3 \cdot 485 \\
&= (1 + q_2 q_3) \cdot 1067 - q_3 \cdot 1552 \\
&= (1 + q_2 q_3) \cdot 4171 - (q_3 + q_1(1 + q_2 q_3)) \cdot 1552 \\
&= \Big(1 + q_2 q_3 + q_0(q_3 + q_1(1 + q_2 q_3))\Big) \cdot 4171 - \\
&\quad (q_3 + q_1(1 + q_2 q_3)) \cdot 5723 \text{，}
\end{aligned}
$$

換言之，將（5723，4171）表示成 $5723u + 4171v$ 的形式時，u，v 這兩個整數可以由輾轉相除過程中所得的商來計算，即

$$
\begin{aligned}
-u &= q_3 + q_1(1 + q_2 q_3) \\
&= q_3(q_2 q_1 + 1) + q_1 \text{，} \\
v &= 1 + q_2 q_3 + q_0(q_3 + q_1(1 + q_2 q_3)) \\
&= q_3(q_2(q_1 q_0 + 1) + q_0) + q_1 q_0 + 1 \text{，}
\end{aligned}
$$

上面這兩個表示式看起來雜亂無章，實際上却有規則可循。如果我們做一個表如下：

	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4
1	q_0				
0	1				

現在，我們根據下面這個方法在每個空格內填進一個數值：每一個空格所要填進的數值是它上方的商 q_i 乘以它左方一格 那個數，所得的乘積再與它左方二格那個數相加所得的和。根據這個方法

第二列第一個空格應塡進　q_1q_0+1，

第二列第二個空格應塡進　$q_2(q_1q_0+1)+q_0$，

第二列第三個空格應塡進　$q_3(q_2(q_1q_0+1)+q_0)+q_1q_0+1$，

上面前兩個數出現在 v 的表示式的兩個括號內而第三個數就是 v。另一方面，

第三列第一個空格應塡進　q_1，

第三列第二個空格應塡進　q_2q_1+1，

第三列第三個空格應塡進　$q_3(q_2q_1+1)+q_1$，

上面第二個數出現在 $-u$ 的表示式的括號內而第三個數就是 $-u$。

因此，當我們要求 $5723x+4171y=97$ 的整數解時，由於，97 就是 5723 與 4171 的最大公因數，只要求得輾轉相除法中的各個商，仿上表的填法，就可求得所要的一組解。不過，我們還需注意正負號的問題。

依前節的例 6，我們知道 $5723x+4171y=97$ 有一組整數解爲 $x=-8$，$y=11$。那麼，在上面所介紹的表中，這兩個數出現在那兩個方格裏呢？根據上法所得的表爲

	1	2	1	2	5
1	1	3	4	11	
0	1	2	3	8	

由此可見，8 與 11 出現在倒數第二行中。

我們再考慮 $31x+14y=1$ 這個方程式作比較，先將 31 與 14 進行輾轉相除，得

$$31=2\cdot 14+3\ ,$$
$$14=4\cdot 3+2\ ,$$
$$3=1\cdot 2+1\ ,$$
$$2=2\cdot 1\ ,$$

所得的商依序爲 2，4，1，2 則根據上法所得的表爲

	2	4	1	2
1	2	9	11	
0	1	4	5	

倒數第二行中的兩數爲 11及 5，很容易就可驗證得知，$x=5$，$y=-11$ 是 $31x+14y=1$ 的一組整數解。

在這兩個例子中，x 的解都是取自倒數第二行最下方那個數，不過，一個是負值，一個是正值，這項差異是來自何處呢？我們寫成一個定理來說明。

定理3 設 a 與 b 是不爲 0 的整數，與 a 與 b 進行輾轉相除，得

$$\begin{aligned}
a &= q_0 \cdot b + r_0, & 0 < r_0 < |b|,\\
b &= q_1 \cdot r_0 + r_1, & 0 < r_1 < r_0,\\
r_0 &= q_2 \cdot r_1 + r_2, & 0 < r_2 < r_1,\\
&\vdots & \vdots\\
r_{k-2} &= q_k \cdot r_{k-1} + r_k, & 0 < r_k < r_{k-1},\\
r_{k-1} &= q_{k+1} \cdot r_k,
\end{aligned}$$

若依上法所得的表爲

	q_0	q_1	q_2	……	q_{k-1}	q_k	q_{k+1}
1	q_0	v_1	v_2	……	v_{k-1}	v_k	
0	1	u_1	u_2	……	u_{k-1}	u_k	

則 $x=(-1)^{k+2}u_k$，$y=(-1)^{k+1}u_k$ 是 $ax+by=(a,b)$ 的一組整數解。請注意，x 值中的乘冪 $k+2$ 是 v_k，u_k 所在的行數。

例9 試利用定理3求 $127x+179y=1$ 的全部整數解。

解 將 127 與 179 進行輾轉相除，得

$$\begin{aligned}
127 &= 0 \cdot 179 + 127,\\
179 &= 1 \cdot 127 + 52,\\
127 &= 2 \cdot 52 + 23,\\
52 &= 2 \cdot 23 + 6,\\
23 &= 3 \cdot 6 + 5,\\
6 &= 1 \cdot 5 + 1,\\
5 &= 5 \cdot 1,
\end{aligned}$$

依上法作成表如下：

	0	1	2	2	3	1	5
1	0	1	2	5	17	22	
0	1	1	3	7	24	31	

依定理3，$127x+179y=1$ 的一組整數解爲

$$\begin{cases} x=(-1)^7\cdot 31=-31, \\ y=(-1)^6\cdot 22=\ \ 22, \end{cases}$$

又因爲 $(127, 179)=1$，依前節定理2，可知 $127x+179y=1$ 的全部整數解爲

$$\begin{cases} x=-31+179t, \\ y=\ \ 22-127t, \end{cases}$$ 其中 t 爲任意整數。

【隨堂練習】

1. 試以定理3的方法求 $17x+12y=1$ 的全部整數解。
2. 試以定理3的方法求 $153x-100y=1$ 的全部整數解。

例10　試以定理3的方法求 $10x+14y=20$ 的全部整數解。

解　因爲 $(10, 14)=2$，所以，利用定理3只能先解

$$10x+14y=2$$

將10與14進行輾轉相除，得

$$10=0\cdot 14+10,$$
$$14=1\cdot 10+4,$$
$$10=2\cdot 4+2,$$
$$4=2\cdot 2,$$

依上法作成一個表如下：

	0	1	2	2
1	0	1	2	
0	1	1	3	

依定理3，$10x+14y=2$ 的一組整數解爲

$$\begin{cases} x=(-1)^4\cdot 3=3, \\ y=(-1)^3\cdot 2=-2, \end{cases}$$

於是，$10x+14y=20$ 的一組整數解爲

$$\begin{cases} x=3\times\dfrac{20}{2}=30, \\ y=-2\times\dfrac{20}{2}=-20, \end{cases}$$

依前節定理2，$10x+14y=20$ 的全部整數解爲

$$\begin{cases} x = 30 + 7t\ , \\ y = -20 - 5t\ , \end{cases}$$ 其中 t 爲任意整數。

【隨堂練習】

試利用前面隨堂練習的結果求 $17x + 12y = 5$ 的全部整數解。

1-3　中國剩餘定理

利用前兩節所介紹的求二元一次方程式 $ax + by = c$ 的整數解方法，我們就可解說在本章最前面所提到的孫子算經中的問題及其解法。

設物品原有 x 個，因爲三個一數，餘兩個，故知 $x - 2$ 是3的倍數，即：

$$x = 3u + 2\text{，其中 } u \text{ 是整數}$$

同理

$$x = 5v + 3\text{，其中 } v \text{ 是整數}$$

$$x = 7w + 2\text{，其中 } w \text{ 是整數}$$

換言之，我們得出一個方程組

$$\begin{cases} x = 3u + 2 \cdots (1) \\ x = 5v + 3 \cdots (2) \\ x = 7w + 2 \cdots (3) \end{cases}$$

由(1)，(2)消去 x，得

$$3u - 5v = 1$$

利用前兩節所介紹的方法，可知這個方程式的全部整數解爲

$$\begin{cases} u = 2 + 5s\ , \\ v = 1 + 3s\ , \end{cases}$$ 其中 s 爲整數。

將 u 值代入(1)式中，得

$$\begin{cases} x = 15s + 8 \quad \cdots (4) \\ x = \quad 7w + 2 \quad \cdots (3) \end{cases}$$

再由(3)，(4)兩式消去 x，得

$$7w - 15s = 6 \cdots (5)$$

再利用前兩節的方法，可知(5)這個方程式的全部整數解爲：

$$\begin{cases} w = 3 + 15t\ , \\ s = 1 + \ 7t\ , \end{cases}$$ 其中 t 爲任意整數。

將 w 值代入(3)式中，得

$$x = 105t + 23\text{，其中 } t \text{ 爲整數。}$$

也就是說，物品的個數可能是23個（$t = 0$），也可能是128個（$t = 1$），也可能是…。

除了上面這個解法之外，我們還可以用另外一種方法來處理這種問題。事實上，下面要介紹的方

法，不僅是孫子算經中所使用的，而且也是現代所常用的。這個解法說明如下：

若我們能求得三個整數 a，b，c 使得

(1)　a 被 3 除的餘數是 1，而被 5 及 7 整除，

(2)　b 被 5 除的餘數是 1，而被 3 及 7 整除，

(3)　c 被 7 除的餘數是 1，而被 3 及 5 整除，

則 $2a+3b+2c$ 被 3 除的餘數必爲 2，被 5 除的餘數必爲 3，被 7 除的餘數必爲 2，因爲

$$a=3\alpha+1\,,\qquad \alpha \text{爲整數}$$
$$b=3\beta\,,\qquad \beta \text{爲整數}$$
$$c=3\gamma\,,\qquad \gamma \text{爲整數}$$

於是，可得：

$$2a+3b+2c=3(2\alpha+3\beta+2\gamma)+2\,,$$

亦即，$2a+3b+2c$ 被 3 除的餘數是 2。同理可證，$2a+3b+2c$ 被 5 除的餘數是 3，被 7 除的餘數是 2。

其次，我們討論 a 值的求法。因爲 a 被 3 除的餘數是 1，故知必有一個整數 y，使得

$$a=3y+1 \cdots (6)$$

又因爲 a 可被 5 及 7 整除，故知 a 可被 35 整除。於是，必有一個整數 z，使得

$$a=35z \cdots (7)$$

由(6)，(7)消去 a，得：

$$3y-35z=-1$$

利用前兩節所介紹的方法，可知這個方程式的全部整數解是：

$$\begin{cases} y=23+35r\,, \\ z=2+3r\,, \end{cases} \quad \text{其中 } r \text{ 爲任意整數。}$$

將 y 值代入(6)式中，得：

$$a=70+105r\text{，其中 } r \text{ 爲整數。}$$

同理可得

$$b=21+105s\text{，其中 } s \text{ 爲整數。}$$
$$c=15+105t\text{，其中 } t \text{ 爲整數。}$$

於是：

$$\begin{aligned} & 2a+3b+2c \\ &=140+63+30+105(2r+3s+2t) \\ &=233+105(2r+3s+2t) \\ &=23+105(2r+3s+2t+2) \\ &=23+105q\text{，其中 } q \text{ 爲整數。} \end{aligned}$$

所以物品可能有 23 個（$q=0$），也可能有 128 個（$q=1$），也可能是…。

在孫子算經「物不知其數」題目後面的解法「術曰」中所提到的數值 140,63,30,233,70,21,

15等，都出現在前面所求得的 a ，b ，c ，$2a+3b+2c$ 等數之中，也就是說，孫子算經中雖然沒有將解法的原理詳細解說，但是，其中的解法就是前面所介紹的方法，這是毫無疑問的。

前面所介紹的方法，可以推廣成下面這個中國剩餘定理：

定理4　若$m_1, m_2, \cdots, m_k$ 爲兩兩互質，且都不爲0的整數，則對任意整數$r_1, r_2, \cdots, r_k$，恒有一個整數N，使得

$N-r_1$ 可被m_1 整除，

$N-r_2$ 可被m_2 整除，

$\vdots$　　$\vdots$　　$\vdots$

$N-r_k$ 可被m_k 整除，

而且，若N_1, N_2 兩個整數都滿足上述條件，則N_1-N_2 可被$m_1m_2\cdots m_k$ 整除。

證明　令

$$m=m_1m_2\cdots m_k \;,$$

$$n_1=\frac{m}{m_1} \;,$$

$$n_2=\frac{m}{m_2} \;,$$

$$\vdots$$

$$n_k=\frac{m}{m_k} \;。$$

因爲m_1與$m_2, m_3, \cdots, m_k$都互質，所以，m_1 與 $n_1=m_2m_3\cdots m_k$ 互質。於是，依§1定理1，方程式

$$m_1x+n_1y=-1$$

必有整數解。設 $x=x_1$ ，$y=y_1$ 是上述方程式的一組整數解。令

$$a_1=m_1x_1+1 \;,$$

則 a_1 是 n_1 的倍數，也就是說，a_1 可以被m_2 ，m_3 ，$\cdots$，m_k整除。同理，可以求得 $k-1$ 個整數 $a_2, a_3, \cdots, a_k$ ，使得

a_2 被m_2 除的餘數爲1，而可被 n_2 整除；

a_3 被m_3 除的餘數爲1，而可被 n_3 整除；

$\vdots$

a_k 被m_k 除的餘數爲1，而可被 n_k 整除。

令

$$N=r_1a_1+r_2a_2+\cdots+r_ka_k \;,$$

則

$$N-r_1=r_1(a_1-1)+r_2a_2+\cdots+r_ka_k \;,$$

因爲 a_1-1，a_2，a_3，…，a_k 都是 m_1 的倍數，所以，$N-r_1$ 可被 m_1 整除。同理可證

$$N-r_2 \text{ 可被 } m_2 \text{ 整除，}$$
$$N-r_3 \text{ 可被 } m_3 \text{ 整除，}$$
$$\vdots$$
$$N-r_k \text{ 可被 } m_k \text{ 整除。}$$

其次，若兩整數 N_1 與 N_2 都滿足上述的條件，則因爲 N_1-r_1 與 N_2-r_1 都可被 m_1 整除，故 $(N_1-r_1)-(N_2-r_1)$ 可被 m_1 整除，也就是說，N_1-N_2 可被 m_1 整除。同理可證，N_1-N_2 可被 m_2，m_3，…，m_k 整除。

因爲 m_1，m_2，…，m_k 兩兩互質，所以，它們的最小公倍數是 $|m_1m_2\cdots m_k|$。於是，N_1-N_2 可被 $|m_1m_2\cdots m_k|$ 整除，故 N_1-N_2 可被 $m_1m_2\cdots m_k$ 整除。

例 11　二數餘一，五數餘二，七數餘三，九數餘四，問本數。（這個題目是南宋大算學家楊輝所著的續古摘奇算法中的一題）。

解　依題意，令

$$m_1=2,\ m_2=5,\ m_3=7,\ m_4=9,\ r_1=1,\ r_2=2,\ r_3=3,\ r_4=4。$$

則

$$n_1=315,\ n_2=126,\ n_3=90,\ n_4=70。$$

其次，利用§1所介紹的方法，可知方程式

$$2x+315y=-1$$

有一組整數解爲 $x=157$，$y=-1$。因此，可令

$$a_1=2\times157+1=315。$$

同法，可令

$$a_2=126,$$
$$a_3=-90,$$
$$a_4=280,$$

令

$$N=r_1a_1+r_2a_2+r_3a_3+r_4a_4,$$

則

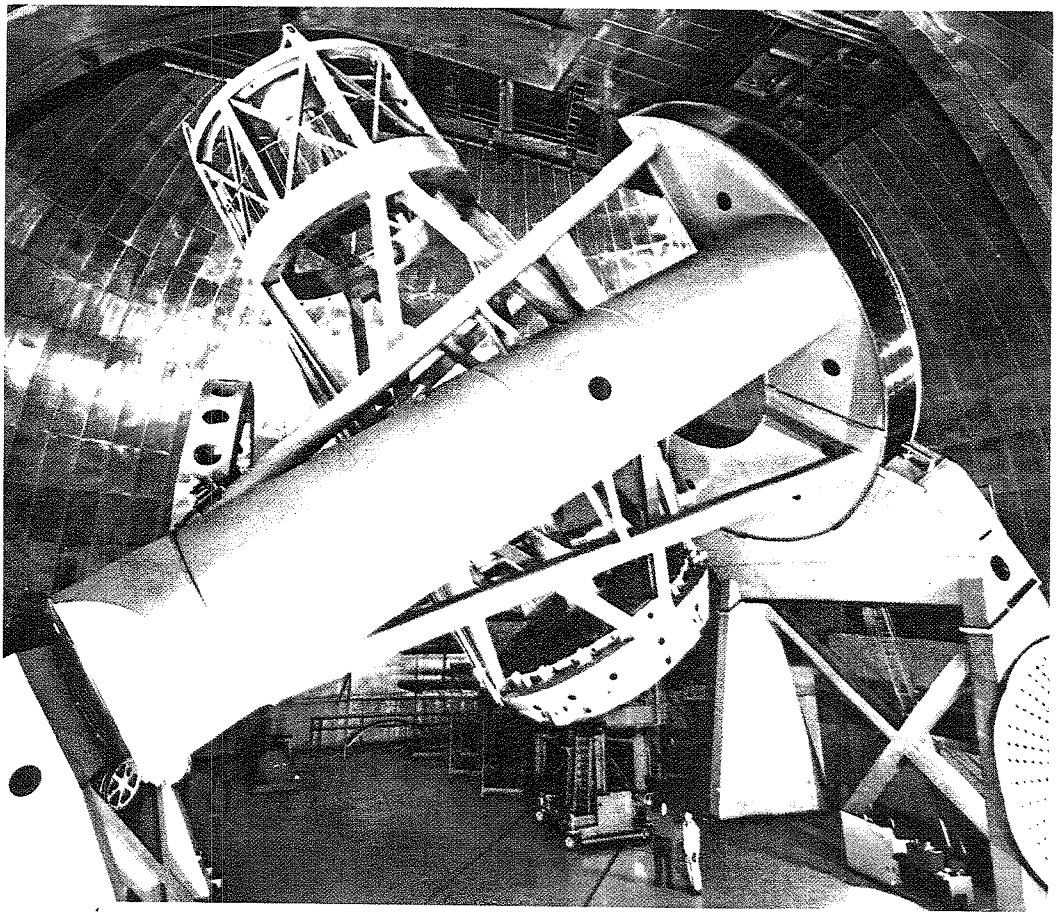
$$N=1\times315+2\times126+3\times(-90)+4\times280=1417$$

因此，1417是本題的一個解。又因 $2\times5\times7\times9=630$，而且 $1417=2\times630+157$，依定理4，本題的全部解爲

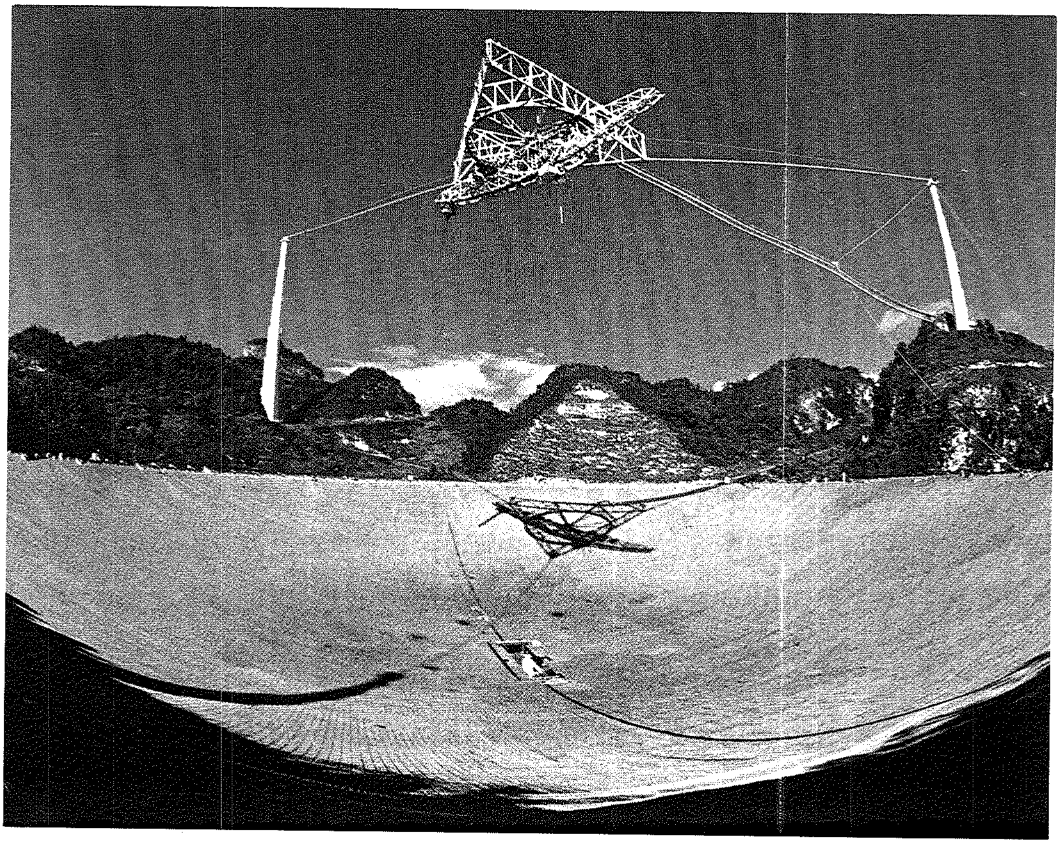
$$N=157+630t \text{，其中 } t \text{ 爲整數。}$$

【隨堂練習】

二數餘一，三數餘一，五數餘二，七數餘三，問本數？



美國巴羅馬山的 5 公尺反射式望遠鏡



亞雷希波（位於波多黎各北岸）電波天文台巨型無線電望遠鏡