

談中學幾何教材

林福來

國立臺灣師範大學數學系

一、幾何教材的兩個問題

在數學史中，有許多數學理論是根據幾何的概念或幾何的表現方式發展出來的。在中學數學中，由代數與幾何的轉化發展出的解析幾何，線性代數及研究變換群作用下的不變性的 Klein 幾何學都是極好的例子。

我們知道幾乎在所有的數學領域中，幾何學都可以提供一種或多種的觀點和看法。通常一個數學問題或概念，使用幾何的邏輯方法解釋後，不僅可使我們對此問題或概念有直觀的了解，同時還可以進一步洞悉問題及概念的本質。許許多多的數學問題，往往都可借助幾何技巧有效地處理。因此，幾何教材在數學課程中一向占有極重的份量。

中學的幾何教材，近年來在許多國家的課程計畫中都作了很大的改革。傳統的平面幾何學，強調演繹證明，其過程對一般國中生而言偏難。許多國中學生的智力發展還沒成熟得容易接受演繹證明的階段，勉強教學自然會造成學習障礙。既然幾何教材重要但傳統的處理方式又會引起教學困擾，自然地我們會想到改編教材，改寫處理幾何的方式，使得幾何教材沒有被偏廢，學生又容易接受。換句話說，這是一個像以下所述的問題：

問題 1：幾何教材的內容、份量及表現方式如何處理？

我們當然希望幾何的教材，是一套活的、發展中的學問，不是只編一套前人的成就大全。只將幾何視為是一套自我相容的獨立知識來處理是不對的。幾何學的知識不應該只是幾何的內在應用而已。我們有責任將幾何編寫得使學生學了之後，不管將來是就業或升學，這些幾何知識都還可以一再被應用。也就是說，我們也應該考慮下面的問題：

問題 2：如何編寫幾何教材使其成為活的知識，讓學生將來能有效應用？

關於這兩個問題，目前在師大科教中心的數學課程改進計畫的研究小組，已做了某種程度的處理。本文除了將研究小組的處理情形根據所設計的綱要加以敘述外，主要也想將一些英國新進的研究計畫中，涉及此問題的處理情形，就筆者所知，提出來供大家參考。當然，讀者不能奢求在此文中找到這兩個問題的全部答案，事實上可能永遠沒有最佳答案，只能有改進中的處理情形。下節先談分析問題 1，2 的一種工具：幾何的探討法。

二、五種不同幾何探討方法

英國 Nottingham 大學的數學教育中心 Shell Centre 有個中學數學課程改進計畫，計畫主持人 Boys 先生在 1976 年的一篇 The Critical Review^② 中說明了五種中學幾何教材的探討之方式，主要是要讓中學老師了解有這麼多的可能探討法，以利於教學。並不是要中學老師從五種探討法中選取某一種而放棄另一種。

1. 探討法分類的根據

英國各種教科書版本及教師們，對於中學幾何教材應該包含那一些內容以及如何探討幾何才恰當，意見很不一致。當然這跟對幾何的教學目的看法有關。不過教學目的並不能說明一切：例如，如果我們想訓練學生的「證明」能力，那麼幾乎每一種內涵都可達成這目的。比如說，傳統平面幾何中涵蓋全等三角形的教材可以達成，從學習各種圖形變換的合成結果也可達成；向量的應用題也可訓練「證明」能力。在此所要做的幾何學探討法的分類將不以學習目的為準，而是以對幾何本質的各種不同觀點來分類。

2. 五種探討法

(1) 第一種是傳統的平面幾何。

就是歐幾里德在他的幾何原本中所寫的探討方式。嚴密的公理化演繹法。

基本工具是全等三角形及平行。

主要探討對象是三角形、平行四邊形和圓，以及這些圖形的性質。

其中的結論，例如，兩個平行四邊形中如果底及平行邊對應相等，那麼兩個平行四邊形就全等。

另外，在平行四邊形 ABCD 中，（如圖 1）傳統平面幾何所強調的結果將是 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 全等。

(2) 第二種是 Klein 幾何

在 1872 年，Klein F. 在 Erlangen 大學演講講述一套幾何學所包含的內容是空間中的幾何圖形，經過一固定的變換群作用後仍然不改變的那些性質。

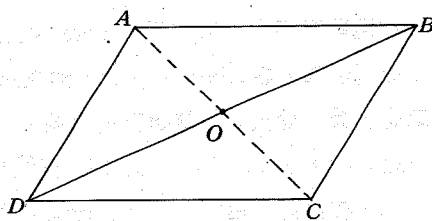


圖 1

Klein 的這種幾何學觀點，經過一百年仍然深深地影響許多數學家及數學教師。應用 Klein 的觀點來探討幾何，傳統平面幾何中的主要概念全等將被等長變換所取代。我們知道兩個幾何圖形全等的原意是其中的一個可以搬到另一圖形上使兩圖形處處重合。在此全等意義的描述中，以 Klein 的看法，其中主要的概念是將一圖形搬至另一圖形的變換，在此情形下，此變換當然是指保長變換。平面圖形的保長變換有平移、旋轉與鏡射。

Klein 幾何中的基本工具是保長變換及其他各種變換。研究的對象跟傳統平面幾何一樣，也是平面圖形及其性質。例如，在圖 1 中，Klein 幾何要強調的結果將是：

$\triangle ABD$ 以 O 為中心旋轉 180 度（半轉）後可得 $\triangle CDB$

*註：英國中學老師可以自選教科書，甚至自編教材，將在另文介紹“會考及其對課程影響”中進一步說明。

換句話說，傳統平面幾何中有關全等的結果，都可改成以保長變換來描述。

除了保長變換外，相對於傳統平面幾何中的相似概念，Klein 幾何中談放大、縮小。另外還有變形 (shear) 變換。

Klein 幾何對英國中學幾何影響很大，像大多數中學使用的 SMP 教科書，就從放大、縮小，保長變換的基本操作編排起。

(3) 第三種是所謂的 Dieudonné 幾何

此種幾何的主要工具是向量，介紹這種探討法也已有百年歷史，首創者是 Grassman 與 Cayley。近期的著作有 1964 年出版，Dieudonné 寫的 “Linear Algebra and Geometry”。此書當然遠超出中學程度，不過基於 Dieudonné 的集大成工作，就定名為 Dieudonné 幾何。

如果以向量為基本概念來探討幾何，那麼圖 1 所顯示的結果，可以描述為：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Dieudonné 幾何的基本工具是向量及向量的內積，所探討的對象仍然是平面圖形——三角形、四邊形和圓等等，以及圖形的性質。此種幾何探討方式在英國 MME * 系列教科書中被採用。

上述三種幾何，主要的差別是基本工具（概念），而討論的對象其結構實際上完全一樣。此對象今天許多數學家就稱它為歐氏平面或歐氏空間（如果討論三度空間的話）。雖然在中學幾何中，也可能討論一點其他空間，像球面的性質，不過歐氏空間才是討論的中心對象。

(4) 第四種是 Jeger 幾何

在 1964 年，Jeger M. 寫了一本書，書名是 “Transformation Geometry”，書中各章的章名依次為：1. 映射；2. 線對稱；3. 平移；4. 旋轉；5. 保長變換群；……。

從這些章名中，可以看出 Jeger 心目中的幾何學其研究對象為平面上的變換，不是平面上的圖形及圖形的性質。在 Klein 幾何中，變換只是工具，圖形的性質才是最終結論。依 Jeger 的看法，圖形變成是工具，變換才是該研究的對象。

比如說，Jeger 的書中第 112 頁^②，有如下一段敘述：

……在仿射作用下，一多邊形與其像的面積比是 $\mu : 1$ 。

同一頁又談了 $\mu = 1$ 的特例。此特例其實就相當於傳統平面幾何中，若兩平行四邊形的底與平行邊對應相等則兩四邊形全等的推廣。可是從所摘錄的這段話可以看出，很明顯地 Jeger 強調的是映射的性質。

Klein 幾何與 Jeger 幾何，往往混稱為變換幾何 (transformation geometry) 或運動幾何 (motion geometry)，不過這兩種幾何本質上還是不一樣的。

(5) 第五種是坐標幾何

這種觀點是將幾何視為線性代數，甚至視為代數的一部分。

點和直線的表示法不是 · 和 —，而是以坐標 (x, y) 和方程式來表示變換則以矩陣來表示；變換的合成就相當於矩陣的乘積。幾何性質的證明變成是純粹代數的證明。

註：MME 是 Midlands Mathematical Experiment 的簡稱，1967 第一版，由 M. M. E. Ltd, George G. Harrap & Co. Ltd 印行。這是一套不太流行的教科書。

上述這五種對幾何學本質上的不同看法，再摘要於下：

- ① 傳統平面幾何：利用全等三角形及平行爲工具，研究歐氏平面。
- ② Klein 幾何：利用保長變換及放大、縮小、變形等變換爲工具，研究歐氏平面。
- ③ Dieudonné 幾何：利用向量及向量的內積爲工具，研究歐氏平面。
- ④ Jeger 幾何：研究歐氏平面上圖形的變換及變換的性質。
- ⑤ 坐標幾何：利用坐標及矩陣爲工具，研究歐氏平面及其上的變換。

三、課程改進計畫研究小組的處理情形

目前各國教科書一般比較偏向將代數、幾何、統計與機率盡可能融合，再以螺旋方式安排各種教材。有關幾何的教材，上面所談的各種探討法往往也交替出現。就以目前在師大科教中心進行的國中、高中數學課程改進計畫所擬定的綱要爲例，來看看我們未來的幾何教材將是如何處理的。

1. 國中的幾何教材

在國中課程綱要中附有一份問卷及統計結果。其中第(20)題所問的是實驗幾何與理解幾何應如何處理？從這問題，我們知道研究小組原則上將國中幾何教材二分爲實驗與理解幾何。又第(21)題問的是幾何教材的編寫方式，統計結果多數老師認爲應該“用公設化作有系統的編寫”。根據這結果，顯然地研究小組將會保留大部分的傳統平面幾何。回到該綱要第2頁，有一段構想是：

“英國SMP教材的表現方式……特別注重操作型的教材（尤其是幾何方面），使學生透過操作獲得具體的經驗並激發學習的動機。以上SMP的教材表現方式頗值得我們學習。”

研究小組強烈的表示要學習英國SMP的表現方式。那麼SMP的幾何教材是怎樣處理的呢？根據黃敏見教授的研究，其特色是：傳統平面幾何幾乎不出現，取代的材料可分成兩類，一類是操作性的材料（實驗幾何，連續圖案，多面體的平面圖解與製作，對稱與鏡射的操作），另一類是線性映射（保長變換，圖形的放大、縮小與變形）、網路與拓撲變形。這些材料還與代數中的矩陣配合。換句話說，SMP的幾何教材屬於Klein幾何與坐標幾何的融會型態。

由這些紀錄，我們對於國中數學課程中幾何教材的處理情形大略上已有概念，即傳統平面幾何將被保留，這是多數老師的意見。操作型教材份量會增加，Klein幾何與坐標幾何也會融會出現。

細看研究小組所擬的綱要，大致情形就是這樣的，比如說綱要中第五冊編號G 33：已知、求證、證明的寫法；編號G 34：三角形；編號G 35：四邊形；G 36：圓；G 37：圓與直線，圓與直線的位置關係；G 38：相似形；G 39：兩圓的位置關係。如果再進一步看這些綱要中的細目，我們馬上可以發現傳統平面幾何大部分被保留，放在國三上學期來學習，顯然研究小組也考慮了學生的智力發展情況來安排的。（不知有沒有客觀根據）。

再看綱要中第四冊，編號G 31：對稱、平移、旋轉，其細目是：

1. 對稱圖形的實例，鏡對稱、點對稱、對稱圖形與圖案。
2. 對稱的坐標表示法。
3. 線段的平移，圖形的平移。
4. 圖形的旋轉。

這四個細目中1, 3和4強調的都是變換後圖形的關係, 標準的Klein 幾何內涵。細目2則將坐標幾何適時引進。另外, 編號G 32: 立體圖形。利用旋轉處理迴轉體。這綱要很明顯地告訴我們要以變換為工具來探討圖形, 也是Klein 幾何的內涵。編號G 16: 相似, 細目1.用圖形的放大或縮小的實例, 說出兩個圖形相似的意義。同樣屬於Klein 幾何的範圍。

關於坐標幾何的例子也很多。像編號AG 13: 平面直角坐標, 方格紙上的圖案, 方格紙上圖形的線對稱與點對稱。編號AG 17: 二元一次聯立方程式與幾何意義的討論。此節自然是要將直線以方程式表示, 標準的坐標幾何題材。

關於操作型的題材, 也就是所謂的實驗幾何。操作是為了獲取經驗作為進一步學習的基礎, 所以此類教材宜早安排。像第一冊編號G 07: 三角形的作圖與全等。G 08: 凸多邊形的內角和、外角和。第二冊編號G 15: 平行, 都純粹是操作型的教材。

2. 高中的幾何教材

從高中數學課程綱要中, 我們發現傳統平面幾何的教材不再重複編寫。主要的教材是Dieudonné 幾何(向量幾何)與坐標幾何。

高二第一學期基礎數學擬定的教材多半是向量幾何。第一章平面上的向量, 細目有:

1. 向量及其加法與係數積。
2. 標準基底及向量分量。
3. 內積及其分量表示法, Cauchy 不等式。
4. 直線的參數式。
5. 點與直線的距離。
6. 向量在平面幾何上的應用。

綜合這些細目, 不就是以向量、向量內積來探討歐氏平面的Dieudonné 幾何嗎。

接著第三章是向量與空間幾何, 細目是:

1. 空間的基本概念。
2. 空間的坐標, 空間向量的加、減與係數積, 向量的分量、內積、向量長。
3. 直線與平面的方程式。
4. 球面方程及其切面。

這些細目告訴我們, 將以空間中的向量及向量的內積為主要的工具, 探討的對象是歐氏空間的直線、平面、球面及其切面。這也就是Dieudonné 的空間幾何了。

至於坐標幾何, 在第一冊第四章談到平面坐標系及直線方程式, 第五章有二次函數圖形。主要的教材圓錐曲線則安排在第四冊。這裡所談的圓錐曲線比傳統教材刪減了許多。圓錐曲線的離心率刪去了, 圓錐曲線的平移、旋轉也刪去了。所談的都是很基本的圓錐曲線的標準式; 及曲線的頂點、焦點、準線等而已。這可從細目中看出:

1. 圓錐截痕。
2. 圓、圓心、半徑、圓與直線的交點、圓的切線、圓與圓的交點。
3. 橢圓、焦半徑性質與準線、長短軸。

4. 拋物線、頂點、焦點與準線。
5. 雙曲線、焦點、準線與頂點。

另外，較深的坐標幾何則安排在高三的選修數學教材中。比如說，高三選修數學課程甲；第五章矩陣，其細目為：

1. 矩陣的意義。
2. 矩陣的加減法，係數積及其應用。
3. 矩陣的乘法。
4. 線性方程組與矩陣。
5. 線性變換。
6. ………。

綜合國中、高中的課程改進綱要，我們發現傳統平面幾何，Klein 幾何，Dieudonné（向量）幾何及坐標幾何在未來的中學數學教材中，都會被介紹給學生。

上面的分析只是根據師大科教中心印行的綱要來討論。個人也是高中數學課程研究小組的一員。深知這些綱要（尤其是高中部分）並非是最後的定案。教材還在實驗中，實驗後多少是會有變異的。

四、英國SMP新研究計畫的處理情形

上一節所談的偏重於第一節所提問題1的一種處理情形。關於問題二，只是很抽象地說多安排操作型的教材，本題沒有被深入地討論。在第四節中，我們準備以英國SMP新研究計畫提供的一些資料，提出來作為問題2的參考答案。

SMP系列教科書是英國多種教科書版本中最成功的一種。絕大部分的學校（包括小學、中學、sixth form——大學預科）都是以SMP為教材或主要的參考教材。從實驗成功，第一本教科書於1965年六月正式出版，迄今十五年來，可以說SMP幾乎統治著英國的中學數學教材。筆者曾於十二月初，由國科會資助，親赴SMP編輯總部倫敦大學的西田學院（Westfield College）訪問SMP新研究計畫的主持人J. Ling先生。此次訪問帶給我個人許多新鮮的觀念，希望另文報導。現謹將有關幾何的一些新觀念提出來談一談。

SMP新研究計畫所編的中學教材，從1980學年起在英國40個中學進行實驗。此次所編的教材，對象是中學生中最差的15%外的所有85%的學生。教材分兩階段，中學第一、第二年為一階段，第三、四、五年為另一階段。現在完成的教材只是第一階段的部分。配合此分教材的教學法是小組學習或個別學習。主要是為了漸漸又盛行的混合能力編班的教學用。第一階段的教材分五大項，分別是數、代數、圖形、空間與統計。

重新編輯的這套書，其基本原則是：

要使數學語言，像符號概念、運算與敘述都成為學生日常生活中的用語，跟他們的習慣息息相關。

根據這原則，對空間（我們觀念中的幾何）教材的處理，有如下的說明：

“我們選取「空間」（space）當做部分教材的總名稱，其原因是希望這名稱能指出我們要討論的材料是有關培養學生的空間概念所需的活動過程的一個廣泛領域。如果稱為幾何，那麼不管想成是傳統的平面幾何或是變換幾何，實際上都太偏窄了，不能代表我們的取材。平面幾何和變換幾何探討

的只是人類的空間活動經驗的一部分而已，並且這一部分還被很形式化地表現出來。這種形式化的教材如果太早介紹給學生，許多其他的空間知識可能就會被忽略。學生中有相當的比例；他們的智力實際上很難發展到能接受形式化題材的層次。對這些學生而言，如果以未來形式化教材的需要做為選取早期教材的依據，顯然不合適。

過去的教材中，3維的許多材料都被忽略了。實際上，立體是本科目的重要材料。例如有一個跟日常生活相關的活動，即學生眼中接受3維的物體，而需要在2維空間中表現出來，像畫平面圖或照相。對於此類的活動，學生很需要實際練習的經驗。因此跟這活動有關的教材將是空間這部分所樂於包含的。

3維空間的處理例子，說明我們取材的依據是要配合學生的實際生活經驗。實際經驗是最主要的。雖然，學生們獲得實際經驗的練習量不一樣，不過在要求他們能在腦中清楚地將某一情況具象化且能進一步就在腦中加以處理運用之前，提供適當的練習機會是必需的。我們的看法是絕大部分的學生，所需要的實際練習一定遠比目前存在的教材所提供的還要多。”

根據這段說明，我們可以看出新的SMP空間教材的取材，不是以配合將來學幾何所需為準。早期的教材，重視的是要跟學生的實際活動經驗相關。只要相關，不管將來學幾何需不需要，都樂於選取；反之，如果無關，在最初中學兩年中也寧可不取。基本上，學生的日常生活經驗，接觸的多半是3維空間的物體，沒有理由逃避。要面對這些物體，設計成有訓練價值的教材。這是新SMP的幾何觀點。根據這觀點，在已編好的實驗教材中（非賣品，只能當場借閱），記得有一段這樣的設計：

1. 書中畫了一座建築物，在建築物周圍不同的地方有六個人手執照相機。（提示將有六張不同角度的照片。）

2. 畫出建築物的地面邊緣——是一個多邊形。（抽取特徵當工具）

3. 練習題：給予六張相片，擬出建築物的六個角度，問學生每張相片取景的角度？

SMP新計畫對空間物體勇於面對的作法，跟我們大多數老師的想法可能不一樣。許多國中老師有可能因為立體教材不容易教學，因而排斥它也說不定。在國中數學課程綱要，附錄內問卷調查中第(23)題題目是：

您認為國中生對立體幾何的認識應達到何種程度？

調查結果，多數意見是「只需認識簡單立體圖形」。因為問卷中沒有進一步問所填意見的理由，是不是因學生日常生活中不需要，還是立體東西不好教，或者學生學習有困難，甚至是否因存在的教材，處理方式欠佳等等，使得多數老師認為只需編些簡單立體圖形教材即可。至於我們天天面對的幾乎都是3維的物體，反而沒有被考慮。像這種盡量迴避立體圖形於中學的早期教材，可能的結果如何，實在值得進一步的探討。

五、幾何學的教學目標

1. 幾何學的教學目標

問題1與問題2，跟我們心目中的教學目標有極密切的關係。我們來摘錄兩位數學家的看法

1967年數學教師雜誌上重印Veblen O.的一篇文章“初等幾何的現代探討法”，其中——

Veblen 對幾何教材的編寫有個目標性的看法：

“對我而言，初等幾何的編寫方式，應該準備讓學生能夠將這些教材應用到他將來所要學習的學科上，要使幾何知識繼續被應用。也就是說處理幾何的教材不可孤立地只管幾何學本身，應該盡量想辦法使幾何的方法能夠一而再，再而三地在別的科學分支中使用。”

換句話說，Veblen 重視幾何在其他科學分支中的應用，不只是幾何本身或數學領域內的應用而已。

另外一位數學家 Allendoerfer C. B. 在 1969 年發表的一篇文章“幾何學的窘境”中，對於中、小學的幾何教學提出下列的教學目標：

1. 了解平面上的幾何圖形與空間中的立體圖形的基本性質。
2. 了解幾何變換，如平移、旋轉、鏡射的基本性質。
3. 培養學生對演繹法的欣賞力。
4. 訓練想像思考的能力。
5. 幾何與其他數學分支的統合能力。

上面這兩位數學家提出來的目標，相當具代表性。

根據這些目標，我們來談幾點關於處理幾何教材的看法。

(1) 發現式學習的教材

既然平面與空間中圖形的基本性質是學習的目標。一些學生將來可能應用的性質，如何表現使學生接受後，真正變成他知識的一部分是一個重要的問題。要使學生能夠真正了解，學習後有深刻的印象，遇到需要時可以發揮出來，把一些基本事實編成發現學習的方式是一個有效的辦法。比如說，國中數學實驗課程綱要中就有這類的安排，例如編號 G 08：將凸四、五、六邊形的內角和，以三角形內角和 180 度為基礎處理成發現式的教學。編號 AG 09 中也列出周長與面積公式是發現教學的教材。

只要稍加設計，基本性質都可成為發現教學的教材。例如：圓心角是圓周角的兩倍。這性質可以要求學生實地測量角度，預測圓心角、圓周角的關係。各人測得的角度可能不是剛好符合此性質，此情況正可利用來討論，當做證明此性質的動機。

(2) 嚴密的演繹系統不重要

Allendoerfer 提出演繹法學生要有欣賞的能力。嚴密的演繹法在中學不是訓練的時機。幾何的探討法與表現法很多，要提供教材使學生有機會嘗試組織問題，對問題的結果提出猜測，嘗試各種可能的方法去試驗他的猜測。這些過程進行後，才看需不需要將結果加以演繹證明。

我們說嚴密的演繹法不重要並不是說演繹法不重要，而是強調教材不應呆板地一步一步演繹下去，學生跟着一步一步了解，跟着走不管走多遠，表面上好像都了解，但一離開書本可能就說不出到底了解的是什麼。

(3) 強調幾何的直觀概念

記得 Poincaré 曾說過直觀使數學與真實世界取得連繫。利用邏輯推理，可以證明結果，但直觀則可使我們發現結果。知道如何證明當然好，但知道創造更佳。

我們知道幾何在其他數學分支中扮演的角色，很重要的一點就是提供直觀的了解。直觀概念是 Allendoerfer 所說的想像思考能力的基礎，兩個一次方程組的解，在幾何上就是兩直線的交點。學生

能了解這點，解方程組就不再是符號遊戲了。

上面所提的幾點，只是就想到的談一談而已，當然不是處理方式的列舉。

六、中學生的幾何理解力

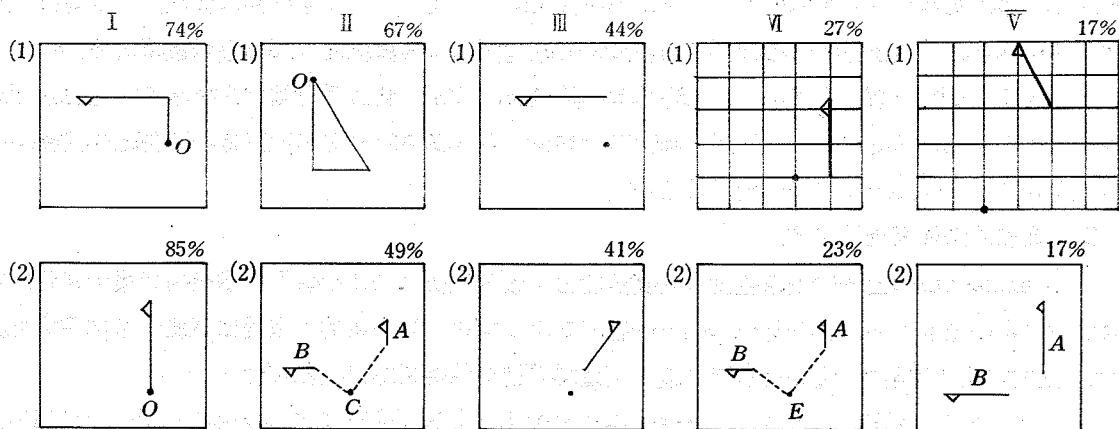
幾何教材的處理，最重要的考慮因素當然是學生的接受能力。學生智力發展足以接受教材，教學自然會事半功倍。我們國內對中學生的數學理解力的研究，還相當貧乏。英國倫敦大學 Chelsea 學院有個研究計畫“Concepts in Secondary Mathematics and Science”，簡稱 CSMS。CSMS 前後花了五年的時間(1974-79)，研究中學生數學與科學理解能力發展層次的分類。數學部分的研究成果由 Dr. Hart 主編於 1981 年正式成書出版^③。

書中第 10 章，11 章是幾何的部分，章名分別是“鏡射與旋轉”及“向量與矩陣”。可能大家會奇怪怎麼只有這一點幾何，解析幾何呢？其實這是學制的關係，英國學制 5 歲～11 歲是小學，11 歲～16 歲五年中學，再上去叫做 sixth form*，就是大學預科兩年，再來才是大學 3 年或 4 年。因為到 16 歲是義務教育的最終年齡。許多我們中學的幾何英國都編在 sixth form 中。

像這本“中學生的數學理解力”，國內編教材的研究小組及中學教師都有必要一讀，是一份極重要的參考資料。

舉個例子來看這本書所提出的研究結果。

書中第 154 頁，關於“單一的旋轉變換”的理解所作的分析，14 歲這一年齡的學生的理解層次，根據五種不同程度的問題，所得的結果，以其中幾個代表性的問題為例，列舉如下：



(圖 2)

(圖 2)說明：

1. I, II, III, IV, V 代表五種理解層次的問題，由易而難。
2. 黑點代表旋轉中心。
3. 百分比指 14 歲群的學生，能夠了解的學生數比率。
4. 題目說明：

*註：從中學 11 歲～12 歲算起，這是 1st form，中學第五年就是 5th form，上去的兩年就叫 sixth form。

- I. (1) 是要學生將一L型旗子旋轉 90° 。
 (2) 是將一垂直旗子旋轉 90° ，旋轉中心都在旗桿的一端。學生只要畫出旋轉後的旗子的位置，旗子大小可忽略。
- II. (1) 將一三角形以其一頂點為中心旋轉 90° 。
 (2) 說明為何C點不是A、B兩旗的旋轉中心。試學生能否看出 $AC \neq BC$ 。
- III. (1) 將旗子旋轉 90° ，旋轉中心不在旗桿上。
 (2) 旋轉中心就在旗桿延長線上。
- IV. (1) 此題與III(1)類似，只是旗子放成垂直狀。
 (2) 解釋為何E點到兩旗桿端點等距並且說明為何B旗不是A旗以E為中心旋轉後的像。
- V. (1) 此題的旋轉中心與旗桿端點連線與旗桿成一斜度，畫旋轉後的像。
 (2) 求將A旗旋轉成B旗的旋轉中心。

測驗卷中關於單一個旋轉變換 I 至 V 各層次的問題數分別有 2 題、3 題、2 題、3 題和 7 題。測驗對象有 13 歲群，14 歲群，15 歲群。測驗結果，依照答對各層次的問題的數目；將學生的理解層次分成第 0 層，第 1 層，……，第 5 層。

綜合鏡射與旋轉整個學生理解力的分佈情形如下：

表1 各理解層次學生的分佈表（百分比）

	13 歲群	14 歲群	15 歲群	
第 0 層	17	16	12	
第 1 層 (6/10 題)	30	25	20	
第 2 層 (5/8 題)	17	16	19	
第 3 層 (3/5 題)	23	28	26	
第 4 層 (5/7 題)	8	8	12	
第 5 層 (7/11 題)	4	8	11	
學生樣本數	293	449	284	共 1,026 人

其中第 1 層下（6/10 題）表示第 1 層次的問題有 10 題，對 6 題以上的學生，就屬於了解第 1 層次的問題的能力已夠。

從上表第 0 層的百分比，可以看出在義務教育階段，有相當百分比的學童（約 2～15% 左右），對變換的理解能力始終無法建立。這一部分的學生在英國通常屬於“免考班”，即中學畢業後數學科的會考放棄參與，上課時老師可以自行選擇有趣的數學遊戲來教學。這部分學生也就是 SMP 新計

畫所編教材不適用的對象。

英國中學已放棄傳統平面幾何的教學，我們則仍然保留。對於這情形，我們是不是也應該就學生對傳統平面幾何的理解層次進行研究，以其結果來當做教材取舍的參考呢？英國的研究結果是多數學生無法接受傳統平面幾何的嚴密演繹系統，才在20年前，引進變換幾何以取代傳統平面幾何。這樣取代後，是否真正成功，在Hart這本書中也有討論，有興趣的人可以參考。 □

參考資料

1. Allendoerfer C. B., The Dilemma in Geometry, the math. teacher, 62, Mar. 1969, 165~70.
2. Boys. G., The Critical Review, Math in school, Vol 15, # 3, May. 1976, 26~29.
3. Hart. K. M. (ed.), Children's Understanding of Math: 11~16, John Murray, 1981.

附 言

本文著者林福來教授為本中心70年度教育部委辦高級中學數學課程改進計畫研究小組主持人，目前以國家科學委員會出國進修計畫在英國考察數學教育中。

封面說明

此露頭位於蘇澳南方約五公里海邊之廬山層地層中。向斜軸上部為深淺色相間之薄層砂岩及頁岩互層。兩翼及向斜軸下部為厚層砂岩。砂岩與頁岩原始沈積時層面應近乎水平，因受地殼變動而造成褶皺，圖中所示為褶皺的向斜部分。

廬山層中
之向斜構造

