

從三角形面積公式談 幾何直觀教學

洪萬生

國立臺灣師範大學數學系

三角形面積等於 $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$ ，這是衆所周知的事實。它是小學數學課程中一個不可或缺的題材，不僅由於它簡潔實用，而且也因為它是面積理論的基石。拙見以為未來的小學數學教材不管形式如何演變，任何編寫者如果想把重要、根本且實用的數學知識包括進去，那麼此一公式或其等價形式仍然必須優先加以考慮。

三角形面積公式擁有頗為深厚的實用背景，其發生、發展可追溯到我國先秦時代。當封建制度逐漸崩潰，土地變為私有，國君便開始「稅畝」——也就是按照土地大小徵收賦稅，因此乃需要有計算土地面積的知識。中國古代最早算經「九章算術」第一卷叫做「方田章」，就是反映此一史實。再則，史家也認為「九章算術」是幾位不知名的數學家在東漢長安官府，依據秦漢之計算簿籍的內容而寫成，因此，三角形面積公式的實用背景是很顯然的。

國小、國中階段的數學教育精神應否以實用為主，可能仍是個引起爭論的問題。但是，如果數學教材與我們周遭的生活環境毫無關聯，則必然不易讓學生產生共鳴；而單靠教師的三寸不爛之舌，恐怕也無法使學生相信數學的學習可以訓練心智和思考，更無法引導他們去領會數學那種「像星光一樣燦爛明銳但却冷漠抽象」的美。因此，在國小、國中數學課程納入一定程度的實用題材，大概是既符合數學發展史的結論，而又顧及幼童、少年學習心理的一種作法，應該不會招致太多的異議才是。

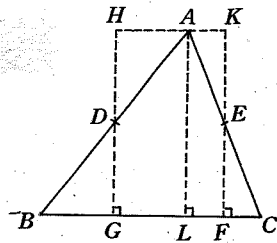
問題是這些實用題材究竟如何表現？如果還是用「形式」的手法來處理，而無法讓學生通過某些生活經驗自然地觸及這些題材，那麼，所謂的「實用」恐怕只是虛有其表而已。以筆者最近參與的一個事例來看，我們的國民小學之數學教學活動似乎並不是很「生活化」。

筆者於今年八月六日隨同科學月刊幾位編委前往羅東國小，參加「尊親科學才能少年選拔」的評審工作，並負責擬定「數學甄試」題目。結果，甄試成績並不很理想。試題之中有一個題目是用來測驗學生對「對稱」觀念的了解的，考試方式則與他們的生活經驗——摺紙剪貼——結合，我們要求考生用紙張摺疊剪出一個正八邊形，並且說明剪法，可惜只有幾位考生做出正確的答案。這可能表示，一般國小甚至國中學生在學習對稱觀念時，根本無法從他的幼年「摺紙剪貼」經驗中獲得啟發與助益。

事實上，「摺紙剪貼」可以告訴我們更多基本的幾何事實。以上述那一份試題為例，我們還有一個題目要求學生把等底等高的兩個三角形，分別剪貼成兩個大小形狀一樣的長方形，主要目地是想測驗學生是否知道三角形面積公式是怎麼來的，很遺憾，這個題目沒有人做出正確解答。筆者認為「為什麼三角形面積等於 $\frac{1}{2} \times \text{底} \times \text{高}$ 」，是小學數學中很值得問的問題，因此，造成這個解答「空白」的

因素，是應該好好加以探索的。

然則，運用「剪貼」的手法到底要怎麼驗證三角形的面積公式呢？除了現行國民小學數學第十冊所介紹的方法外，我國魏晉時代數學家劉徽，在公元第三世紀時就已經告訴我們一個卓越，而且本質的方法，他把這種方法叫做「以盈補虛」或「出入相補」。它的程序是這樣的，比如看圖一的三角形 $\triangle ABC$ ，分別取 $\overline{AB}$ ， $\overline{AC}$ 的中點 D ， E ，並且作 $\overline{EF} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ ，則剪掉 $\triangle ECF$ ， $\triangle DBG$ 分別貼到 $\triangle EAK$ ， $\triangle DAH$ 的位置，這樣子，顯然有三角形 ABC 面積 = 長方形



圖一

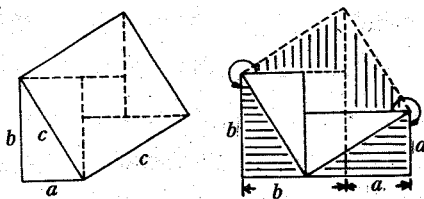
GHKF面積。但是 $\overline{GF} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ， $\overline{HG} = \overline{AL}$ 故得知 $\triangle ABC$ 面積 =

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AL}。$$

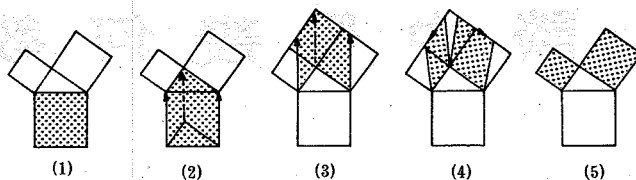
筆者在此爲了解說的方便，被迫講了很多「廢話」。實際上，對初學者而言，最理想的教學活動就是「不落言詮」，多讓學生動手操作，因爲 D ， E 必須取中點，以及 $\overline{GF} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ 勢必成立的事實，都是可能經由嘗試錯誤而發現的。我們都知道數學中的原理，正如自然科學中的定律一樣，都是被發現，而非「證明」出來的。所以，筆者認爲在數學教育的初等階段之教學活動中，透過實際操作的經驗來培養實驗的精神，是值得倡導的。

「出入相補」這個脫胎自生活經驗的原理，不但能夠帶領我們進入歐氏幾何學的核心，而且還引進一種極其明顯的動態觀點。怎麼說呢？讓我們來考察兩個例子。首先，如以三國孫吳數學家趙君卿的「弦圖」爲藍圖，則運用「出入相補」證明畢氏定理時（見圖二），就涉及兩個旋轉運動。其次，如以歐幾里得「幾何原本」卷一命題 4F 的面積證法爲藍圖，則運用「出入相補」證明畢氏定理時，就涉及兩個平移運動和一個切變（Shearing）（見圖三）。準此，我們也可發現線性代數理論的介入幾何學研究，絕對不是偶然的。

總之，從三角形面積公式這個貌不驚人的事實出發，通過我們對它的深入了解，的確可以發現像「剪貼」這種微不足道的生活經驗，根本掌握了幾何學的深刻內涵。因此，如何在教材中，發掘相關



圖二 畢氏定理的「弦圖」證明

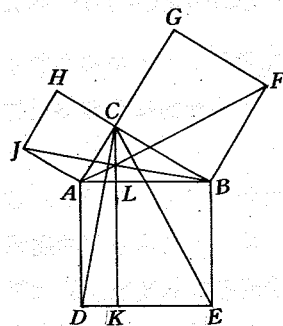


圖三 其中(2)，(3)兩步驟為平移；(4)為兩個切變

的生活經驗與實用背景，也許是今後數學教育工作者，值得面對而且深思的一個重大課題。

參考資料

1. 孫文青 「九章算術源流考」 刊「女師大學術季刊」民國十九年第二卷第一期，頁1—60。
2. 陳良佐 「先秦數學的發展及其影響」 刊「中央研究院歷史語言研究所集刊」1978年第四十九本第二分，頁263—320。
3. 洪萬生 「剪貼、拼湊商高定理的證明」 刊「科學教育雙月刊」民國六十九年六月第35期，頁25—28。
4. 洪萬生 「古代中國的幾何學」 刊「科學月刊」民國七十年八月第十二卷第八期，頁22—30。
5. H. Eves *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, 1976.
6. 林義雄、黃文達與洪萬生 「線性代數導引」，森大圖書公司，68年11月初版。 □



圖四 歐幾里得的「面積證法」